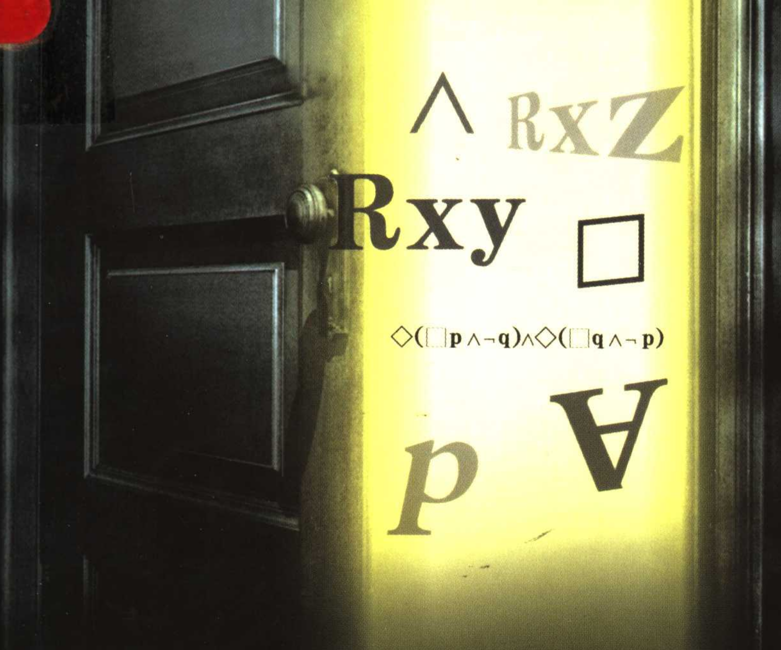


卷Ⅰ

逻辑之门——约翰·范本特姆经典著作

逻辑、信息和互动

〔荷〕约翰·范本特姆 著
刘奋荣　余俊伟　等 译



"当我考入荷兰阿姆斯特丹大学时，物理系和哲学系正好在一座楼里，我不经意地选修过一门逻辑。对我来说，这门神奇的逻辑课让我大开眼界：正是逻辑揭示了我们所做的日常事情（例如，谈话、推理和论辩）背后的精妙的数学结构。所以我爱上了逻辑学，……"

——刘奋荣："与约翰·范本特姆教授面对面"，《哲学动态》2004年第4期

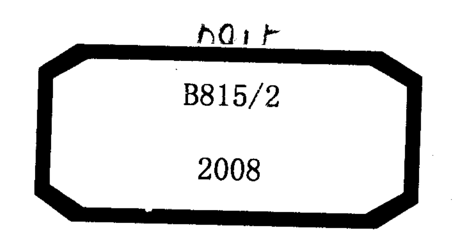
传统逻辑和哲学主要研究逻辑推理的"产品"，例如思想、证明和命题。但是在很多学科例如哲学、计算机科学和语言学中，信息流的机制本身成为研究的主要对象。

——范本特姆：《探寻逻辑的动态性》，斯坦福语言和信息研究中心，1996出版


(B-0143.0101)



定　价：78.00元



卷I

逻辑之门——约翰·范本特姆经典著作

逻辑、信息和互动

〔荷〕约翰·范本特姆 著
刘奋荣　余俊伟　等 译

科学出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

逻辑、信息和互动/〔荷〕范本特姆著；刘奋荣，余俊伟等译.
—北京：科学出版社，2008
（逻辑之门：约翰·范本特姆经典著作）
ISBN 978-7-03-020525-4

Ⅰ. 逻… Ⅱ. ①范…②刘…③余… Ⅲ. 模态逻辑—文集
Ⅳ. B815.1-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 053485 号

责任编辑：胡升华 郭勇斌／责任校对：钟 洋
责任印制：钱玉芬／封面设计：无 极

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双 青 印 刷 厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2008 年 6 月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2008 年 6 月第一次印刷 印张：26 1/4
印数：1—3 000 字数：508 000

定价：78.00 元

逻辑之门——约翰·范本特姆经典著作

顾　问　约翰·范本特姆

主　编　刘奋荣

《逻辑、信息和互动》编译组

组　长　刘奋荣　余俊伟

成　员　（按姓氏笔画排序）

刘新文　张木春　胡义昭　郭佳宏

郭美云　萧　瑶　崔建英　裘江杰

丛 书 序

逻辑学是一门古老的学科，它的历史可以追溯到古希腊、印度和中国。逻辑学发展到今天，已成为一门基础学科，越来越具有交叉性。许多学科，从数学到人文学科、从计算机科学到社会科学，在这里交汇。所以，进入逻辑的世界将会使我们掌握整个学术研究领域的基础、工具和方法。

约翰·范本特姆是当今著名的逻辑学家。他从20世纪70年代开始就活跃在逻辑研究的很多领域，是发展这种现代逻辑观的领军人物。他的学术研究不仅涉及纯粹的数学基础领域，而且还涉及许多其他的应用领域。约翰·范本特姆是著名的阿姆斯特丹大学的逻辑、语言和计算研究所的创始人。他是欧洲逻辑、语言和信息学会的第一任主席。同时，他还是斯坦福大学的哲学教授，是中山大学的客座教授。“逻辑之门”这套丛书的宗旨是让中国的读者更系统地了解他的学术研究及他对逻辑未来发展趋势的一些看法。丛书包括约翰·范本特姆的经典论文和专著的译文。这些著作涉及的主题有：关于信息、进程和智能互动的模态逻辑；自然语言中范畴语法和量词语义的逻辑；逻辑与认识论和科学方法论之间的相互影响。

总之，本丛书将会呈现给读者一个崭新而活跃的研究领域，在这里逻辑、哲学、数学、计算机、语言学、社会科学和认知科学之间互相交叉和渗透。本丛书的译者都是活跃在中国逻辑界从事现代逻辑教学和研究的学者，他们的工作将会为读者开启一扇进入广阔的逻辑世界的学术之门，也将会对进一步开展国际学术交流、全面实现中国的逻辑研究现代化、实现中国的逻辑研究同国际逻辑研究水平的全面接轨起着巨大的促进作用。遵诸位忘年友之嘱，是为译序。

张家龙

2007年7月24日

译　者　序

约翰·范本特姆是当今最著名的逻辑学家之一。他的学术研究涉及模态逻辑、语言逻辑及逻辑哲学等领域。从20世纪70年代到现在，他撰写了6部专著和约300篇学术论文，主编了4部具有权威性的逻辑手册，其影响从学术界对他著作的引用频率可见一斑。本项目得到了阿姆斯特丹大学的支持，旨在将约翰·范本特姆的著作翻译成中文，使其在中国内地、香港和台湾等华语地区得到更为广泛的传播。本书收录的是关于模态逻辑的13篇经典论文。可以说，每篇论文都包含着作者深邃的思想和精妙的逻辑技巧。按照研究主题的不同，我们把13篇论文进一步分为4个部分。幸运的是，范本特姆教授为本书的每一部分专门撰写了新的导读。我们相信，这些导读对于读者更好地把握论文的精髓会十分有帮助。在我们看来，很多研究成果最初都是以论文的形式发表的。学术论文往往包含对具体问题的来龙去脉更为详尽的阐述，同时也包含一些尚未解决的开放问题。因此，通过阅读论文，读者不仅可以直接了解当下的问题、作者的解决方案及逻辑技巧在其中发挥的作用，而且能够直接进入对开放问题的继续研究阶段。

参与这一项目的翻译和校对人员都是国内年轻的逻辑学家，他们都是在大学和研究机构任职的骨干力量。他们的逻辑技术基础扎实，英语运用能力强，并且具有高度的责任感。这里是关于他们的一个情况简介（按姓氏笔画排序）。

刘奋荣　清华大学人文学院哲学系　副教授
刘新文　中国社会科学院哲学所　副研究员
余俊伟　中国人民大学哲学院　副教授
胡义昭　中国社会科学院哲学所　助理研究员
郭美云　西南大学逻辑与智能中心　副教授
郭佳宏　北京师范大学哲学与社会学学院　讲师
裘江杰　浙江大学人文学院　博士后

关于翻译和一校的分工情况，可见每篇文章的首页。为确保翻译的准确性，我们进行了第二次校对工作。余俊伟同志对前两部分做了校对，刘奋荣同志对后两部分做了校对。裘江杰和郭美云同志也参与了二校的部分工作。但是，我们仍

然希望广大读者对我们的翻译工作予以进一步的指正。还有，郭美云同志在西南大学开设对所翻译论文的讨论班，效果喜人。三位逻辑研究生张木春、萧瑶和崔建英因此也加入了我们的工作，在此表示欢迎和衷心的感谢。另外，为了便于读者查阅，我们在本书的结尾附加了英-汉专业术语对照表和英-汉人名对照表。事实上，这两个对照表涉及的术语较本书所涉及的更为广泛，可供读者做一般的使用。刘新文同志和余俊伟同志为此做了大量的工作，在此表示感谢。我们主要采取音译的方法来翻译外国的人名，感谢我在荷兰的同事帕奎特（E. Pacuit）帮忙朗读这些英文的名字。此外，为了本书前后体例的一致，我们对文中的定义、定理等进行了编号，结尾处的参考文献做了一些调整。最后，十分感谢所有参与这个项目的人员能够在百忙之中抽出时间来完成此项工作。

受益于现代网络技术的发展，在翻译过程中，我们的译者和作者之间进行了无数的电子邮件联系，探讨翻译过程中碰到的理解方面的问题。这大大提高了我们翻译的效率和质量。为了进一步加强译者和作者之间的联系，我们将于 2007 年 8 月 1 日在中国人民大学举行关于模态逻辑的会议，主要的发言人是参与本项目的译者和约翰·范本特姆教授。这个会议对所有的观众开放，我们希望通过对具体问题的研讨，加深大家对模态逻辑的理解，进一步寻求合作的空间。这次会议得到了北京市逻辑学会的赞助，在此表示感谢。

最后，感谢阿姆斯特丹大学对本项目在资金方面的赞助。感谢科学出版社科学人文分社胡升华社长和郭勇斌编辑为本书的出版付出的艰辛劳动。

刘奋荣

2007 年 7 月

前　　言

本书是关于当今模态逻辑所研究的主要问题的一个论文集。这一论文集展示了模态逻辑的发展历程，将这一领域的研究放在了一个更为广阔的历史背景中。

模态逻辑这门学科有着十分有趣的历史，充满着令人惊讶的曲折故事。它的历史至少可以追溯到古代亚里士多德的模态三段论。即便是这样，正如我在拙作《内涵逻辑指南》（Manual of Intensional Logic）中阐述的那样，现代逻辑之父弗雷格驳斥了康德在 1780 年左右总结的逻辑范畴表。然后，他把传统的内涵概念，例如，必然或可能，也从他的分析数学证明的“外延的”议程中剔除出去。但是，内涵概念在 20 世纪重新回到逻辑中来。模态逻辑可以看做是在经典逻辑中加入必然、可能、时间、空间、行动、知识、信念、义务和其他内涵概念的扩展。要了解关于这些内涵概念的研究，可以参阅《哲学逻辑手册》（Handbook of Philosophical Logic）。大家对这一观点都很熟悉，所以我不准备在此做进一步的讨论。

但是，“增加内涵概念”只是述说模态逻辑发展历史和描述其现状的一个线索。在新近出版的《模态逻辑手册》（Handbook of Modal Logic）的导论中，特别是在范本特姆（van Benthem）和白垒本（Blackburn）写的“模态逻辑，一个语义视角”那一章节中，我们给模态逻辑描绘了一个更为多样化的图景。要寻找具有同样精神的现代教科书，白磊本、德莱克（de Rijke）和维尼玛（Venema）合著的《模态逻辑》（Modal Logic）一书似乎仍然是最为包罗万象的参考书。这些材料表明，模态逻辑当今的研究至少包括了两个进一步的研究领域，这不仅反映了模态逻辑受哲学和数学的影响，而且也有来自计算机甚至博弈论对其的影响。

其中有一个问题似乎是一种令人惊讶的颠倒！一方面模态逻辑常常被认为是经典逻辑的更大扩展，但是，另一方面，它们只是模态模型更为丰富的一阶或高阶语言的一个小片段。这种观点最初出现在 20 世纪 70 年代，之后一直影响很大。它强调的是一些相互关联的问题。第一，我们可以探讨从模态语言到经典语言的翻译，从而也把二者的模型论联系了起来。一般而言，在这样的翻译下，模态算子变成了局部的“安保”量词。这种翻译可以在模型层面上做，也可以在框架层面上做，后者就是所谓的模态对应理论。这样，我们就可以有模态的和经典的两种看待问题的方法：没有任何理由偏爱其中一种而丢弃另外一种。我的拙作

《模态逻辑和经典逻辑》(Modal Logic and Classical Logic) 就是对这种方法的一个全面发展。特别是，依据这种观点，模态语言能够描述经典逻辑的*微细-结构*。从基本的模态语言继续发展，到一阶谓词逻辑，或甚至可以超越它（如果我们加入不动点算子的话）。要设计一个好的模态语言（也许甚至是任何逻辑系统）就是要寻求语言表达力和计算复杂性之间适当的平衡。模态语言就是有限的表达力、高度的清晰性及可判定性的一个完美结合。甚至我们还可以利用模态逻辑来找寻经典逻辑中那些大的仍然是未知的可判定部分，譬如 [Andréka, van Benthem & Németi. 1998] 发现的*安保片段*。最后，由强调可定义性和语言表达力引发了对另一个数学问题的兴趣。与模态语言匹配的是模型之间自然的结构不变性，*互模拟*的进程等价是众所周知的例子。最终的范例仍在发展当中，最新的研究成果可见 [van Benthem. 2006; van Benthem, ten Cate & Väänänen. 2007] 中关于林斯特龙（Lindström）定理和经典逻辑片断的抽象模型论的研究。

然而，还有看待模态逻辑的第三种角度。似乎可以公正地说，模态逻辑的现代研究受到了计算机科学，或“信息学”出现的影响（很多诱人的欧洲命名中都包含这个词）。这使得人们对信息、计算及分析人类和机器的任何类型的序列进程或分布式的进程产生了浓厚的兴趣。模态逻辑可以看做是下面的一些互相关联的主题的基本理论。我们研究信息结构和*信息流*的动态变化，行为的一般逻辑和*进程理论*。还有，当把人和机器主体放在一起时，我们考虑他们共有的信息结构和*互动*，这一现象出现在博弈和其他目标-趋向的社会行为中。我把这一纲要写在了我的拙作《探索逻辑的动态性》(Exploring Logical Dynamics) 一书中。事实上，这一想法确实是当时的人们在脑子里所思考的。这里，传统的哲学逻辑不仅与数理逻辑、计算逻辑、泛代数等碰面，还与信息学、经济博弈论、甚至当今的社会科学会合。在阿姆斯特丹的 ILLC 关于博弈和互动的研究 (www. illc. uva. nl) 是对这一现代模式的印证。不过，我们必须说，所有早先提到的在模态逻辑研究中出现的问题都在此再次出现。事实上，中国的学者也许读过我为2004年中文《逻辑增刊》写的论文“行动逻辑的迷你导引”，那里阐述了我关于以上研究纲领的一些主要想法。

上面提到的所有问题都出现在过去几十年里我写的书和论文中。具有代表性的是本书精选的13篇论文。这些论文分为4个部分，即，关于一般的模态逻辑及其方法论；关于模态逻辑和计算，重点强调进程理论；关于模态逻辑和信息，描述知识和信念的静态和动态特征；最后，关于模态逻辑和博弈，反映了目前关于智能的互动逻辑研究的兴趣。在每一部分，我新增加了对每篇论文的进一步介绍。总的来说，我希望本书能够为读者提供一个关于现代模态逻辑鲜活的视角。想要对相关主题做更多研究的读者，可以在本书的基础上进一步阅读文献，包括

上面提到的我自己的一些专著。

当然，还有一些主题可以加到本书中来，例如，关于时间和空间的著作（参见拙作《时间的逻辑》（The Logic of Time）和即将出版的《空间逻辑手册》(Handbook of Spatial Logics)。但是，为本书挑选的论文似乎更为连贯，并且它们打开了通往其他专题研究的道路。

最后，感谢刘奋荣女士发起了这个翻译项目。也感谢所有的出版社允许我在这里使用这些论文。更重要的是，非常感谢参与这个项目的所有译者，感谢他们慷慨地花费时间和精力使得中国和亚洲的更广大群体能够了解我的工作。我很高兴，也很荣幸能够参与这一项目。

约翰·范本特姆

2007 年 3 月

参考文献

Aiello M, Pratt-Hartmann I, van Benthem J, eds. 2007. *Handbook of Spatial Logics*. Dordrecht: Springer Academic Publishers

Andréka H, van Benthem J, Németi I. 1998. Modal logics and bounded fragments of predicate logic. *Journal of Philosophical Logic*, 27: 217 ~ 274

Blackburn P, de Rijke M, Venema Y. 2001. *Modal Logic*. Cambridge: Cambridge University Press

Blackburn P, van Benthem J, Wolter F, eds. 2006. *Handbook of Modal Logic*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers

Gabbay D, Guenthner F, eds. 1998. *Handbook of Philosophical Logic*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

van Benthem J. 1983. *The Logic of Time*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

van Benthem J. 1985. *Modal Logic and Classical Logic*. Napoli: Bibliopolis

van Benthem J. 1988. *Manual of Intensional Logic*. Stanford: CSLI Publications

van Benthem J. 1996. *Exploring Logical Dynamics*. Stanford: CSLI Publications

van Benthem J. 2007. A new modal Lindström theorem. *Logica Universalis*, 1: 125 ~ 138

van Benthem J, Cate ten B, Väänänen J. 2007. Lindström theorems for fragments of first-order logic. // *Proceedings LICS* 2007: 280 ~ 292

目　　录

第1部分 模态逻辑基本理论

这一部分包括 3 篇基本的模型论论文，主要讨论可定义性和语言的表达力。它们是对前言中提到的许多主要的技术动向的进一步阐述。

第一篇论文是收录于《哲学逻辑手册》中的“模态对应理论”一章，最初写于 1984 年，在 1998 年进行了增订。它从著名的模态公理和语义性质之间的对应开始讨论。这里是一个典型的例子：著名的模态“K4-公理”$\Box p\rightarrow\Box\Box p$ 说的是可能世界之间二元可及关系的传递性。本章从这里出发展开了关于模态公理和语义框架的关系属性之间的整个对应理论，把模态和经典逻辑联系起来。一个重要的贡献是，我们说明了在什么情况下模态公理有一阶对应物，在什么情况下一阶属性是模态可定义的。这里的一般技巧可以运用到更多的模态语言中去，这一点可见于当今的很多领域——甚至是一些意料不到的领域（参见最新一些例子，[van Benthem. 2008]）。最近，这些技巧被推广到带不动点的非-一阶语言中去，尽管那里还有许多开放的问题（参见一前一后的方法，[van Benthem. 2005; 2006]）。

第二，上面提到的一前一后的方法，微细结构，语言表达力和计算复杂性之间的平衡，互模拟不变性，以及一阶逻辑下的模态语言等问题在“两个格式塔中的模态逻辑”中得到了充分的研究。这是我为 1998 年在乌普萨拉举行的第一次“模态逻辑进展”大会做的基调讲座。本文除了推广 1980 年代保加利亚的“索非亚学派”的想法和 20 世纪 90 年代计算机科学界的后继工作，还阐述了如何设计模态语言和经典语言，使得可以把二者放在一起研究。这进一步增进了我们对这两种语言的理解。文中很多内容如今已经变成一般的练习了。特别地，这种思考方式与当今活跃的研究介于基本模态语言和一阶逻辑之间的“混合逻辑”不谋而合。

最后，论文“安保、界限和广义语义学”发表在 2005 年的《逻辑、语言和信息杂志》（Journal of Logic, Language and Information）上，这是为纪念“十年的安保片段”而写的。这篇论文首先回顾了由 [Andréka, van Benthem & Németi. 1998] 提出的作为一阶逻辑最大的模态可判定部分的安保片段。文章进一步阐明，令人惊讶的是，两种不同的语义策略，即“用片断工作”和不同于普通的整个一阶语言的塔斯基语义的“广义模型”，有时等同于一件事情。而且，文章解释了如何使用现代模态技巧来理解一阶谓词逻辑，这一现代逻辑卓越的工作系统。特别地，模态分析为一阶逻辑揭示了新的进程模型。最为显著的是，安保片段成为可以回避不可判定问题的可判定子逻辑的一个新源泉。

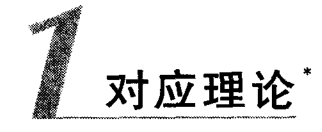
参 考 文 献

Andréka H, van Benthem J, Németi I. 1998. Modal logics and bounded fragments of predicate logic. *Journal of Philosophical Logic*, 27: 217 ~ 274

van Benthem J. 2005. Minimal predicates, fixed-points, and definability. *Journal of Symbolic Logic*, 70: 696 ~ 712

van Benthem J. 2006. Modal frame correspondences and fixed-points. *Studia Logica*, 83: 133 ~ 155

van Benthem J. 2008. Man muss immer umkehren. To appear in Dégremont C, Keif L, eds. *Festschrift for Shahid Rahman*, University of Lille/Springer Publishers



对应理论*

余俊伟/译　刘新文/校

1.1　主题引论

1.1.1　对应

1960年前后，当可能世界语义学出现时，其最迷人的特征之一就是揭示了在已有的内涵公理和世界之间可及关系的一些普通性质之间的简单联系。几十年句法上的耕耘已经产生了众多的内涵公理理论，而现在这些理论可获得一种清晰的语义处理。为这些理论提供一个清晰的语义处理现在已经非常有用了。例如，典型的完全性定理以如下方式出现：

一个模态公式是 **S4** 的定理，当且仅当它在所有自返的、传递的克里普克框架上为真。

确实也可以证明 **S4** 是偏序的模态逻辑；它将最著名的模态逻辑与也许是最基本的经典关系结构相匹配起来。这样的匹配关系拓展到 **S4**-谱系中更高位置的逻辑。例如，再加上公理

$$\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$$

所得的 **S4.2** 对于具有下面性质的那些框架是完全的：自返的、传递的和有向的（directed）或相汇的（confluent）：

$$\forall xyz((Rxy \wedge Rxz) \to \exists u(Ryu \wedge Rzu))$$

这后一条件就是经典框架的一种“菱形性质”。

像这样一些完全性结论已经激起了一个繁荣的内涵完全性理论领域，如经典

---

* Gabbay D. Modal Correspondence Theory//Gabbay D and Guenthner F eds. *Handbook of Philosophical Logic*. Vol. III. second edition. Dordrecht: Springer Science, 1999. 325 ~408.

著作［Segerberg. 1971］所示。然而，模态逻辑学家费了一段时间后才意识到，这里也涉及直接的语义等价，而它与模态逻辑中的演绎毫不相关。的确，整个对应理论所呈现的都是出于在20世纪70年代早期做的一些如下的简单观察。

例1　T-公理$\Box p \to p$在一个克里普克框架$\langle W, R\rangle$上为真当且仅当R是自返的。这里，“在一个框架上为真”意指在所有命题变元指派下在所有的世界中为真。

证明：“$\Rightarrow$”：考虑任意一个$w \in W$。如果$\Box p \to p$在$\langle W, R\rangle$中为真，那么，特别地，它在满足下列要求的指派V下为真。

$$V(p) = \{v \in W \mid Rwv\}$$

这样，根据定义，$\Box p$将在w上为真——因此，p也在w上为真：即Rww。

“$\Leftarrow$”：根据自返性，在所有R-可及（的世界上）为真蕴涵着在现实（世界）上为真。 ■

例2　**S4**公理$\Box p \to \Box\Box p$与传递性等价。

证明：类似可证。 ■

例3　**S4.2**公理$\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$定义有向性。

证明：“$\Rightarrow$”：考虑任意的w，v，$u \in W$满足Rwv，Rwu。令指派V为：

$$V(p) = \{s \in W \mid Rvs\}$$

由此立即得到$\Box p$在v上为真。因此，$\Diamond\Box p$在w上为真。所以$\Box\Diamond p$也一定为真。这推出$\Diamond p$在u上为真；即，u在$V(p)$中有一个R-后继——因此，v、u有一个共同的R-后继。

“$\Leftarrow$”：如果$\Diamond\Box p$在w中真，[①] 比如说，因某个满足Rwv且验证了$\Box p$的v，那么，$\Diamond p$将在w的所有R-后继中为真。因为，根据有向性，所有这些后继都与v至少有一个共同的后继。 ■

并不是所有的对应都同样简单。例如，**S4.2**有一同伴**S4.1**，它是由**S4**增加“麦肯西（McKinsey）公理”$\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$而获得。已经证明这一**S4.2**公理的逆要复杂得多。一个众所周知的完全性定理认为，**S4.1**是那些自返、传递且原子的

$$\forall x \exists y(Rxy \wedge \forall z(Ryz \to z = y))$$

克里普克框架的模态理论的公理化。

（注意，除了谓词常项R外，我们在这里还需要等词）我们以后将在1.2.2

① 其中的“w”原文误为“W”——译者注。

看到，**S4.1** 的所有公理（只有）一起（才）设法定义了上述三种关系条件，但是麦肯西公理本身并不定义原子性（它要更弱一些）。的确，这个简单的模态原则根本就不拥有等价的一阶关系式——这是 1975 年前后由几个人独立发现的。

1.1.2　作为可及关系上的条件的模态公式

此处呈现出了一般的图画：模态公式表达了它们在其上有效的那些框架上的可及关系的某些“经典”限制。事后看来，这一观察毫不奇怪。毕竟，给定了某个赋值，基本的克里普克真值定义的条件其实就是将模态公式翻译为含 R 的经典逻辑公式。因此，如：

$\Box p \to p$　　变成 $\forall y(Rxy \to Py) \to Px$

$\Box p \to \Box\Box p$ 变成 $\forall y(Rxy \to Py) \to \forall y(Rxy \to \forall z(Ryz \to Pz))$

而麦肯西公理$\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$ 就是

$$\forall y(Rxy \to \exists z(Ryz \wedge Pz)) \to \exists y(Rxy \wedge \forall z(Ryz \to Pz))$$

这里的参数“x”指进行赋值的当前世界，而一元谓词 P（Q，…）表示相应的命题字母 p（q，…）在其上成立的那些世界的集合。

我们暂时打住，而来看看，仅根据这一简单观察，一些已有的有关经典谓词逻辑的结果如何可直接迁移到模态逻辑上来。例如，对于克里普克框架加上一固定的指派（1.2.1 的模态“模型”），立即有紧致性和骆文汉姆-斯科伦（Löwenheim-Skolem）结果。如果（比方说）一个模态公式集在（给定了适当指派的）克里普克模型中是有穷可满足的，那么其经典的翻译将也是有穷可满足的。因此，根据通常的紧致性，后一个集合将同时在某个结构〈W，R；P，Q，…〉中被满足：它构成了一个克里普克框架并带有验证了原来那个集合的指派。

但是，这一观点并不就是我们所需要的。

在根据上面真值定义对模态公式进行赋值时，有两个因素相互交织在一起：世界的关系模式和特定的“事实”，即指派。但是，后者——常项 P，Q，…的特定所指——与作为关系限制的模态公式的角色没有关联。的确，这些甚至可能还会模糊问题。例如，当 V（p）等于 W 时，$\Box p \to p$ 在所有的可能世界中成立——但是这种观察完全不能给予任何跟这个公理的真实内容（即自返性）相关的信息。

为了达到恰当的观点，人们可以简单地通过对先前翻译中的一元谓词进行全称量化，而从特定指派的结果中进一步抽象。因此，如

$$\Box(p \vee q) \to (\Box p \vee \Box q)$$

现在就成了

$$\forall P \forall Q(\forall y(Rxy \to (Py \vee Qy)) \to (\forall y(Rxy \to Py) \vee \forall y(Rxy \to Qy)))$$

注意到，与早先的一阶形式相反，现在模态公式的翻译成为二阶的了。

参数“x”仍然保留了：当前的关系条件仍都“局限”于某个现实世界。通过对这个世界参数再做全称量化就可以得到一个“全局”条件。这一差别并非不重要。局部形式更适合于原初的克里普克结构〈W，R，w_0〉，其中“现实世界”w_0突显出来，“非正规的”模态语义中也有某些世界区别于其他的世界。然而，全局形式更为常见，它在后面将是主要的。

此外，体现在上面翻译中的观点是重要的——即使原先的一些迁移现象丢失了。例如，丢失了最有用的紧致性和骆文汉姆-斯科伦性质。在二阶逻辑中不能自动保证：如果一个模态公式在某个不可数的克里普克框架（即在所有赋值下）中为真，它将在其可数的初等子框架中为真（也是在所有赋值下）。然而在1.2.2中，恰是这一现象可以用来将“本质上一阶的”模态公理和“本质上二阶的”模态公理契合在一起。此外，不是所有的都丢失了。上面的翻译都是非常简单的二阶公式，即所谓的Π_1^1-句子，它的所有二阶量词都以全称前束形式位于一个一阶母式之前。从经典逻辑那儿，我们还知道一些关于Π_1^1-句子的结论，将来会用得着它们（参考本手册第1卷那些关于高阶逻辑和算法的章节以获得背景知识）。

接下来的这个明显问题涉及这样一件事。根据前面的关于对应的例子，现在的二阶翻译是极其复杂的。例如，对于T-公理$\Box p \to p$，比较

$$\forall x Rxx \text{ 和 } \forall x \forall P(\forall y(Rxy \to Py) \to Px)$$

但是，正是前者简单的一阶等价式的发现首先促使了以上的研究。现在，对于某些模态公式，二阶复杂性是不可避免的——麦肯西公理可以为证。但是，至少这里产生了一个基本的疑问。

疑问1 哪些模态公式定义一阶关系条件——它们是怎样定义的?

根据上面的观点，经典的资源立即提供了一个答案。一个Π_1^1-句子是一阶可定义的当且仅当它对超积构造——经典模型论中一种重要的构造——保持。通过上面的翻译，同样的标准可以应用到模态公式（在此处及在本导论中相关的地方，所涉及的里里外外的技术都将推迟到相关部分中讨论：此处而言是1.2.1和1.2.2）。

1.1.3 模态对应理论

如果从关系原则来看，前面的问题一直是系统地研究模态公式的经典可定义性的出发点。现在所提到的超积刻画是一个非常抽象而全局的刻画，远离寻找对应这一实际的事情。而且历史上它发展得也相当迟——我们将转向更为具体的主题，正如它们发展的那样。

初看起来，证明一阶可定义性似乎是件简单的事：就是找到一个等价式，然后证明它确实行。但是，有个问题是：这样做有多大的系统性？例如，例 1 ~ 3 的证明就展示一些规则性。确实，更近的观察揭示，自返性、传递性和有向性可以通过某些“极小”可定义的指派的代入从 **S4.2** 公理的二阶翻译得到。

这一方法背后的启示简单地说是这样的。例如，如果 $\Box p \to p$ 在 x 处为真，那么最“省力气的”验证前件的方法（即令 $V(p) = \{y \mid Rxy\}$）带有关于整个蕴涵的极大量的信息。本质上说，这就是为什么在

$$\forall x \forall P(\forall y(Rxy \to Py) \to Px)$$

中以 Rxu 代入 Pu 可以得到等价式

$$\forall x(\forall y(Rxy \to Rxy) \to Rxx)$$

根据前件的普遍有效性，后者可以简化为通常的自返性表述。一个完全类似的思路可以从 $\Box p \to \Box\Box p$ 的翻译得到传递性。像 $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$ 中这样的前件会有些复杂；但是一般的思想还是相同的。用这种方法，人们发现了大量的可以能得到一阶等价式的模态公式的递归类。

然而，这种代入方法也有明确的局限性。特别是，它不是对所有一阶可定义的模态公式起作用——正如在 1.2.2 中对 **S4.1** 这一情况证明的那样。与这个问题相关联，一阶可定义的模态公式集的确切的组合复杂性仍是未知的——但是有理由担心它甚至不是算术可定义的（更别说递归的或递归可枚举的）。

否证一阶可定义性是件更困难的事。真的，人们到底该怎样下手？文献中所有例子的一般模式是这样的：找到一阶句子的某个语义保持性质，而它是所考虑的模态公式所缺少的。这样，例如由本文作者最早发表的一个例子是证明麦肯西公理如何违反了骆文汉姆-斯科伦定理。它在某个不可数克里普克框架中成立（将在 1.2.2 给出），而在它的任意一个可数初等子框架中皆不成立。一个经典例子是，将戴德金连续性（Dedekind continuity）（本身也是一个 Π_1^1-性质）加到有理数的一阶序论中也会出现这一现象。所得的 Π_1^1-句子有不可数模型（最有名的是实数）；但是，它甚至完全不具有可数模型。

在 1.2.2 中看到的“本质上二阶的”公理的模态例子将用来标明上面代入方法的范围。麦肯西公理也经常作为一个有启发性的例子。前面“极小验证”的试探方法典型地对于像 $\Box\Diamond p$ 这样表达某种依赖性的前件无效——没有一阶对应式可立即得到。

这个故事，如果可以这么说的话，除了模态的一半外，还有相反的一个方向，从经典公式到模态公式。这次又激起一个基本的疑问

疑问 2　哪些一阶关系条件是模态可定义的？

这一问题的“正”的方面仍是关于建立有效的等价式。例如，人们怎样为偏爱的经典公式如连通性（connectedness）

$$\forall xyz((Rxy \wedge Rxz) \rightarrow (Ryz \vee Rzy))$$

找到其模态定义？这次试探的方法在于设想这个性质不成立的一种情形，同时利用模态公式来“极大地探寻”这一不成立。上面的具体例子就是，假设 Rxy，Rxz，$\neg Ryz$，$\neg Rzy$，我们设定$\Box p$ 在 y 处为真（p 在 z 处为假）并且$\Box q$ 在 z 处为真（q 在 z 处为假）。这其实就是验证下面的公式在 x 处成立：

$$\Diamond(\Box p \wedge \neg q) \wedge \Diamond(\Box q \wedge \neg p)$$

现在，原来的性质本身将对应这个模态“不成立的描述”的否定，即

$$\neg(\Diamond(\Box p \wedge \neg q) \wedge \Diamond(\Box q \wedge \neg p))$$

根据我们那些熟悉的等值转换，它又成为了

$$\Box(\Box p \rightarrow q) \vee \Box(\Box q \rightarrow p)$$

这是一个文献中通称为吉奇公理（Geach's Axiom）的原则。

当然，我们还要证明反向，即这一公理不成立蕴涵着连通性不成立；但是这立即可得。为了以不同方法交叉核对，我们也可运用前面的代入方法于吉奇公理（某种适当变换）：的确，连通性随之可得。

“负的”一面仍是一些否证。此处也表明这些否证特别有意思——因为我们不得不关注的正是模态公式的“典型行为”。下面是一个标准的例子。尽管自返性是模态可定义的，但是禁自返性 $\forall x \neg Rxx$ 却令人棘手。然而，尝试失败不意味就绝对的拒斥。我们所需的是模态公式的某种性质，就像克里普克框架上的关系条件，但是这个特殊的一阶句子却不具有该性质。

1.2.1 的模态模型论在这点上发挥作用。在那儿我们会看到，下列映射在克里普克框架之间传递模态真当中起重要作用：一个 p-态射是一个从框架 $\langle W_1, R_1\rangle$ 到框架 $\langle W_2, R_2\rangle$ 的满足下列条件的函数 f：①

（1）保持 R_1；

（2）在下面的意义上“几乎”保持 R_2：

如果 $R_2 f(w) v$，那么存在 $u \in W_1$ 使得（a）$R_1 wu$ 且（b）$f(u) = v$

标准逻辑里，这个概念在不同的名字下已经出现了，例如，集合论中的“莫斯托斯基坍塌”（Mostowski collapse）就是该种 p-态射。

就当前例子的目的，我们只需要记得满的 p-态射保持克里普克框架上模态公式的真。但是，这样就可以拒绝禁自返性：它在自然数带上通常的序的框架上成

① 其中的“W_1”原文误为“W”——译者注。

立；但是在这个框架的 p-态射像——收缩为一单个自返的点——上却不成立！

通过这个例子我们体会了对应理论这个领域中的实际工作。当然，也出现了这样一个更一般的问题：保持模态有效的条件的某种组合是否刻画了那些、也仅仅是那些模态可定义的一阶句子。事实的确如此。一个涉及 p-态射和其他基本构造的优雅结果说的就是这一意思，我们将在 1.2.4 证明这一点。

前面的概述绝没有穷尽对应理论所研究的问题的全部范围——但是，它确实传达了其精神。

1.1.4　对应和完全性

三大知识之柱支撑着模态逻辑大厦。其中有遍布各处的*完全性理论*，还有当前的对应理论，或者更一般地称作*可定义性理论*。最后是克里普克框架和“模态代数”之间的*对偶理论*，它本身已经成为一个领域了（参考下面的 1.2.3）。随着 1.2 的展开，后两者之间的联系会变得明显起来——特别是，把泛代数中经典的柏克霍夫（Birkhoff）定理应用到模态代数，可得到模态可定义的一阶句子的上述刻画。

对应与完全性的关系对于随后的发展不太重要。另外，已经表明，这种关系是相当复杂的。的确，人们仅理解了其部分。然而，对于那些熟悉完全性理论基本概念的读者，下面的简述可以使得对应问题更接近于传统所关注的问题。

模态逻辑中早期的完全性定理在［Segerberg. 1971］中被冠以一种标题：“模态逻辑 **L** 由克里普克框架类 $\mathscr{K}$ 决定”，即，**L**（在极小逻辑 K 的基础上）公理化了 $\mathscr{K}$ 的模态理论。

跟以前一样，这里出现了两个角度。第一个是，人们可以从给定的一个类 $\mathscr{K}$ 出发，寻求其模态理论的一个递归的公理化系统 **L**。一般来说，这里不能保证一定会成功；但是有一个涉及一阶可定义性的有益的观察。

事实 1　如果 $\mathscr{K}$ 是初等的（即由一单个一阶句子定义的），那么其模态理论是递归可公理化的。

证明：令 $\alpha = \alpha\ (R,\ =)$ 定义 $\mathscr{K}$。一个模态公式 ϕ 属于 $\mathscr{K}$ 的理论当且仅当它在 $\mathscr{K}$ 中的所有框架中成立。可以将它重述如下：

$$\alpha \models \forall x \forall P_1 \cdots \forall P_n \tau(\phi)$$

其中 $\tau\ (\phi)$ 是 ϕ 的早先的一阶翻译，而 p_1，…，p_n 是在后者中出现的命题字母。现在，谓词变元 P_1，…，P_n 在一阶句子 α 中不出现，因而上面的蕴涵等价于 $\alpha \models \forall x\tau\ (\phi)$。但这是个通常的一阶蕴涵。因此，既然后一概念是递归可公理化的，那么 $\mathscr{K}$ 的模态理论也一定是可以递归可公理化的。

虽说是可公理化的，但是，是在极小模态逻辑 **K** 基础上的可公理化吗？甚至这也是真的：像在经典逻辑中证明克雷格（Craig）定理那样，选择一个适当的公理递归集，并注意到 **K** 包含分离规则（而这就是全部所需的）。 ■

这样，反观前面，关于自返的、传递的序（及其他初等类）的完全性定理就是在意料之中的了。

现在模态逻辑里的研究不是从框架类到逻辑的方向；它更适合像时态逻辑这样的领域，在这些领域中，时序结构经常先于时序理论出现。而通常是，人们已经拥有某一确定的逻辑 **L**，再寻求一个 **L** 对于其是完全的克里普克框架类 $\mathscr{R}$（注意，如果任何类 $\mathscr{R}$ 满足上述要求的话，那么使得 **L** 有效的整个克里普克框架类将满足上述要求）。

今天我们知道，与早期的期待相反，事实上不是所有的模态逻辑都是上述意义下完全的。这就是 [Fine. 1974；Thomason. 1974] 中著名的“模态不完全性定理”的内容。但是，人们仍一直都抱有这样的希望：至少所有一阶可定义的公理集都是完全的（的确，一个致力于此的、存在缺陷的证明曾一度流传）。但是，甚至这个更为谦恭的期待也在 [van Benthem. 1978] 中落空了：

事实 2 带有下列特征公理

$$\Box p \rightarrow p$$

$$\Box\Diamond p \rightarrow \Diamond\Box p$$

$$(\Diamond p \wedge \Box(p \rightarrow \Box p)) \rightarrow p$$

的模态逻辑 **L** 是一阶可定义的：它的框架恰好是那些满足条件

$$\forall xy(Rxy \leftrightarrow x = y)$$

的框架。但是，后面这个框架类的模态理论的特征公理，即，$\Box p \leftrightarrow p$，不是由 **L** 极小地可导出的。

1.2.2 将证明相关的对应。读者眼下可能已经注意到，第三条公理定义了“安全返回”这一概念：人们从世界 x 的任意一个 R-后继总是能循着 x 的 R-后继的某个有穷 R-链而回到 x。

相关的论证是极不平凡的，远远超出我们早先的代入方法。然而，正如不久我们将看到的，甚至后者也与完全性理论相关。

模态不完全性定理表明，极小模态逻辑 **K** 太弱，而不足以得到所有模态有效推理。不过，当然可以有更强的合理“基础逻辑”（base logics）。一个特别的例子源自代入方法。例如，在证明代入例示与更流行的一阶条件等价时，人们使用一个带有下列推演装置的、极其自然的二阶逻辑 $\mathbf{K}_2$：

某个对于分离规则完全的一阶基础逻辑，适于二阶量词的类似公理；

以及下列容许一阶公式的“一阶例示”形式[①]：

$$\forall X\phi(X) \rightarrow \phi(\psi)$$

通过前面的二阶翻译，$\mathbf{K}_2$ 可以作为一个模态的基础逻辑。

这里是个有名的例子。在算术可证性的元数学中（参考［Boolos. 1979］，或是本手册后面某卷中 C. 斯莫林斯基（C. Smoryński）所写的章节），下面两个模态公理是基本的：

$$\Box p \rightarrow \Box\Box p, \Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p \text{（洛伯公理(Löb's Axiom)）}$$

1.2.2 会建立后一个式子的语义含义重要性：它在那些可及关系是传递且具有逆良基性的框架中成立。此外，根据

$$\text{以 } Rxu \wedge \forall y(Ruy \rightarrow Rxy) \text{ 代入 } Pu,$$

传递性是从洛伯公理 **K**-可导出的（前件成了普遍有效式，而后件表达了传递性）。$\mathbf{K}_2$ 比 **K** 有优势吗？没有。大约在 1975 年，D. 德漾（Dick de Jongh）和 G. 撒宾（Giovanni Sambin）发现了从第二个公理还是可以得到第一个公理的一个 **K**-推演。这两个推演是相关联的，但是直到今天人们还未探索 **K**-推演和 $\mathbf{K}_2$-推演之间的系统的联系。

然而，在模态领域中，$\mathbf{K}_2$ 对于 **K** 而言是非保守的。在［van Benthem. 1979B］中，我们发现下列不完全性定理：

事实 3　模态公理

$$\Diamond\Box\bot \vee \Box(\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow p)$$

与 $\Diamond\Box\bot \vee \Box\bot$ 定义了相同的克里普克框架类，其中 $\bot$ 表示恒假。但是，后者从前者不是 **K**-可导出的——尽管它是 $\mathbf{K}_2$-可导出的。

这里再次涉及一种对应。但是，下面简单的 $\mathbf{K}_2$-推演已解释了这个结果背后的思想：

(1) $\forall P(\forall y(Rxy \rightarrow (\forall z(Ryz \rightarrow Pz) \rightarrow Py)) \rightarrow Px)$　（‘$\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow p$’），

(2) $\forall y(Ruy \rightarrow (\forall z(Ryz \rightarrow z \neq x) \rightarrow y \neq x)) \rightarrow x \neq x$　（用 $x \neq u$ 代入 Pu），

(3) $\neg \forall y(Rxy \rightarrow (\forall z(Ryz \rightarrow z \neq x) \rightarrow y \neq x))$，

(4) $\exists y(Rxy \wedge \forall z(Ryz \rightarrow z \neq x) \wedge y = x)$，

(5) $Rxx \wedge \forall z(Rxz \rightarrow z \neq x)$，

(6) $x \neq x$：一个矛盾($\bot$)。

从［Thomason. 1975］中一般的不完全性结果中，可以推得 $\mathbf{K}_2$ 必定是模态不完全的（与任意一个所建议的递归可公理化的基础逻辑一样）。

① 其中的“$\forall X$”原文误为“$\forall x$”——译者注。

一阶可定义性并不蕴涵完全性。但是，只要一个模态逻辑既是一阶可定义的又是完全的，那么它就具有后一个性质的一个非常好的形式——即，完全性是对于它自己的亨金模型的框架而言的（"一阶可定义性加上完全性，蕴涵典范性"：参考［Fine. 1975；van Benthem. 1980］)。这样的典范的模态逻辑在 1.2.4 里将从语义方面得到刻画：注意，许多熟悉的教材上的例子都属于这种。事实上，一个典范完全性证明，像 **S4** 的证明，经常是利用亨金模型上的一阶条件而做出的，而一阶条件是由相应的公理所引出的。

这些熟悉的"亨金证明"和上述的代入方法目前仍是非常神秘。［Sahlqvist. 1975］包括了许多平行的例子；但［Fine. 1975］提出了一个问题。模态公式

$$\Diamond\Box(p \vee q) \to \Diamond(\Box p \vee \Box q)$$

公理化了一个典范的、但不是一阶可定义的模态逻辑。因此，我们还远没有完全弄清楚完全性与对应之间的这一领域。

1.1.5 变异与推广

逻辑的模型论可以看做是本体论与语言（或是"数学"与"语言学"）之间的一个结合。相应地，直到现在，我们的模态命题逻辑的典范例子的语义展示了熟悉的三角形

$$\text{语言} \xrightarrow[\text{解释}]{} \text{结构}$$

或者，从上面翻译的观点看，成分为：

$$\text{表面语言} \xrightarrow[\text{翻译}]{} \text{表示语言}$$

在内涵逻辑中，所有这些"自由度"（degrees of freedom）都可以变化——因而出现了一整族"对应理论"。我们将在 1.3 考察一些例子，它们的重要性已经为人们所认识。在这里，让我们只考虑各种可能情形及其含义。

即使在模态命题逻辑范围里，已经有建议使用其他的一些可及关系用于克里普克类型关系语义学。［Jennings，et al. 1980］建议使用三元可及关系，采用下列必然概念：

$$\Box\phi \text{ 在 } x \text{ 处为真,如果 } \forall yz(Rxyz \to \phi(y) \vee \phi(z))$$

他们的目的是，除了其他以外，就是要为必然性的"非累加"性（non-cumulation）留出空间："聚合公理"（Aggregation Axiom）

$$\Box p \wedge \Box q \to \Box(p \wedge q)$$

不再有效。在这个新的解释下原先的对应会发生什么变化呢？原来的界线开始移动了；例如，$\Box p \to p$ 仍是一阶可定义的，但是$\Box p \to \Box\Box p$ 在这一语义下本质上

成为二阶的了。原来不是那么令人兴奋的原则的一些现象补偿了这一点。例如，（以前平凡有效的）聚合公理现在绽放出出人意料的花朵：

例 4　$\Box p \wedge \Box q \to \Box(p \wedge q)$ 定义

$$\forall xyz\ (\ Rxyz \to (y = z \vee Rxyy \vee Rxzz\ ))$$

证明："⇒"：假设在 x，y，z 上条件不成立。令①

$$V(p) = W - \{z\}, V(q) = W - \{y\}$$

这将验证在 x 上，$\Box p$，$\Box q$ 成立，而 $\Box(p \wedge q)$ 为假（根据 $Rxyz$）。

"⇐"：假设在 x 上 $\Box p$，$\Box q$ 成立，考虑 $Rxyz$。或者 $y = z$，因此 y 验证 p 和 q（根据 $Rxyy$ 和真值定义）；或者，$Rxyy$，它蕴涵着相同的结论；或者，$Rxzz$，此情形下，z 验证 p 与 q。因此，$\Box(p \wedge q)$ 在 x 上成立。■

至于构成这一主题的主干的一般定理，在这个三元语义中并无本质变化。

这个例子既改变了结构，也改变了真值定义的形式。一般未意识到的可能是，即使固定"语言"与"结构"这两个参数，仍会有变化。这里我们就暂时讨论一个枝节问题。

克里普克真值定义并非神圣不可改变——其他的条件本来相当容易想见。例如，我们可以得到如下情况。

观察 1　真值定义"$\Box\phi$ 在 x 处为真，如果 $\forall y\,((Rxy \vee Ryx) \to \phi(y))$"得到一个模态基础逻辑 **KB**；即极小逻辑 **K** 加上布劳维尔公理 $p \to \Box\Diamond p$。

证明：布劳维尔公理定义了可及关系的对称性；这一点可从将 $u = x$ 代入 Pu 看出。的确，**KB** 关于对称的克里普克框架是完全的。因此，**KB** 的任意非定理 ϕ 在某个对称框架 $\langle W, R\rangle$ 上为假。但是，在对称框架上 R 与关系 $\lambda xy.(Rxy \vee Ryx)$ 是一致的（即，R 与其逆 $\breve{R}$ 合二为一了）；因此根据这个新的定义 ϕ 也就不成立。

相反，如果在这个新的真值定义下 ϕ 有一个反模型 $\langle W, R\rangle$，那么它也会有一个通常的对称反模型 $\langle W, R \cup \breve{R}\rangle$；因此，它不在 **KB** 之中。■

因此，在真值定义和可及关系上的条件之间可能有一种交易。这个现象的确切范围仍有待于探索。例如，注意到下列真值定义

$$\Box\phi \text{ 在 } x \text{ 处为真，如果 } \forall y((Rxy \wedge Ryx) \to \phi(y))$$

是怎样同样好地得到 **KB**。

下面是这些例子背后的一般原则。

① 其中的第一个"－"原文误为"＝"——译者注。

事实 4 如果 $C(R)$ 是 R 上的任意条件，并且，$\gamma(x,y)$ 是 R，= 中的公式，使得：

(1) 如果 $C(R)$ 得到满足，那么 R 和 $\lambda xy.\gamma(x,y)$ 一致，

(2) $\lambda xy.\gamma(x,y)$ 满足 C，

那么由（满足）C（的克里普克框架）决定的模态逻辑也可由不带条件的真值定义

$$\Box\phi \text{ 在 } x \text{ 处为真，如果 } \forall y(\gamma(x,y) \to \phi(y))$$

产生。

本文并不将深入地讨论这一极具颠覆性的变化。它在这里仅提示我们，语义当中没有一个方面可免于修改。

模态逻辑领域之外，在其他许多适于从对应角度进行探讨的内涵逻辑中，到今天仅有一部分得到了研究。1.3 简要地回顾了一些重要的例子，即时态逻辑，条件句逻辑和直觉主义逻辑。按照递增的顺序，这些例子阐述了在许多情行下使对应理论变得更为困难的（经常也是更为令人兴奋的）难点所在。这些难点与可及关系上的“事前条件”（不是很严重）（pre-conditions）和“可容许指派”（严重得多）相关，它们将在恰当的时候得到解释。然而，像直觉主义对应理论将表明的，它也具有一些原来的模态逻辑对应理论缺乏的优美特征。

即使是一些未加证明的例子也会令上述评论更为具体。在时态逻辑中，对应在时序公理和时序性质（“以前”、“早于”）之间进行。

例 5 （“哈柏林公理”(Hamblin's Axiom)） $p \wedge Hp \to FHp$ 定义了时间的离散性：

$$\forall x \exists y > x \forall z < y(z = x \vee z < x)$$

在反事实条件句逻辑中，条件推理跟可及世界之间的对比相似序（the comparative similar ordering）C 的表现相关。

例 6 （“条件排中律的”斯托内克尔(Stalnaker)公理） $(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow \neg q)$ 定义了可及世界的线性序：

$$\forall xyz(y = z \vee Cxyz \vee Cxzy)$$

最后，在直觉主义逻辑中，（“中间（intermediate）”）公理在知识增长的进程的可能模式上加上了一些限制。

例 7 （“弱排中律”） $\neg p \vee \neg\neg p$ 定义了增长进程的“局部收敛性”，即，有向性(directedness)：

$$\forall xyz((x \subseteq y \wedge x \subseteq z) \to \exists u(y \subseteq u \wedge z \subseteq u))$$

证明及进一步的解释推迟到相关章节中。阅历丰富的读者眼下可能预测到了对任何对应理论都是难解的两个难题。

第一个问题是有关早先默认的限制到命题逻辑这一点：在谓词情况下会发生什么呢？在 1.2.5 我们将看到，似乎没有产生实质的问题——尽管这一领域大部分仍未探索。

一个更难对付的问题出现在内涵算子的真值定义的复杂性本身变为更高阶的时候。例如，在那种情况下，寻找内涵公理的可能的一阶等价式显得极无意义了。在以直觉主义逻辑的贝特（Beth）语义（即，$\phi \vee \psi$ 在 x 处为真，如果 ϕ-世界和 ψ-世界一起构成一道屏障，这一屏障与穿过 x 的每枝都相交）计算析取式的时候，也会出现这种难料之事。

然而，最新的成果在这里并未说及。哲学上看，让真值引进结构复杂性（在这种情况下是，枝的二阶行为）是一个相当令人不满意的语义工作。后者应定位在其所属的地方，即结构本身。的确，贝特语义容许有一个在节点和路径方面的二种类的一阶重述，这产生了通常的对应理论。

所有这些并不是说，对应观点的有益运用不会有局限。但是，这些局限是哲学方面的，而非技术上的不可能性。只要它们服务于阐述语义的目的，人们就应当研究对应——这将通过系统地联系一个概念结构与另一概念结构来解释前者。

1.2　模　态　词

本章将依靠模态模型论和模态代数的背景来审视模态对应理论，也会对这些背景的基本概念做解释（对于一些必需的背景知识，参考本卷中布珥（Bull）和塞格伯格（Segerberg）所写的那章）。

1.2.1　模态模型论

我们将介绍框架、模型和一般框架这些模态语义学中的基本概念。这些概念可从纯经典角度或者带有具体的模态目的来进行研究。两种情况中重点都不在于这些孤立的结构，而是它们的“范畴背景”：它们与其他结构的关系是什么？其中哪些关系又是保真的？因此，我们将介绍生成子框架、不相交并、p-态射像和超滤扩张这些模态保持运算。此外，还要用到重要的经典超积构造。所有这些概念都将不时地出现在以后的章节中。

语义结构　在克里普克真值定义中使用的结构是模型 $\mathfrak{M}$，即三元组 $\langle W, R, V\rangle$，其中 W 是一个非空的世界集，R 是 W 上的一个二元的可及关系，V 是一赋值，它为每一命题字母 p 指派世界集 $V(p)$。详细地说，这个概念就是，

$$\mathfrak{M} \models \phi[w]:\text{“}\phi\text{ 在 }\mathfrak{M}\text{ 中的 }w\text{ 上为真。”}$$

在我们的对应理论中，我们也希望看到本质：一个框架 F 是一个上述那样的但不带赋值的序对 $\langle W, R\rangle$。当然，所有这些本质上并不是关于“模态”的。框架不过是图论中的“有向图”。

在 1.2.3 和 1.2.4 中，还需要第三种模态结构概念——在某种意义上是位于模型与框架之间一个中介。一个一般框架是一个序对 $\langle F, \mathfrak{W}\rangle$，或者换句话说，一个三元组 $\langle W, R, \mathfrak{W}\rangle$，使得 $F = \langle W, R\rangle$ 为一框架，$\mathfrak{W}$ 是一个对补、并和模态投射运算封闭的、W 的子集的集合。形式地讲就是，

如果 $X \in \mathfrak{W}$，那么 $W - X \in \mathfrak{W}$

如果 $X, Y \in \mathfrak{W}$，那么 $X \cup Y \in \mathfrak{W}$

如果 $X \in \mathfrak{W}$，那么 $\pi(X) =_{def} \{w \in W \mid \exists v \in X: Rwv\} \in \mathfrak{W}$

下面的例子解释了带有限制的集合 $\mathfrak{W}$ 的作用。考虑框架 $\langle N, \leqslant\rangle$，其中 N 是自然数集。其模态理论包含了像 $\Box p \to p$，$\Box p \to \Box\Box p$ 和吉奇公理这样一些原则：它们一起形成了逻辑 **S4.3**。典型地，麦肯西公理 $\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$ 被排除在外；因为它可在某个 p 与 $\neg p$ 无穷交替出现的模型中为假：例如，取 $V(p) = \{2n \mid n \in N\}$。但是，现在考虑结构 $\langle N, \leqslant, \mathfrak{W}\rangle$，其中 $\mathfrak{W}$ 仅由 N 的所有有穷子集及所有余有穷子集组成。容易验证，$\mathfrak{W}$ 满足所有 3 个封闭条件。因此，我们在此就有一个一般框架。它的逻辑（当然）包含早先的那个；但它还增加了一些原则。特别是，麦肯西公理不再为假，因为现在不再容许上面“搬弄是非”的赋值。因此，**S4.1** 在这个一般框架中成立，尽管它在底下的“满框架”中不成立。并且通过更多地限制 $\mathfrak{W}$ 还可能进一步增加模态理论；例如，甚至有一个最严格的选择，即 $\mathfrak{W} = \{\varnothing, N\}$，它产生一个经典逻辑加公理 $\Box p \leftrightarrow p$ 这个逻辑——它甚至在前面那个一般框架上还不是有效的。因此，单个底下的框架仍可能产生一个模态逻辑层次系列。

1.2.3 将给出这个概念最初的代数动机（归功于 [Thomason. 1972]）。但在这里可以给出一个直接的逻辑理由。克里普克框架是被视为二阶 Π_1^1-句子的模态公式的所谓“标准模型”：谓词的全称量词取值于可能世界的所有集合。一个中间的可能就是也容许 [Henkin. 1950] 意义上的“一般模型”：其中，二阶值域被限制到（比如说）某个集合 $\mathfrak{W}$。通常，这样的值域在某个适当的可定义性条件下封闭——为了验证全称例示（或者“概括”）公理的合理形式。当然，这恰恰就是上面所出现的。这个概念的使用一部分在完全性理论当中，一部分在模态代数里面。它目前不是我们主要关心的。

语义问题 给定一个在某些结构中进行解释的形式语言，关于更“语言的”概念和更“结构的”概念之间的相互作用，出现了太多的问题。我们仅提及一

些重要的。

可以论证，任意一个模型论的“第一问题”都是关于语言不可分辨性（模态理论相等）和语义结构的结构不可分辨性（同构）之间的关系。语言之网和本体论之网偏离得有多远？在经典逻辑中，我们知道（一阶）初等等价与有穷结构上的同构一致，但上升到更高层面不再成立：此后同构是更细密的筛子。

现在，模型上的模态语言表现得像引论中的第一种翻译得到的一阶语言：没有特别的结果。不过在这方面，二阶概念显得更有意思（二阶理论的相等是相当强的：以构造性公理为模（modulo the Axiom of Constructibility），它甚至蕴涵所有可数框架同构；参考［Ajtai. 1979］）。我们从［van Benthem. 1985］——在 2.2.1 中论述了时态逻辑中类似的问题——摘出下列结论：

定理 1　由单点生成的（参考下面）有穷克里普克框架同构当且仅当它们拥有相同的模态理论。但是，可数克里普克框架$\mathbb{Z}\odot\mathbb{Z}$（用全部整数替换整数中的每一点所得的）和$\mathbb{Q}\odot\mathbb{Z}$（类似地处理有理数所得的）拥有相同的模态理论，但并不同构。

在时态逻辑中，后一结果意味着该形式语言不能区分局部离散/全局离散时间和局部稠密/全局稠密时间①（我们世界的情况很可能是后者）。在模态逻辑的背景下，不可能有像这样吸引人的解释，因此我们不再进一步讨论上面这个结果。

从现在开始，我们将仅限于一个主题，它刻画了模型论中所大量讨论的内容。

保真运算　在计算模态公式 ϕ 在世界 w 中的真值时，我们不得不考虑的仅是 w 本身，（可能）还有它的 R-后继，（可能）还有它们的 R-后继等。因此，可以说，所涉及的框架那部分仅是由 w“R-生成的”。一般地，人们不必看 w 的 R-封闭的范围之外部分；以下概念和结果总结了这一观察。

定义 1　$\mathfrak{M}_1$（$=\langle W_1, R_1, V_1\rangle$）是 $\mathfrak{M}_2$（$=\langle W_2, R_2, V_2\rangle$）的一个生成子模型（记为：$\mathfrak{M}_1 \subseteq_{\rightarrow} \mathfrak{M}_2$），如果

（1）$W_1\subseteq W_2$，

（2）$R_1=R_2$ 限制到 W_1，

（3）对于所有命题字母 p 有：$V_1(p)=V_2(p)\cap W_1$；即，$\mathfrak{M}_1$ 是 $\mathfrak{M}_2$ 通常的子模型并同时具有另外的特征：

（4）W_1 是 R_2-后继封闭的。

下面的结论就是［Segerberg. 1971］中著名的“生成定理”。

① 其中的“局部稠密”原文误为“局部离散”——译者注。

定理 2 如果 $\mathfrak{M}_1 \subseteq_{\rightarrow} \mathfrak{M}_2$，那么对于所有世界 $w \in \mathfrak{M}_1$ 和所有模态公式 ϕ 有：$\mathfrak{M}_1 \models \phi[w]$ 当且仅当 $\mathfrak{M}_2 \models \phi[w]$。

这是在单个模型中所发生的情形。当要比较不同模型中的赋值时，还需要一个外部的联系。

定义 2 称一个关系 C 是两个模型 $\mathfrak{M}_1$，$\mathfrak{M}_2$ 之间的 Z 字形联系，如果

（1）$\text{Domain}(C) = W_1$，$\text{range}(C) = W_2$，

（a）如果 Cwv 且 $w' \in W_1$ 并满足 R_1ww'，那么存在 $v' \in W_2$ 满足 $Cw'v'$ 且 R_2vv'

（向前选择）

（b）如果 Cwv 且 $v' \in W_2$ 并满足 R_2vv'，那么存在 $w' \in W_1$ 满足 $Cw'v'$ 且 R_1ww'

（向后选择）①

（2）如果 Cwv，那么 w，v 满足相同的命题字母。

从基本情况（2）开始②，向前向后条件确保了模态公式中连续的模态词的赋值在两边都会得到相同的结果。

定理 3 如果 $\mathfrak{M}_1$ 通过 C 和 $\mathfrak{M}_2$ 有 Z 字形联系，那么对于所有 $w \in W_1$，$v \in W_2$ 满足 Cwv 和所有模态公式 ϕ 有③：

$$\mathfrak{M}_1 \models \phi[w] \text{ 当且仅当 } \mathfrak{M}_2 \models \phi[v]$$

记法：模型 $\mathfrak{M}_1$ 和 $\mathfrak{M}_2$（通过某 C）Z 字形相连时，记为 $\mathfrak{M}_1 \precsim \mathfrak{M}_2$。

根据［van Benthem，1976］中的一个结果，生成定理和前面的“Z 字形定理”组合起来刻画了导论中的那种意义上的作为一阶公式的模态公式：

定理 4 带有 R，P，Q，…的语言中的一阶公式 $\phi(x)$ 逻辑等价于某个模态公式，当且仅当它（在上述的意义上）对于生成子模型和 Z 字形联系保持不变。

单纯考虑框架情况时，上面的概念和结果导致下列 3 个保持性结果：

定义 3 F_1 是 F_2 的一个生成子框架（$F_1 \subseteq_{\rightarrow} F_2$），如果

（1）$W_1 \subseteq W_2$，

（2）$R_1 = R_2$ 限制到 W_1，

---

① 其中的“$Cw'v'$”原文误为“Cww'”——译者注。

② 此处的“（2）”原文误为“（3）”——译者注。

③ 其中的“［v］”原文误为“［w］”——译者注。

（3） W_1 在 W_2 中是 R_2-封闭的。

在一般逻辑里，上述情形经常被说成是，“逆框架”〈W_2，$\breve{R}_2$〉是〈W_1，$\breve{R}_1$〉的一个末端扩张（end extension）：增加的世界都在“末端”。

从定理 2 我们推导出在生成子框架下的保持：

推论 1　如果 $F_1 \subseteq_{\rightarrow} F_2$，那么对于所有模态公式 ϕ，$F_2 \models \phi$ 蕴涵 $F_1 \models \phi$。

这里，“$F \models \phi$”的意思是“ϕ 在 F 中真”——这是在引论中的全局的二阶意义上：在所有世界上，在所有的赋值下。

但是，定理 2 也有一种“向上”方向的准则。

定义 4　一族框架 $F_i = \langle W_i, R_i \rangle$ 的不相交并 $\oplus\{F_i \mid i \in I\}$ 是各个论域 W_i 的不相交并，再加上明显的并列的关系 R_i。

另一个直接的运用就是不相交并下的保持：

推论 2　如果 $F_i \models \phi$（所有的 $i \in I$），那么对所有模态公式 ϕ 有 $\oplus\{F_i \mid i \in I\} \models \phi$。

接下来是定理 3，人们需要一种框架间的联系，并且这种联系能转换成基于它们之上的模型之间的一种合适的 Z 字形联系。

定义 5　一个从 F_1 到 F_2 的 Z 字形态射是一个函数：$W_1 \to W_2$，并且满足：

（1） $R_1 ww'$ 蕴涵 $R_2 f(w) f(w')$，

　　即，f 是一个通常的 R-同态；另外，它还有向后性质：

（2） 如果 $F_2 f(w) v$，那么，存在一个 $u \in W_1$ 满足：$R_1 wu$ 并且 $f(u) = v$。

这个概念在引论中提到了，是用的当今通用的名字“p-态射”，但该名字却不能提供多少信息。这里还有一个例子：

从节点到层（从顶端开始数起）的映射是一个从（带后裔关系的）无穷二元树到（带通常的序的）自然数上的一个 Z 字形态射。

也要注意，单射的（1-1）Z 字形态射甚至就是同构。

定理 3 现在就蕴涵着［Segerberg. 1971］中的“p-态射”定理。

推论 3　如果 f 是一个从 F_1 到 F_2 上的 Z 字形态射，那么，对所有模态公式 ϕ 有：$F_1 \models \phi$ 蕴涵 $F_2 \models \phi$。[①]

对于这些结果的更为“局部的”形式，请读者参考［van Benthem. 1983］。

① 其中的“F_2”原文误为“F_1”——译者注。

在1.2.4中会有更多的例子及推论1、2和3的运用。从下面的典型观察（D. C. 麦肯森（D. C. Makinson））可以很快得到一个印象。任意克里普克框架的模态理论或者是包含在经典模态逻辑（特征公理是$\Box p \leftrightarrow p$）中，或者是“荒谬的”逻辑（特征公理是$\Box(p \wedge \neg p)$）。因为，任意的框架F都或者含有无R-后继的终点，或者是延续框架（$\forall x \exists y Rxy$）。在前一种情况下，这样的终点本身形成了一个生成子框架，并且，根据推论1，这个框架的逻辑包含于这个子框架的逻辑——这是一个荒谬的逻辑。在后一种情况下，收缩到单个自返点是一个Z字形态射，并且根据推论3，这个框架的逻辑包含在这个自返点的逻辑里——这是经典逻辑。

在结束本小题前，我们注意到，对各种集合$\mathfrak{W}_1$，$\mathfrak{W}_2$采取适当的措施，容易对这三个概念做修改，以适合一般框架。这里是三个必要的条件：

在定义3中：增加“$\mathfrak{W}_1 = \{X \cap W_1 \mid X \in \mathfrak{W}_2\}$”

在定义4中：增加“新的$\mathfrak{W}_2$本质上仍是原先的$\mathfrak{W}_1$”（但是仍用不相交过程）

在定义5中：增加下列“连续性要求”，这让人回想起拓扑学来：

$$\text{“对于任意}\ X \in \mathfrak{W}_2, f^{-1}[X] \in \mathfrak{W}_1\text{”}$$

在1.2.3中的对偶理论中将需要这些。

命题与可能世界 模态语义另一个典型的特征是命题与可能世界集之间的相似；（在集合论抽象中上升一步）也是可能世界与极大的命题集之间的相似。许多哲学家的确宁愿否认这里存在有任何不同。就让我们来考察吧。

这里理想的设置是一般框架$\langle W, R, \mathfrak{W}\rangle$：取值范围显然与$W$上的“命题”的集合相同。

现在，如果把世界看做是命题集，那么，显然非常需要一些东西来支配世界w和与w相关联的命题X、Y之间的联系：

（1）$X \in w$或者$Y \in w$当且仅当$X \cup Y \in w$　　（“分析性”）

（2）$X \notin w$当且仅当$W - X \in w$　　（“决定性”）

相应地，人们仅考虑$\mathfrak{W}$的满足这两个条件的子集w。这些恰恰就是所谓的$\mathfrak{W}$上的超滤。

需要对可及关系加上什么要求呢？

同样，通常的想法是，如果世界v“满足w的所有模态偏见”，即每当$\Box\phi$在w真ϕ就在v为真，那么，v是w的R-可及的。相同的意思可以表达如下：每当ϕ在v是为真，$\Diamond\phi$就应当在w处为真。在当前的背景下，这就成了下面的规定：

$$Rwv \quad \text{如果对所有}\ X \in v\ \text{有}: \pi(X) \in w$$

在这个过程中，没有产生新的命题，因此前面的命题 X 现在作为集合 $\overline{X} = \{w \mid X \in w\}$ 重新出现。

这些考虑促成了

定义 6　一个一般框架 $G = \langle W, R, \mathfrak{W}\rangle$ 的*超滤扩张* $ue(G)$ 是一般框架 $\langle ue(W,\mathfrak{W}), ue(R,\mathfrak{W}), ue(\mathfrak{W})\rangle$，并满足：

(1) $ue(W,\mathfrak{W})$ 是 $\mathfrak{W}$ 上的所有超滤的集合；

(2) $ue(R,\mathfrak{W})\ wv$，如果每一个 $X \in \mathfrak{W}$ 都有：若 $X \in v$ 则 $\pi(X) \in w$；

(3) $ue(\mathfrak{W}) = \{\overline{X} \mid X \in \mathfrak{W}\}$。

可以这样说，这个构造所做的就是，在集合论表述的更高层次上重新制造 G，而且可以证明：

定理 5　G 和 $ue(G)$ 验证相同的模态公式。

但不是每一件事都保持一样：$\langle W, R\rangle$ 的世界模式与 $\langle ue(W,\mathfrak{W}), ue(R,\mathfrak{W})\rangle$ 的可能不同。首先，原来的每一个世界都产生一个超滤 $\{X \in W \mid w \in X\}$，因而，在 $ue(W,\mathfrak{W})$ 中产生一个相应的新世界。但是，除非 $\mathfrak{W}$ 满足适于世界的一定的分离原则，不同的旧世界可能都等同于单个新世界。（在早先的例子 $\langle N, \leqslant, \{\varnothing, N\}\rangle$ 中，仅一个新世界保留下来，而原来有无穷多个世界！）另一方面，这种构造可能也引入一些以前没有的世界。例如，在早先的一般框架 $\langle N, \leqslant$，（余）有穷集〉上，所有余有穷集形成了一个超滤，它在所得的超滤扩张里引出了一个“无穷点”。的确，容易看出这个超滤扩张是由 $\langle N, \leqslant\rangle$ 之后紧跟那个无穷点所组成。

在 1.2.3 中，给出了必要与充分条件来确保：一个一般框架在超滤扩张构造下是“稳定”的。不管怎样，它表明，这个过程在至多一步以后会稳定下来。现在，这些考虑可以应用到“满的”克里普克框架。

定义 7　一个框架 $F = \langle W, R\rangle$ 的*超滤扩张* $ue(F)$ 是框架 $\langle ue(W), ue(R)\rangle$，并满足：

(1) $ue(W)$ 是 W 上的所有超滤的集合，

(2) $ue(R)wv$，如果对每一个 $W \subseteq X$ 有：若 $X \in v$，则 $\pi(X) \in w$。

然而，这一次定理 5 不再成立。因为，它仅是说，一般框架〈W, R, W 的幂集〉的模态理论与据定义 6 所引出的一般框架的模态理论一致。现在，后者一般来说是满的框架 $\langle ue(W), ue(R)\rangle$ 的一个限制。因此，我们仅能得出对*超滤扩张反保持*的结论。

推论 4　对于所有模态公式 ϕ，如果 $ue(F) \models \phi$，那么 $F \models \phi$。

我们还是可通过将这种结构概念与前面的模型论的运算相联系，从而让这一概念更令人熟悉些。首先，上述的旧世界与新世界之间的联系这次是 1－1 的，并且，的确是同构的（考虑合适的单元素集）。

定理 6　F 同构地嵌入 $ue(F)$。

一般来说，它不能加强为“作为一个生成子框架嵌入”。但是，可以从[van Benthem. 1979A]得到它与早先的保持运算的另一个联系。

定理 7　$ue(F)$ 是某个初等等价于 F 的框架 F' 的 Z 字形态射像。

证明：把 F 膨胀到 $(F, X)_{X\subseteq W}$，然后根据通常的模型论，将它转变为一个恰当饱和的初等扩张。从后者可获得一个从世界到 F 上的超滤的典范函数。可以证明，它是一个 Z 字形态射。■

超积和可定义性　上面已经给出了一些关于框架的受模态启示而来的新概念。但是，原有的经典构造也还可以考虑。在各种可能性中，这里仅挑选出一个，即超积构造（对于许多其他的例子，参考[van Benthem. 1985，第 I. 2. 1 节]）。它的用处已经在引论中表明了。

本手册第 1 卷的高阶逻辑这一章已经给出了“超积”概念的基本理论（和启发）（也可参考[Chang & Keisler. 1973，4. 1 和 6. 1]）。我们回顾一些突出的特征和用途。

定义 8　对于任意克里普克框架族 $\{F_i \mid i\in I\}$ 和 I 上的一个超积 U，*超积* $\Pi_U F_i$ 是框架 $\langle W, R\rangle$，满足：

(1) W 是类 $f_\sim$ 的集合，其中函数 $f\in \Pi\{W_i \mid i\in I\}$，$f_\sim$ 是 f 在关系 $f\sim g \Leftrightarrow \{i\in I \mid f(i) = g(i)\}\in U$ 下的等价类。

(2) R 是满足下列条件的序对 $\langle f_\sim, g_\sim\rangle$ 的集合：$\{i\in I \mid R_i f(i)\ g(i)\}\in U$。

所定义的等价关系可以通过归纳提升为：

定理 8　（沃施（Łos'）等价）对于所有超积，所有一阶公式 $\phi(x_1, \cdots, x_n)$，

$$\Pi_U F_i \models \phi[f^1_\sim, \cdots, f^n_\sim]\ iff\ \{i\in I \mid F_i \models \phi[f^1(i), \cdots f^n(i)]\}\in U$$

因此，特别地，所有一阶句子 ϕ 在以下的意义上对超积保持[①]：

$$\text{如果 } F_i \models \phi (\text{所有 } i\in I)\text{，那么 } \Pi_U F_i \models \phi$$

反之，“凯斯乐（Keisler）定理”告诉我们，这也够用了。

① 其中的“Π_U”原文误为“Π_u”——译者注。

定理 9　一个克里普克框架类是初等的，当且仅当该类及其补类都对超积构造和同构像封闭。

证明：参考［Chang & Keisler. 1973，6.2］。■

可定义性的某种更自由的概念，即根据任意的一阶公式集，得到了所谓的 Δ-初等类。这里相关的刻画采用的是一种特别的超积。

定义 9　超幂 $\Pi_U F$ 是每一坐标 i 上都有相同的 F 的超积。

注意，根据沃施等价，$\Pi_U F$ 与 F 是初等等价的，即，这两个框架拥有相同的一阶理论。

定理 10　克里普克框架类是 Δ-初等的，当且仅当它对超积构造和同构像封闭，而它的补对超幂封闭。

下一节的模态对应理论将用到所有这些概念。在此衔接处，我们应当观察到，对于其他种类模态语义结构，运用上面的启发很容易定义模型的和一般框架的超积。但是，以后不会用到这些概念（参考［van Benthem. 1983］）。

上面的经典模型论的可定义性问题引出一个清晰的模态任务："刻画模态可定义的克里普克框架类。"1.2.4 将考察这个问题。

我们已经到达经典模型论和模态模型论相互交织的地方，而这就是模态对应理论的中心。

1.2.2　对应 I：从模态逻辑到经典逻辑

通过在引论中所给的翻译，模态公式可以视为定义了克里普克框架中可及关系上的限制。这些限制中有的是一阶可定义的，其他则不是。下面，首先给出这两种情形的例子，然后仔细研究前一类限制。利用超幂，也会给出它的一个数学刻画，并且，还会发展证明（及否证）这个类的成员资格的方法。这些方法的局限性也得到了确立。

一阶可定义性　这里将要考察的模态公式类的定义如下：

定义 10　**M1** 是由所有满足下列条件的模态公式 ϕ 组成：存在一个（R，= 中的）一阶句子 α 使得：

$$\text{对于所有克里普克框架 } F, F \models \phi \text{ 当且仅当 } F \models \alpha$$

在引论中已经出现了 **M1** 中的各种公式的例子。为了解释，见下列表 1-1。

表 1-1

模态公式	条件
$\Box p\to p$	$\forall xRxx$
$\Box p\to\Box\Box p$	$\forall xy(Rxy\to\forall z(Ryz\to Rxz))$
$\Diamond\Box p\to\Box\Diamond p$	$\forall xy(Rxy\to\forall z(Rxz\to\exists u(Ryu\wedge Rzu)))$
$\Box(p\vee q)\to\Box p\vee\Box q$	$\forall xy(Rxy\to\forall z(Rxz\to z=y))$
$\Box(\Box p\to q)\vee\Box(\Box q\to p)$	$\forall xy(Rxy\to\forall z(Rxz\to(Ryz\vee Rzy)))$
$p\to\Box p$	$\forall xy(Rxy\to y=x)$
$\Box\bot$	$\forall x\neg\exists yRxy$
$p\to\Diamond\Box p$	$\forall xy(Rxy\to Ryx)$

因为这些都相当容易建立，一些读者可能想试试更为复杂的例子。下面就是一个，它直接来源于引论中事实 2 的不完全性。

定理 11 公式$\Box p\to p$、$\Box\Diamond p\to\Diamond\Box p$ 和 $(\Diamond p\wedge\Box(p\to\Box p))\to p$ 的合取在 **M1** 中。

证明：我们将证明，该合取与经典公理$\Box p\leftrightarrow p$ 定义了相同的类，即$\forall xy(Rxy\to x=y)$。

证明需要几个步骤。

(1) $\Box p\to p$ 要求自返性，

(2) $\Diamond p\wedge\Box(p\to\Box p)\to p$ 说的是：

$\forall xy(Rxy\to\exists n\exists z_1,\cdots,\exists z_n(Rxz_1\wedge\cdots\wedge Rxz_n\wedge Ryz_1\wedge\cdots\wedge Rz_nx))$

换句话说，从 x 的任意 R-后继总是可以通过 x 的 R-后继的一个有穷链返回到 x。当链为空时，即刚好归到：Ryx。

这个（二阶！）等价式证明如下（I. L. 哈伯斯通（I. L. Humberstone））：

"⇒"：考虑满足 Rxy 的任意一点 y。令好的点是满足下列条件的 x 的 R-后继 z：通过 x 的后继的某个（可能为空的）有穷链从 y 可以到达 z。然后，令 $V(p)$ 为好的点的所有 R-后继的集合。这个指派得到了下列效果：

(1) p 在 y 处为真（根据自返性，y 是 y 的一个后继），并且，因而有$\Diamond p$ 在 x 处为真。

(2) 任意验证了 p 的 x 的 R-后继本身是一个好的点，因而，它的全部 R-后继都属于 $V(p)$。

这就得出$\Box(p\to\Box p)$在 x 处为真。因此，p 本身一定在 x 处为真：即，x 是

某个好的点的 R-后继，而这恰恰就是刚才所要证明的。

"⇐"：下面相关的链就证实了 p 在 x 处为真。

(3) 现在，确保了自返性和"安全返回"，我们可以发现在当前的背景下麦肯西公理所说的含义。

首先，注意到任意点 x 的所有 R-后继可以划分成多个同心贝纹区（concentric shells）$S_n(x)$，它是由满足下述条件的 x 的 R-后继 y 所组成：它通过（x 的后继之间的）n 个 R-箭号可以返回到 x，但少于 n 步则不能返回到 x。例如，$S_0(x)$ 仅由 x 自身组成，$S_1(x)$ 含有 x 的所有直接的 R-前驱。也注意到，如果 $y \in S_{n+1}(x)$，则它在 $S_n(x)$ 中必有某个 R-后继。

麦肯西公理让整个层级坍塌。令 $V(p) = \cup \{S_{2n}(x) \mid n = 0,1,2,\cdots\}$。那么，$\Box\Diamond p$ 在 x 处将为真，这从上述图中可以得到。因为，如果 Rxy，并且 $y \in S_n(x)$，那么或者 n 是偶数——因而（根据定义）p 在 y 处成立并且（根据自返性）$\Diamond p$ 也在 y 处为真，或者，n 为奇数——因而 y 在 $S_{n-1}(x)$ 中有一个 R-后继，该后继验证了 p：而这又会在 y 处验证 $\Diamond p$。

这就得出，$\Diamond\Box p$ 一定在 x 处真。因此，$\Box p$ 在 x 的某个 R-后继处成立。哪一个呢？在现在的情况下，这只可能是 x 本身。但是，这又意味着不会有 n 为奇数的区 $S_n(x)$。因此，仅有 $S_0(w): \forall y\ (Rxy \to y = x)$。

(4) (1) 和 (3) 结合起来就得到所要求的结论：这三个公理合起来蕴涵 $\forall xy\ (Rxy \leftrightarrow y = x)$，并且，显然它们都被该式所蕴涵。 ■

这个论证出人意料。这就清楚地说明：建立对应有创造性的一面。

全局可定义性和局部可定义性 最初，克里普克引入一个框架 $\langle W, R, w_0\rangle$，它有一个指定的"现实世界" w_0。从那个观点看，"局部"等价性的考察成为自然的：

$$F \models \phi[w], \text{当且仅当} \models \alpha[w]$$

其中，一阶公式 α 现在有了一个自由变元。读者可能已经注意到，前面对应性的证明经常也提供局部形式。例如，我们有

$F \models \Box p \to p\ [w]$ 当且仅当 $F \models Rxx\ [w]$

$F \models \Box p \to \Box\Box p\ [w]$ 当且仅当 $F \models \forall y(Rxy \to \forall z(Ryz \to Rxz))\ [w]$

ϕ 与 $\alpha(x)$ 局部对应蕴涵 ϕ 与 $\forall x\alpha(x)$ 全局对应，而反之则不成立；就这一点来说，局部概念更富含信息。的确，[van Benthem. 1976] 中就有一个例子，在 **M1** 中有一个公式，它根本无局部一阶等价式！另外，在有些情况下这种差别会消失——如在传递的克里普克框架上（W. 达兹尔比亚克（W. Dziobiak）；参考 [van Benthem. 1981A]）。

最后是一句提醒的话。局部有效性，如 $\Box p \to \Box\Box p$ 的局部有效性，仅是意

味着“局部传递性”，而没有更多的含义。框架

$$\langle N, \{\langle 0,n\rangle \mid n \in N\} \cup \{\langle n,n+1\rangle \mid n \in N\}\rangle$$

在0处是局部传递的，但并不是传递的。

一阶不可定义性　有一个复杂性阈限，在它之下不会出现二阶现象。

定理 12　所有不带嵌套模态算子的模态公式都在 **M1** 中。

证明：参考［van Benthem. 1978］：一个组合分类就足够了。■

例 8　洛伯公理$\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ 不在 **M1** 之中。

证明：只要建立下列断定即可：洛伯公理定义了传递性和可及关系的逆的良基性（即，不会有升序 $xRx_1Rx_2Rx_3\cdots$）。因为，根据一个众所周知的经典紧致性证明，后者的组合不可能是一阶可定义的（例如，注意到它在 $\langle N, >\rangle$ 中成立，但在它的非同构的超幂中不成立）。

首先，假设洛伯公理在 F 中不成立；即，对某个 V 和 w，

(1) $\langle F, V\rangle \models \Box(\Box p \to p)[w]$，但是

(2) $\langle F, V\rangle \not\models \Box p[w]$

并且，假定 R 是传递的：我们将通过构造一个无终点的上升世界序列 $wRw_1Rw_2\cdots$来否证 $\breve{R}$ 的良基性。

第一步：选择任意满足 Rww_1 的 w_1，其中（根据（2））p 在其上不成立。根据（1）$\Box p \to p$ 在 w_1 上为真，因此$\Box p$ 就在其上不成立。

第二步：选择任意满足 Rw_1w_2 的 w_2，其中 p 在其上不成立。根据（1）和传递性，$\Box p \to p$ 在 w_2 上为真，等等：一个无终点的序列就此可形成。

接下来，不满足这两个关系条件之一都会导致洛伯公理不成立。如果传递性不成立，比如说，Rwv，Rvu，$\neg Rwu$，那么 $V(p) = W - \{v, u\}$ 就在 w 上验证了$\Box(\Box p \to p)$，而$\Box p$ 在其上却为假。

如果不满足良基性，比如说 $wRw_1Rw_2\cdots$，那么 $V(p) = W - \{w, w_1, w_2, \cdots\}$ 也会得到相同的结果。■

不可定义性更复杂的证明将在以后讨论。

一阶可定义性和超积　如引论中所示，模态公式都可以被看成是 Π_1^1-句子。现在，对于后者，超积提供了一阶可定义性的标准：

定理 13　R，$=$ 中的一个 Π_1^1-句子是一阶可定义的当且仅当它对超积保持。

证明：“$\Rightarrow$”：这由沃施等价得到（参考 1.2.1）。

“$\Leftarrow$”：考虑这样一个典型的句子：

$$\forall P_1 \cdots \forall P_n \phi(P_1, \cdots, P_n, R, =) \quad (\phi \text{ 是一阶公式})$$

很清楚，它对同构保持（并且它的否定也是）。此外，它的否定（一个"Σ_1^1-句子"）对超积保持（一个容易的证明参考 [Chang & Keisler. 1973，4. 1]）。因此，给定关于该句子本身的假设，运用凯斯乐定理（9）。■

推论 5　一个模态公式在 **M1** 中当且仅当它对超积保持。

再一个运用就是，通过容许定义一阶条件的任意集合无法推广我们的主题。

推论 6　如果一个模态公式有一个 Δ-初等定义，那么它有一个初等定义。

证明：Δ-初等类是对超积封闭的。■

M1 的这一刻画是不明确的，因为它对于所有的 Π_1^1-句子都成立。稍后我们还将探索公式的特定模态特征，会做得更好。另外，这种刻画是相当抽象的，因为超积很不直观。因此，我们现在就转向更为具体的方法，以将 **M1** 内的公式同其外面的公式区分开。

M1 之外的公式：紧致性和骆文汉姆-斯科伦证明　实践当中，在紧致性和骆文汉姆-斯科伦定理不成立的地方常会出现非一阶可定义性。在洛伯公理的例子中涉及紧致性，现在给出涉及骆文汉姆-斯科伦定理的例子。

例 9　（麦肯西公理）$\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$ 在 **M1** 之外。

证明：考虑下面不可数的无穷框架 $F = \langle W, R \rangle$：

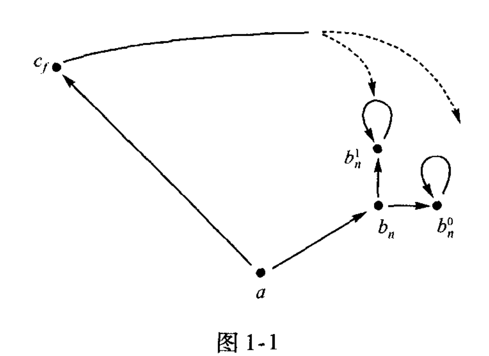


图 1-1

$$W = \{a\} \cup \{b_n, b_n^0, b_n^1 \mid n \in \mathfrak{N}\} \cup \{c_f \mid f: \mathfrak{N} \to \{0,1\}\}$$

$$R = \{\langle a, b_n \rangle, \langle b_n, b_n^0 \rangle, \langle b_n, b_n^1 \rangle, \langle b_n^0, b_n^0 \rangle, \langle b_n^1, b_n^1 \rangle \mid n \in \mathfrak{N}\} \cup \{\langle a, c_f \rangle \mid f: \mathfrak{N} \to \{0,1\}\} \cup \{\langle c_f, b_n^{f(n)} \rangle \mid n \in \mathfrak{N}, f: \mathfrak{N} \to \{0,1\}\}$$

我们注意到两件事情：

（1）$F \models \Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$

因为自返的末端 b_n^0，b_n^1，麦肯西公理在除了点 a 以外的任何地方显然都有效。

因此，假设在某个赋值 V 下，$\Box\Diamond p$ 在 a 处为真。根据假设，$\Diamond p$ 在每一个 b_n 处为真。因此，$\Diamond p$ 在 b_n^0 或 b_n^1 处为真。现在，选出一个函数 f：$\mathfrak{N}\to\{0,1\}$ 满足：$b_n^{f(n)}$ 是一个 p-世界（每个 $n\in\mathfrak{N}$）。所以，就有$\Box p$ 在 c_f 处成立，因此，$\Diamond\Box p$ 在 a 处成立。

根据向下的骆文汉姆-斯科伦定理，F 会有一个可数的初等子结构 F'，其论域（至少）含有 a，b_n，b_n^0，b_n^1（所有的 $n\in\mathfrak{N}$）。因为 F 是不可数的，许多世界（c_f）一定会在 W'中消失。选定其中的任意一个，比如说 c_{f_0}。首先，注意到 c_{1-f_0} 也不能在 W'中（因为，“补” c-世界的存在性是一阶可表达的；并且，在 F'的每一个世界中，F'与 F 验证相同的一阶公式）。现在，令

$$V(p)=\{b_n^{f_0(n)}\mid n\in\mathfrak{N}\}$$

将在 a 处验证$\Box\Diamond p$，而使得$\Diamond\Box p$ 为假。因此我们已经证明了下面的结论。

（2）$F'\not\models\Box\Diamond p\to\Diamond\Box p$

我们可以断定，麦肯西公理不是一阶可定义的——因为它不对初等子框架保持。 ■

实际当中，骆文汉姆-斯科伦定理或者紧致性定理失效是位于 **M1** 之外的一个可靠标志。读者根据著名的林斯特龙（Lindström）定理可能也会认为，理论中的情况同样如此（参考第 1 卷中霍基斯（Hodges）或者范本特姆和杜茨（Doets）的章节）。但是，有一个较少为人所意识的问题：林斯特龙定理对于带一固定有穷字母表的语言不起作用（参考 [van Benthem. 1976]）。在我们的 R，= 情况中，确实存在谓词逻辑的真扩张，它既满足骆文汉姆性又满足紧致性。然而，这些不是模态例子——并且就我们所知道的，完全可能存在这样的情况：一个模态公式 ϕ 属于 **M1** 当且仅当通过将 ϕ 加入到 R，= 中的一阶谓词逻辑作为一个命题常项而得到的逻辑有骆文汉姆性和紧致性。的确，直到现在，所有不可定义性的证明（包括上面的）总是可以归约到仅是紧致性的证明。

M1 最后的刻画 注意到下列关于克里普克框架的事实，它将 1.2.1 中的模态概念和经典概念联系起来。据此事实我们可以进一步推进推论 5。

引理 1 $\Pi_U F_i \subsetneq\!\!\to \Pi_U \oplus\{F_i\mid i\in I\}$。

因此，超积由合适的超幂的子框架生成。

再一个思想来源于前节：在 **M1** 之外，我们遇到了在初等等价下不保持，这是一个与凯斯乐-谢拉（Shelah）定理的超幂相联在一起的概念（参考 [Chang &

Keisler. 1973，第 6. 1 节］）。我们到达了［van Benthem. 1976］的主要结果。

定理 14　（i）一个模态公式在 **M1** 中当且仅当（ii）它对超幂保持当且仅当（iii）它对初等等价保持。

证明：（i）⇒（iii）⇒（ii）立即可得。（ii）⇒（i）：如果 ϕ 对超幂保持，那么根据引理 1，它也对超积保持——因为不相交并保持模态真（推论 2）。现在应用推论 5。 ■

这个见识又让我们避免了一些错误的推广。除了"Δ-初等"外，在可定义

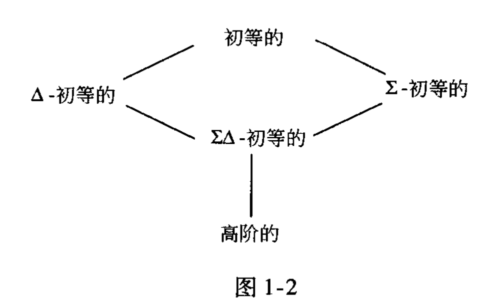


图 1-2

性层级上还有两个层次。一个 Σ-初等类由一阶句子的一无穷析取所定义（Δ-初等类由无穷合取所定义）。这种现象的主要例子是有穷性。ΣΔ-初等类产生于无穷合取的无穷析取，或者，反之亦成立（ΔΣ-初等类产生于无穷析取的无穷合取）：这两种情况（和所有要达到更"高"的那些情况）都退化了——并且，甚至在经典逻辑中层级在此处停止了。原因在于简单的观察：一个框架类是 ΣΔ-初等的当且仅当它对初等等价封闭。

但是，前面的结果有一个。

推论 7　模态公式或者是初等的，或者本质上是更高阶。

不幸的是，即使这个更好的刻画也不会得出关于 **M1** 成员的太多有效信息。因为，对超幂保持没有语法标准。从［van Benthem. 1983］，我们引述我们所知甚少的目录：

题外话

（1）在 R，= 中纯全称形式的 Π_1^1-句子

$$\forall P_1 \cdots \forall P_m \forall x_1 \cdots \forall x_n \phi \quad (\phi \text{ 无量词})$$

对超积保持。这告诉我们，$p \rightarrow \Box p$，即

$$\forall P \forall x(Px \rightarrow \forall y(Rxy \rightarrow Py))$$

一定在 **M1** 中：但是，如果没有这样的强有力工具的话，这一点也是清

楚的。

(2) 在 R, = 中全称-存在形式的 Π_1^1-句子

$$\forall P_1 \cdots \forall P_m \exists x_1 \cdots \exists x_n \phi \quad (\phi \text{ 无量词})$$

对超幂保持。这没有什么帮助，因为模态公式至少有一个全称一阶量词($\forall x$)。

(3) 更进一步所给的不会马上就可得：在 R, = 中任意 Π_1^1-句子逻辑等价于一个形如

$$\forall P_1 \cdots \forall P_m \forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y_1 \cdots \exists y_n \phi \quad (\phi \text{ 无量词})$$

的句子。因此，所有复杂性在这个层次都已经出现。

因此，为有效地描述 **M1** 将要发展其他方法。

代入方法 一阶可定义的模态公式的许多例子都有共同的语法模式：一定的前件和一定的后件组合在一起能让我们“读出”等值式。从更早的例子$\Box p \to p$，$\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$ 开始，人们可能连续注意到，合取和析取是容许的；只要在左边避免$\Box\Diamond$或$\Box$ ($\cdots \vee \cdots$)。

下面是源于［Sahlqvist. 1975］的一个典型例子：

定理 15 模态公式 $\phi \to \psi$ 在 **M1** 中，只要

(1) ϕ 是由 p，$\Box p$，$\Box\Box p$，…，$\bot$，$\top$，仅使用$\wedge$，$\vee$和$\Diamond$构造而成，而

(2) ψ 是由命题字母，$\bot$，$\top$，仅使用$\wedge$，$\vee$，$\Diamond$和$\Box$构造而成。①

这个定理解释了如下面这样的一些情况

$$\Diamond(p \wedge \Box q) \to \Box(p \vee \Diamond p \vee q)$$

它定义了

$$\forall xy(Rxy \to \forall z(Rxz \to (z = y \vee Rzy \vee Ryz)))$$

证明：引论中的启发在这里发挥了作用：对于前件的每个“极小的验证”，后件一定成立。对于进一步技术信息（如后件的单调性也是重要的），参考［van Benthem. 1976］，它还包含了这个定理的推广。 ■

$\Box\Diamond p$ 是致命性的，这一点为麦肯西公理所证明。法因（Fine）公理$\Diamond\Box(p \vee q) \to \Diamond(\Box p \vee \Box q)$做的与$\Box(\cdots \vee \cdots)$相同。最后，洛伯公理（以等价形式$\Diamond p \to \Diamond(p \wedge \Box\neg p)$）表明了在后件中“负的”部分有危险。因此，在某种意义上我们此处有一个“最好的结果”。

注意，所描述的类对模态公理来说相当典型，它常被假设为这种蕴涵式。的确，最典型的模态公理甚至简单地是

① 其中的“ψ”原文误为“ϕ”——译者注。

$$(\text{模态算子})p \to (\text{模态算子})p$$

这样的归约原则。

定理 16　一个模态归约原则在 **M1** 中当且仅当它是下列四种类型之一：

(1) $\vec{M}p \to \Box\cdots\Box\Diamond\cdots\Diamond p$,

(2) $\Diamond\cdots\Diamond\Box\cdots\Box p \to \vec{M}p$,

(3) $\Box\cdots$ (i 次) $\cdots\Box\vec{M}p \to \vec{N}\vec{M}p$　($\vec{N}$ 的长度为 i),

(4) $\vec{N}\vec{M}p \to \Diamond\cdots$ (i 次) $\cdots\Diamond\vec{M}p$　($\vec{N}$ 的长度为 i)。

证明：一个相当费劲的证明，参考 [van Benthem. 1976]。 ■

因此，至少已经对 **M1** 中重要的部分分类了。这个具体的定理完成了 [Fitch. 1973] 中开始的一个项目。

定理 15 的一般证明方法由在引论中介绍的代入方法组成。这里我们将仅解释它是如何起作用的：可以在 [van Benthem. 1983] 中找到一个理由。

例 10　把 $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$ 写成

$$\forall P \forall x(\exists y(Rxy \land \forall z(Ryz \to Pz)) \to \forall u(Rxu \to \exists v(Ruv \land Pv)))$$

再重写成等价的式子

$$\forall xy(Rxy \to \forall P(\forall z(Ryz \to Pz)) \to \forall u(Rxu \to \exists v(Ruv \land Pv))))$$

以 $\lambda z.Ryz$ 代入 P 得到

$$\forall xy(Rxy \to (\forall z(Ryz \to Ryz)) \to \forall u(Rxu \to \exists v(Ruv \land Ryv))))$$

这等值于

$$\forall xy(Rxy \to \forall u(Rxu \to \exists v(Ruv \land Ryv)))$$

即有向性（相汇性）。

将 $\Diamond(p \land \Box q) \to \Box(p \lor \Diamond p \lor q)$ 写成

$$\forall xy(Rxy \to \forall P((Py \land \forall z(Ryz \to Qz)) \to$$
$$\forall u(Rxu \to (Pu \lor \exists v(Ruv \land Pv) \lor Qu))))$$

以 $\lambda z.y = z$ 代入 P，以 $\lambda z.Ryz$ 代入 Q 来得到早先的连通性（的一个等值式）。

将 $\Diamond(p \land \Box q) \to p$ 写成

$$\forall xy(Rxy \to \forall P((Py \land \forall z(Ryz \to Pz)) \to Px))$$

以 $\lambda z.y = z \lor Ryz$ 代入 P 得到下列式的（等值式）

$$\forall xy(Rxy \to (Ryx \lor y = x))$$

将 $\Box\Box p \to \Box p$ 写成

$$\forall x \forall P(\forall y(Rxy \to \forall z(Ryz \to Pz)) \to \forall u(Rxu \to Pu))$$

以 $\lambda z.R^2xz$ 代入 P；即 $\lambda z.\exists v(Rxv \land Rvz)$，得到（模逻辑等值）

$$\forall x \forall u(Rxu \rightarrow \exists v(Rxv \wedge Rvu)$$

即可及关系的稠密性。

一般地，代入的将是形如 $R^n yz$ （$n=0, 1, 2, \cdots$） 的析取；0，1 情况分别代表 =，R。

尽管有这些优势，代入方法的范围也有其局限性。为看清这一点，这里是 **M1** 中一个具有相当不同精神的例子。

例 11 **K4.1** 公理，即$\Box p \rightarrow \Box\Box p$，$\Box\Diamond p \rightarrow \Diamond\Box p$ 的合取在 **M1** 中。

证明：$\Box p \rightarrow \Box\Box p$ 定义了传递性，因而，证明下列断言就足够了：

断言：在传递的克里普克框架上，麦肯西公理定义了原子性：

$$\forall x \exists y(Rxy \wedge \forall z(Ryz \rightarrow z = y))$$

从右到左的蕴涵是清楚的。然而，从左到右的证明较深奥。

假设 F 是一个传递框架，包含世界 $w \in W$ 使得

$$\forall y(Rwy \rightarrow \exists z(Ryz \wedge z \neq y))$$

使用选择公理的某种合适形式（它与这个问题一样严肃……），找到 w 的 R-后继的一个子集 X 使得

（1） $\forall y \in W$ $(Rwy \rightarrow \exists z \in X\ Ryz)$

（2） $\forall y \in W$ $(Rwy \rightarrow \exists z \in (W - X) Ryz)$

令 $V(P) = X$ 就使得麦肯西公理在 w 处为假。 ■

复杂性是不可避免的。例如，我们可以证明：

定理 17 $(\Box p \rightarrow \Box\Box p) \wedge (\Box\Diamond p \rightarrow \Diamond\Box p)$与它的一阶代入例示的任意合取都不等值。

证明：这里就是早先一般框架〈N，≤，有穷集和余有穷集〉登场的地方。首先看一个普通模型论中的

观察 2 自然数的有穷集和余有穷集恰好是那些在〈N，≤〉中可能使用参数的、一阶可定义的集合。

现在，在 1.2.1 中已经注意到，上面的公式在这个一般框架上成立——因而它的所有一阶代入例示也是如此。但是，后者也在满框架〈N，≤〉上成立。因此，如果我们的公式由它们定义的话，它也将在这个满框架上成立。而它在其上并不成立。 ■

因此，尽管代入方法在 **M1** 中划出了一个大而重要的部分，它却没有完全描述 **M1** 这个类。

M1 的复杂性 代入方法描述了 **M1** 的一部分，它可能甚至被证明是递归可枚举的（参考［van Benthem. 1983］）。但是，**M1** 超出了它的界限。的确，有理

由相信，**M1** 不是递归可枚举的——可能甚至都不是算术可定义的。因为，我们知道，对于 Π_1^1-句子的一般情形有：

定理 18　Π_1^1-句子的一阶可定义性不是一个算术概念。

证明：（参考［van Benthem. 1983］或者本手册第 1 卷的高阶逻辑那章）■

其他主题　这里我们不得不略去其他各种问题。至少，有一个例子应当提及，即相对对应。在几个地方，对传递的克里普克框架的一种限制会产生有兴趣的转变：全局的和局部的一阶可定义性退化，麦肯西公理成为初等的等。在［van Benthem. 1976］中有一个典型的结果。

定理 19　在传递的克里普克框架上，所有模态归约原则都是一阶可定义的。

因此，可及关系的“事前条件”值得考虑。在如时态逻辑这样的领域里，我们的时序直觉甚至要求有事前条件。

1.2.3　模态代数

所谓的“模态代数”为克里普克语义结构提供了一种替代。在模态代数里，模态语言也可以得到解释。模态代数领域有它自己的数学结构，子代数、直积和同态像是它的核心概念。现在，通过斯通表示可以在这两个领域之间建立向后-和-向前联系。上面这组三个概念和 1.2.1 的三个基本概念 Z 字形态射像、不相交并和生成子框架之间分别有一种范畴上的平行。此外，我们将会看到，早先的超滤扩张中的“可能世界构造”就是从斯通表示自然地产生的。

代数的观点　像逻辑的其他领域一样，也可以在代数结构里解释模态命题语言。这些做法采取的是一个布尔代数（为解释命题基础部分的需要）加上一个为刻画模态算子的一元运算这样一种形式。

定义 11　一个模态代数是一个序组

$$\mathfrak{A} = \langle A, 0, 1, +, ', * \rangle$$

其中 $\langle A, 0, 1, +, ' \rangle$ 是一个布尔代数，$*$ 是一个满足下面方程式的一元运算：

(1) $(x + y)^* = x^* + y^*$

(2) $0^* = 0$

注意，* 对应可能算子（◇）：选择必然算子应该产生方程式

(1)′ $(x \cdot y)^* = x^* \cdot y^*$

(2)′ $1^* = 1$

这种代数观点立即产生一个完全性结果。

定理 20 一个模态公式在极小模态逻辑 **K** 中可推导出来当且仅当它在所有模态代数中的所有指派下得到值 1。

这一背景下的赋值概念按照如下方式定义。令 V 给命题字母指派 A-值。然后通过下列递归条件可以将 V 上升到所有公式：

$$V(\neg\phi) = V(\phi)'$$
$$V(\phi\vee\psi) = V(\phi) + V(\psi)$$
$$V(\Diamond\phi) = V(\phi)^*$$
$$\cdots$$

因此，一个模态公式可以看成是在′，+，* 中的一个“多项式”。

完全性定理 20 的证明不费力气。首先，我们施归纳于证明的长度来证明，所有 **K**-定理都是“等于 1 的多项式”。反之，我们考虑模态语言的所谓的林登鲍姆代数（Lindenbaum Algebra），它的元素是 **K**-可证等值的模态公式的等价类，所带的运算是通过连结词而明显定义的。在此代数中，1 被给予了所有那些且仅是那些 **K**-定理：因此，非定理就不具有等于 1 的多项式资格。

这样使用代数对某些人来说，是件愉快的事（参考［Rasiowa & Sikorski. 1970］）；对另一些人来说，他们证明了，代数方式仅是“伪装的语法”。毕竟，上述结果可能被视为 **K** 的重新公理化，仅此而已。例如，注意到在通常的（亨金类型的）模型论完全性定理中，艰难的工作在于证明，非定理能够在集合论的（克里普克）模型中被拒斥。为使之成为一个口号，我们说

亨金 = 林登鲍姆 + 斯通

这个口号在本章结尾处会被完全理解。

然而，代数的观点有进一步的用处，不过这一点是逐渐被发现的。首先，注意到，它提供了一个比克里普克语义更为一般的框架。要让上面的林登鲍姆构造起作用，人们只需要等值置换原则；即模态上对下列规则封闭：

如果 $\vdash\phi\leftrightarrow\psi$，那么 $\vdash\Diamond\phi\leftrightarrow\Diamond\psi$

（从代数上来看，这就相当于恒等公理）

上面所增加的多个方程式表示了进一步的选择。

但是即使在上面模态代数的领域里，泛代数的整套概念和结果被证明也可以运用于模态逻辑，而且其运用方式令人惊讶。［Goldblatt. 1979；Blok. 1976］是两个很有启发性的参考文献。在这里我们将跳过表面，而只是取 1.2.4 中模态可定义性结果所需要的。这样我们将需要下面三个重要代数概念。

定义 12 $\mathfrak{A}_1$ 是 $\mathfrak{A}_2$ 的一个模态子代数，如果 $A_1\subseteq A_2$，并且 $\mathfrak{A}_2$ 的运算与 $\mathfrak{A}_1$ 在 A_1 上的运算是一致的。

定义 13　模态代数族 $\{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\}$ 的直积 $\Pi\ \{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\}$ 由卡氏积 $\Pi\ \{A_i \mid i \in I\}$ 上的所有函数组成，加上由坐标方式定义的运算：

$$f + g = (f(i) +_i g(i))_i, f^* = (f(i)_i^*)_i \cdots$$

定义 14　函数 f 是一个从 $\mathfrak{A}_1$ 到 $\mathfrak{A}_2$ 的同态，如果它遵守了所有运算：

$$f(a +_1 b) = f(a) +_2 f(b), f(a^{*1}) = f(a)^{*2}$$

这三个运算在代数当中是基本的，因为它们刻画了代数的方程式可定义性。这是“柏克霍夫定理”的内容：

一个代数类为（在所有指派下）某代数方程式集的有效式所定义当且仅当这个类对所有子代数、直积和同态像构造封闭（证明参考［Gräzer. 1968］)。当然还有更多内容与泛代数相关，但是我们接下来所需要的也就是这些了。

克里普克框架导出模态代数　为了汲取上面的资源，需要将早先的语义结构和模态代数系统地联系起来。

首先，每个克里普克框架 $F = \langle W, R\rangle$ 都产生一个下面的模态代数：

$$A(F) = \langle P(W), \varnothing, W, \cup, -, \pi\rangle$$

其中，π 是 1.2.1 中的模态投射：

$$\pi(X) = \{w \in W \mid \exists v \in X\ Rwv\} \quad (X \subseteq W)$$

关于模态公式的真，立即有：一个模态公式 ϕ 在 F 中为真当且仅当其对应模态方程式 $a(\phi)$ 在代数 $A(F)$ 中等于 1。例如，

$$\Diamond\Box(p \vee q) \to \Diamond(\Box p \vee \Box q)$$

的真，或者等值地

$$\neg\Diamond\neg\Diamond\neg(p \vee q) \vee \Diamond(\neg\Diamond\neg p \vee \neg\Diamond\neg q)$$

的真等价于下列方程式的有效性

$$(x + y)'^{*\prime*\prime} + (x'^{*\prime} + y'^{*\prime})^* = 1$$

因此，A 一对一地映射克里普克框架到模态代数。但是，框架之间特有的模态联系，如 1.2.1 中的，会发生什么呢？我们将逐个考察它们。

首先，如果 F_1 是 F_2 的一个生成子框架，那么，将 $X \subseteq W_2$ 映射到 $X \cap W_1$ 的这一显然的限制映射是一个从 $A(F_2)$ 到 $A(F_1)$ 上的模态同态（关键的观察是，W_1 的 R_2-封闭保证投射算子 π 遵守同态的要求）。接下来，根据不相交并 $\oplus\{F_i \mid i \in I\}$ 引出的代数自然地与直积 $\Pi\{A(F_i) \mid i \in I\}$ 同构。我们简单地将前者中的一个世界集 X 与函数 $(X \cap W_i)_{i \in I}$ 联系起来。

最后，现在可以预计到愉快的结尾。如果 F_2 是 F_1 通过 f 的一个 Z 字形态射像，那么，规定

$$A(f)(X) =_{\text{def}} f^{-1}[X]$$

在 $A(F_2)$ 及 $A(F_1)$ 的一个子代数之间定义了一个同构（这次，Z 字形态射定义中的两个关系条件确保 $A(f)$ 遵守投射）。注意，在后者情况下，方向是相反的：这是在“范畴联系”中常见的现象。

模态代数引出克里普克结构　有一条回头的路。反过来，模态代数也可以被表示，就像它们是从底下的基本框架中得到的。这一所谓斯通表示的思想可以表述如下（这归功于耀森（Jónsson）和塔斯基（Tarski）于 1950 年前后所做的工作）。

各个世界 w 可以构造出来使得代数中的元素 a 可以被看成是在“a 中”的 w 的集合。但是这样的话，代数运算和集合论运算之间所想要的对应就成了：

没有集合 w 在 0 中，所有集合 w 都在 1 中

w 在 $a+b$ 中，当且仅当 w 在 a 中或者 w 在 b 中

w 在 a' 中，当且仅当 w 不在 a 中

因此，当 w 搜遍 A 中“它所属的地方”时，它挑选出一个集合 X 使得：

$0 \notin X$,　　$1 \in X$,

$a+b \in X$　当且仅当　$a \in X$ 或者 $b \in X$

$a' \in X$　当且仅当　$a \notin X$

这样的集合 X 都叫做 $\mathfrak{A}$ 上的超滤。这样，令

$$W(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}\ \text{上的所有超滤}$$

通过如在 1.2.1 中相同的动机，可以找到一个合适的可及关系。

$$\langle w,v\rangle \in R(\mathfrak{A})\ \text{当且仅当对每个}\ a \in A, \text{如果}\ a \in v, \text{那么}\ a^* \in w。$$

因此，每个模态代数 $\mathfrak{A}$ 都引出一个克里普克框架

$$F(\mathfrak{A}) = \langle W(\mathfrak{A}), R(\mathfrak{A})\rangle$$

但是这一次，在 $\mathfrak{A}$ 中为真与在 $F(\mathfrak{A})$ 中为真不一定对应。因为 $F(\mathfrak{A})$ 可能含有比那些对应于这个代数的元素 a 更多的世界集——因此，它含有另外一些潜在的为假者。因此，蕴涵仅存在于一个方向。如果 $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$ 在 $F(\mathfrak{A})$ 中为真，则方程式 $t_1 = t_2$ 在 $\mathfrak{A}$ 中有效，这里多项式 t_1，t_2 对应于模态公式 ϕ_1，ϕ_2。一个完全的等价只有通过改变 $F(\mathfrak{A})$ 为一般框架

$$F(\mathfrak{A}) = \langle W(\mathfrak{A}), R(\mathfrak{A}), \mathfrak{W}(\mathfrak{A})\rangle$$

其中 $\mathfrak{W}(\mathfrak{A})$ 由所有形如

$$\{w \in W(\mathfrak{A}) \mid a \in w\} \quad (a \in A)$$

的集合组成。

因此，我们现在得到了模态代数和一般框架之间的一种双向联系——后一个概念起源于此。双向是因为，容易看到，仅仅替代“满”框架，前面所有关于映射 A 的见解同样恰当地运用于一般框架。

再看看当三种重要代数运算通过 F 翻译成克里普克语义术语时会发生些什么，我们就可估计到当前这一联系的好处。

首先，如果 $\mathfrak{A}_1$ 是 $\mathfrak{A}_2$ 的一个模态子代数，那么，将 $\mathfrak{A}_2$ 上的超滤 w 映射到 $\mathfrak{A}_1$ 上的超滤 $w \cap A_1$ 的这一显然的限制映射是一个从 $F(\mathfrak{A}_2)$ 到 $F(\mathfrak{A}_1)$ 上的 Z 字形态射。

接下来，族 $\{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\}$ 的直积有一个包含了不相交并 $\oplus\{F(\mathfrak{A}_i) \mid i \in I\}$ 的 F-像。然而，不一定会获得同构：这是我们对应理论中的一点小瑕疵。

但是最后，如果 $\mathfrak{A}_2$ 是 $\mathfrak{A}_1$ 通过 f 的同态像，那么，由

$$F(f)(w) =_{\text{def}} f^{-1}[w]$$

定义的映射 $F(f)$ 以如下方式将 $\mathfrak{A}_2$-超滤映射到 $\mathfrak{A}_1$-超滤：它将 $F(\mathfrak{A}_2)$ 同构嵌入为 $F(\mathfrak{A}_1)$ 的一个生成子框架。

向后和向前　到目前为止，一直都还不错。模态代数引出一般框架，并且，这些接着又引出模态代数。但是，在回来的路上会发生什么呢？

一种情况是简单的，通过构造

定理 21　$A(F(\mathfrak{A}))$ 与 $\mathfrak{A}$ 同构。

反方向更为困难。对于一般框架 G，$F(A(G))$ 不一定同构于 G。① 这恰恰是在 1.2.1 与“可能世界的构造”相关联中我们所注意到的。但是，正如我们在那里宣告的一样，一般框架上的哪些条件保证这样一种同构是可以探查得到的。

定义 15　一个一般框架 $G = \langle W, R, \mathfrak{W} \rangle$ 是描述的，如果它满足等同的莱布尼茨原则（Leibniz' Principle）：

(1)　$\forall xy \in W\ (x = y \leftrightarrow \forall Z \in \mathfrak{W}\ (x \in Z \leftrightarrow y \in Z))$

和可及关系的莱布尼茨原则：

(2)　$\forall xy \in W\ (Rxy \leftrightarrow \forall Z \in \mathfrak{W}\ (y \in Z \rightarrow x \in \pi\ (Z)))$

此外，它应当满足饱和：

(3)　$\mathfrak{W}$ 的每个具有有穷交性质的子集有一个非空的全交

下面的基本结果在［Goldblatt. 1979］中。

定理 22　$F(A(G))$ 与 G 同构当且仅当 G 是描述的。

描述框架的标准例子来自于模态完全性证明中的亨金模型的一般框架，取模态可定义的世界集的范围为 $\mathfrak{W}$。我们也注意到，本身具有形式 $F(\mathfrak{A})$ 的一般框架总是描述的。因此，为了某种理论的目的，可以说，模态代数和描述框架之间有

① 此处的“G”原文误为“F”——译者注。

“适当”的双射对应，它在1.2.1中所描述的可能世界构造下是“稳定的”。

范畴联系　模态代数与克里普克结构之间的上述联系比初看起来更深一些。这两个数学世界或“范畴”的一般图画证明，在结构上它们是相当相似：

〈模态代数,同态射入〉

〈一般框架,Z字形态射射入〉

图1-3两个模式总结了更早时候的考察：

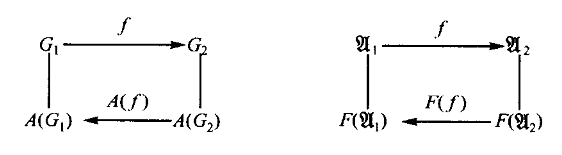


图1-3

因此，A，F就是范畴理论家喜欢叫做的“反转”函子。因此，关于一个范畴的信息有时可以迁移到另一个范畴上。因此，就出现了一个“范畴迁移”。我们提及一些关于它的现象（不熟悉范畴论或泛代数的读者可以跳过下面一段）。

模态代数的范畴在它的内部极限构造（internal limit constructions）中有*末端构造*（即，退化的单点代数）和*后推*（pull-back）。因此，它在*有穷极限*下封闭。通过A，F，我们可以推出，一般框架的范畴对*有穷余极限*封闭，特别是对*初始*（允许空的框架）和*推出*（push-outs）封闭。模态公式在这些极限构造下的保持行为还有待研究。

一个代数上有很好根据的概念是*自由代数*概念。在一般框架中与之对应的是什么呢？和模态完全性理论的一种惊人联系出现了。自由代数的斯通表示本质上是*亨金一般框架*（命题字母对应这个代数的自由生成元）。[Fine. 1975] 根据和Z字形态射相关的某种“泛嵌入”（universal embedding）性质，从语义上地刻画了后一结构。后者作为自由代数的“同态扩张”定义的对偶，可直接得到。

我们最后的例子是关于另一个代数杰作，*次直不可归约*的模态代数概念（在[Blok. 1976] 中有大量使用）。这些代数被证明是差不多（而不是完全）对应于有根的一般框架，其中一般框架的论域是由一个根世界和它的后继们、它们的后继们等组成。著名的柏克霍夫定理所说的

每个(模态)代数都是次直不可归约代数的次直积

可以和简单的克里普克语义观察。

每一个一般框架都是它的有根的生成子框架的不相交并的Z字形态射像

进行比较。这些例子清楚地表明，模态代数和可能世界语义学之间的范畴联系是怎样可能成为一个有益的视角。

1.2.4　从经典逻辑到模态逻辑

调转早先对应研究的方向（1.2.2），会出现

定义 16　P1 是 R，$=$ 语言中的所有下述一阶句子的集合：存在一个模态公式使得它和该一阶句子定义了相同的克里普克框架。

早先 **M1** 中作为例子的公式当然也为 **P1** 提供了一些例子。因此，这里直接就有一些更为一般的结果。

定理 23　每个形如 $\forall xU\phi$ 的一阶句子都属于 **P1**，其中 U 是一个（可能为空的）具有形式

$$\forall u(Ruv \to \qquad\qquad (\text{其中 } u,v \text{ 不相同})$$

的受限全称量词序列，它后面为一个由原子公式 $u=v$、Ruv 通过 $\wedge$、$\vee$ 连结起来的矩阵 ϕ。

证明：相关的组合证明基于在导论中所解释的启发。参考 [van Benthem. 1976]。 ■

这种类型的公式的一些例子有：

自返性：$\forall xRxx$，

传递性：$\forall x\forall y(Rxy\to\forall z(Ryz\to Rxz))$

连通性：$\forall x\forall y(Rxy\to\forall z(Rxz\to(Rzy\vee Ryz)))$

和

通过保持行为的反例来否证可定义性。

例 12

(1)　$\exists xRxx$ 位于 **P1** 之外。

它在 $\langle\{0,1\},\{\langle 1,1\rangle\}\rangle$ 中成立；但在它的生成子框架 $\langle\{0\},\varnothing\rangle$ 中不成立。

(2)　$\forall x\forall yRxy$ 位于 **P1** 之外。

它对生成子框架保持，但不对不相交并保持。在 $\langle\{0\},\{\langle 0,0\rangle\}\rangle$ 和 $\langle\{1\},\{\langle 1,1\rangle\}\rangle$ 上，关系是全通的，但是，在 $\langle\{0,1\},\{\langle 0,0\rangle,\langle 1,1\rangle\}\rangle$ 上不是。

(3)　$\forall x\neg Rxx$ 位于 **P1** 之外。

它对生成子框架和不相交并都保持；但是，不对 Z 字形态射保持，见引论。

(4)　$\forall x\exists y(Rxy\wedge Ryy)$ 位于 **P1** 之外。

它对到目前为止的所有三种运算都保持，但是不对超滤扩张逆向保持。可以证明：它在 $ue(\langle N,<\rangle)$ 中成立，而在 $\langle N,<\rangle$ 中不成立。

一个重要的一般结论在此出场［Goldblatt & Thomason. 1974］：

定理 24 一个初等的克里普克框架类是模态可定义的当且仅当它对生成子框架、不相交并和 Z 字形态射封闭，而它的补对超滤扩张封闭。

证明：既然它是代数结果在模态语义中的最漂亮的运用之一，我们就在此给出启发式的证明概要。

显然，模态可定义的克里普克框架类具有所有列出的封闭现象：令人惊讶的方向是从“封闭”到“可定义性”。

首先，注意到根据早先的一个结果，可以“免费地”增加一个封闭条件。定理 7 蕴涵着，框架类 $\mathscr{R}$ 本身对超滤扩张封闭：如果 $F \in \mathscr{R}$，那么相关的初等等价 $F' \in \mathscr{R}$（$\mathscr{R}$ 是初等的），并且因而它的 Z 字形态射像 $ue(F)$ 也在其中。

现在，明显的策略是证明，$\mathscr{R}$ 等于 $MOD(Th_{mod}(\mathscr{R}))$，即验证了每个在 $\mathscr{R}$ 中都有效的模态公式的克里普克框架的类。这里，不平凡的包含要求我们证明：

$$\text{如果 } F^* \models Th_{mod}(\mathscr{R}) \text{，那么对于每个 } F^*, F^* \in \mathscr{R}$$

此处，进入到模态代数领域将有帮助。F^* 验证了 $Th_{mod}(\mathscr{R})$，因此，$A(F^*)$ 验证了类 $\{A(G) \mid G \in \mathscr{R}\}$ 的等式理论（回忆早先在模态公式和多项式之间的对应）。根据柏克霍夫定理的一个适当的形式，这就蕴涵了 $A(F^*)$ 一定是某个直积 $\Pi\{A(G_i) \mid i \in I\}$（其中 $G_i \in \mathscr{R}$）的某个子代数的同态像。图示为：

$$A(F^*) \xleftarrow{\text{满射的同态}} \mathfrak{A} \subseteq \Pi\{A(G_i) \mid i \in I\}$$

现在根据早先的对偶，后一个代数与 $A(\bigoplus\{G_i \mid i \in I\})$ 同构。另外，后面的不相交并属于 $\mathscr{R}$——根据所给的封闭条件。因此，这幅图成了，对于某个 $G \in R$：
满射的同态

$$A(F^*) \longleftarrow \mathfrak{A} \subseteq A(G)$$

现在，变换 F 将此变为对应箭头：

$$FA(F^*) \xrightarrow{\text{作为生成子框架嵌入}} F(\mathfrak{A}) \xleftarrow{\text{满射的 Z 字形态射}} FA(G)$$

但是这样的话，最终下面这样穿行于图就足够得到所需的证明。$G \in \mathscr{R} \Rightarrow FA(G) = ue(G) \in \mathscr{R}$（根据上面的观察）$\Rightarrow F(\mathfrak{A}) \in \mathscr{R}$（对 Z 字形态射像封闭）$\Rightarrow FA(F^*) \in \mathscr{R}$（对生成子框架封闭）$\Rightarrow F^* \in \mathscr{R}$（对超滤扩张“反封闭”）。■

实际上这个结果还没有刻画 **P1**，因为它是用任意集合，无论是有穷的或是无穷集，来谈论模态可定义性。然而，为集中注意力于 **P1** 所需要的额外力气几乎没有任何启发性。

这个结果还有一丁点其他信息。增加超滤扩张下的闭包而去掉初等可定义性

条件，会得到这样一类克里普克框架的刻画，这类框架根据在引论中的意义上是一种典范模态逻辑（即，它对于它的亨金框架是完全的）可定义的。此外，上面的证明启发也可以用来构造仅根据任意模态公式集的可定义性的克里普克框架上的一般封闭条件（“SA-构造”；参考［Goldblatt & Thomason. 1974］）。

关于早先的 **M1** 的超幂刻画，上面的刻画没有给出涉及 **P1** 中公式的有效信息。所需要的是给出所给四种封闭条件的语法效应的“保持定理”。［van Benthem. 1976］给出了其中的一些，推广了早先的如菲弗曼（Feferman）和克莱塞尔（Kreisel）的结果。

这里是一个想法。对生成子框架保持仅容许这样的公式：从原子公式及其否定利用

$\forall$，$\wedge$，$\vee$ 和受限存在量词 $\exists v(Ruv \wedge$ （u,v 不相同）

构造所得。对不相交并保持只容许前方有单个全称量词：所有其他的都被限制为 $\forall v$（$Ruv\to$）形式。最后，对 Z 字形态射保持禁止否定，我们剩有

定理 25 一个一阶句子对生成子框架、不相交并和 Z 字形态射像保持当且仅当它与一个形如 $\forall x\alpha(x)$ 的公式等值，其中 $\alpha(x)$ 是由原子公式只使用合取、析取和受限量词构造出来的。

证明： 根据初等链构造，如［Chang & Keisler. 1973，第 3.1 节］。 ■

对于对超滤扩张保持，仅发现了些部分结果（毕竟，对这样一种复杂运算保持的句子类甚至无需是能行可枚举的）。

关于 **P1** 的整个复杂性，这也是很值得考虑的——如 **M1** 的情况。这两类在彼此之中也许是递归的？

1.2.5 模态谓词逻辑

就像这一领域中很多技术工作一样，模态命题逻辑到现在还一直在研究。然而，模态谓词逻辑，虽然在哲学运用上是重要的，人们对它的了解却少得多（参考本手册 1.2.5①）。然而，在对应理论中，可以在下面的定理 26 中找到这一忽视的理由。

这一艺术的未完成状态已经在下面的事实中表现出来：不存在被一般接受的语义结构概念或者说真值定义。因此，我们选定一个具体的、有相当根据的选择，作为下面概述前述理论的一个谓词逻辑变异的基础。

① 作者在此指 J. Garson 写的 Quantification in Model Logic //D. Gabbay，F. Guenthner. Handbook of philosophical Logic. 2nd. Vol Ⅲ. Kluwer Academic Publisher，2001. 267 ~ 323——译者注。

语言是通常的谓词逻辑语言再加上模态算子。结构是

$$\mathfrak{M} = \langle W, R, D, V \rangle$$

其中主干 $\langle W, R, D \rangle$ 是一个带域函数 D 的克里普克框架，D 为每个世界 $w \in D$ 指派个体集 D_w。赋值 V 在每个世界里为非逻辑符号提供解释。

真值定义阐述了概念

"$\phi(x)$ 在 $\mathfrak{M}$ 中的 w 上对 d 为真"

其中，指派给自由个体变元 x 的序列 d 取值于 D_w。关键的选择体现在个体量词上的条件：这些量词在 D_w 中取值，加上模态算子的条件：

$\Box\phi(x)$ 在 x 上对 d 为真，如果对 w 的每个 R- 可及的 ν 使得：d 在 D_ν 中，$\phi(x)$ 在 ν 中对 d 为真。

因此，必然意味着"可及的定义了的地方为真"。

如以前一样，在主干里（在某个世界、对某个个体序列）为真指的是在所有可能的赋值下为真。在这种方式下模态公理开始表达 R，D 的性质——以及它们的相互作用。

在经典逻辑方面，相关的对应"工作语言"现在将是一种二种类的语言：一类表示世界，另一类表示个体。它的基本谓词是这两种类身份：世界之间的 R，以及穿越种类的 Exw："x 在 w 的域中"，或者"x 存在于 w 中"。

例 13 巴坎公式 $\forall x\Box Ax \to \Box\forall xAx$ 定义了

$$\forall w\nu(Rw\nu \to \forall x(Ex\nu \to Exw))$$

证明："$\Leftarrow$"：假设 $\forall x\Box Ax$ 在 w 成立，并且考虑任意一个 R-可及的 ν。对于所有 $d \in D_\nu$，$d \in D_w$（根据所给定的条件），因而有 $\Box Ad$ 在 w 成立——因此，Ad 在 ν 成立。

"$\Rightarrow$"：巴坎公式在下面特定的指派下成立：$V_u(A,d) = 1$，如果 Rwu 并且 $d \in D_w$。

这个 V 验证了前件，且由此也验证了后件。关系条件由此得到。 ■

因此，巴坎公式表达了 R 和 D 之间的一种相互作用。这不是偶然的。对于纯的 R-原则，我们有下列保守的结果。

定理 26 存在一个从模态谓词逻辑句子 ϕ 到模态命题逻辑公式 $p(\phi)$ 的能行翻译，使得：如果 ϕ 与某个纯的 R, $=$-句子 α 等值，那么 $p(\phi)$ 在 1.2.2 的意义上已经定义了 α。

证明：p 只是以某种合适的方式消去了量词。（此处和其他地方的）全部细节参考 [van Benthem. 1983]。 ■

除了巴坎公式之外，还有三个重要的"从物/从言（de re/de dicto）交换"。

其中之一提供了一个非一阶可定义的新例子。

例 14

(1) $\Box\forall xAx\rightarrow\forall x\Box Ax$ 是普遍有效的

(2) $\exists x\Box Ax\rightarrow\Box\exists xAx$ 定义了 $\forall wv$ $(Rwv\rightarrow\forall x(Exw\rightarrow Exv))$

(3) $\Box\exists xAx\rightarrow\exists x\Box Ax$ 定义了 R，$=$，E 上的一个本质上高阶的条件

尽管与 1.2.2 的麦肯西公理表面相像，后者的证明与例 9 是相当不同的。有兴趣的读者可能注意到，上面的原则在有重叠的双元素后继的有穷链的世界中都成立：

$$\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\cdots,\{n-1,n\},\{n,n+1\}$$

但是，它可能在这样的无穷链上不成立，因而，紧致性潜藏起来了。

进一步系统地思考上面"正的"结果再次产生了一种代入方法，得到像定理 48 那样的结果。

定理 27　满足下列条件的形如 $\phi\rightarrow\psi$ 的公式都是一阶可定义的：ϕ 由带有（可能为空的）$\forall$、$\Box$序列作为前缀的原子公式，仅使用 $\wedge$、$\vee$、$\exists$ 和 $\Diamond$ 构造而成，ψ 由原子公式仅使用 $\wedge$、$\vee$、$\exists$、$\Diamond$、$\forall$ 和 $\Box$ 构造而成。

在这一领域中，一阶可定义性的全局数学刻画本质上是一样的，因而此处略去。

然而，不容易推广的是 1.2.3 的代数方法。这是经典（和直觉主义）逻辑中的特有缺陷：漂亮的代数化在谓词逻辑的大门前止步了。当然，那可能是"模态柱状代数"的领域（参考 [Henkin, et al. 1971]），但是还没有任何东西存在（关于一个有意思的相关领域，参考模态命题代数扩张到动态逻辑学家的模态程序代数（参考 [Kozen. 1979] 或者本手册的第 5 卷里动态逻辑一章））。结果，我们还是缺少一种对当前二种类的一阶语言的模态可定义片断的漂亮刻画。

然而，我们确实刻画了那个相同的语言，对于模态谓词逻辑的谓词常项 $A(-)$，它含有带参数的谓词常项 $A(w,-)$。因此，这是上面真值定义的一阶形式的合适语言。例如，巴坎公式成了

$$\forall x(Exw\rightarrow\forall v((Ewv\wedge Exv)\rightarrow Avx))$$
$$\rightarrow\forall v(Rwv\rightarrow\forall x(Exv\rightarrow Avx))$$

如定理 4，两种特有的模态关系足以刻画这个语言的所有公式的类的模态版本。这里给出相关的结果，以便在一种乐观的音符中结束。

首先，模态谓词逻辑知道生成子模型，正如 1.2.1 里的情形一样。另外，早先的 Z 字形关系可以扩充以使得整合个体的向后-和-向前选择，就像一阶可定义性的埃伦芬赫特-弗雷斯（Ehrenfeucht-Fraïssé）方法一样。

定义 17 两个模型 $\mathbf{M}_1$，$\mathbf{M}_2$ 之间的一个 Z 字形联系 C 将相等长度的有穷序列（w，x）（w 是一个世界，x 是 w 的论域中的个体序列）联系起来，使得：

（1）所有这些序列这样出现：那些取自 $\mathbf{M}_1$ 的在 C 的自变元域中，那些取自 $\mathbf{M}_2$ 的在 C 的值域中。

（2）如果 $C(w,x)(\nu,y)$，$w'\in W_1$，并且 R_1ww'，$x\in D_w$，那么存在 $\nu'\in W_2$，满足：$R_2\nu\nu'$，$y\in D_{\nu'}$，并且 $C(w',x)(\nu',y)$。并且，类似地有相反方向

（"世界 Z 字形"）

（3）如果 $C(w,x)(\nu,y)$ 并且 $d\in D_w$，那么，存在 $e\in D_\nu$，满足 $C(w,x\frown d)(\nu,y\frown e)$。并且，反之亦然。（"个体 Z 字形"）

（4）如果 $C(w,x)(\nu,y)$，那么映射：$(x)_i\rightarrow(y)_i$ 是 $\langle D_w, V_w\rangle$ 和 $\langle D_\nu, V_\nu\rangle$ 之间的一个部分同构。

现在，模态公式的转录对生成子模型和 Z 字形联系在显然的意义上不变。例如，后者以下述方式变得更为准确：对模态公式 ϕ，

如果 $C(w,x)(\nu,y)$，那么，ϕ 在 w 中对 x 为真，当且仅当 ϕ 在 ν 中对 y 为真。

定理 28 一个世界/个体的二种类语言公式 $\phi=\phi(w,x)$ 是（等值于）一个模态公式当且仅当它对生成子模型和 Z 字形联系不变。

证明： 它由［van Benthem. 1981B］中的主要证明可得。■

总的来说，在模态谓词逻辑中令人兴奋的技术结果还很少——而对应理论也不例外。

1.2.6 高阶对应

在所有情况下，模态公式定义的是可及关系上的二阶（Π_1^1）条件，在一些情况下则定义了一阶条件。根据抽象模型理论，这里出现了两种可能的推广。

不用一阶目标语言，我们可以考虑一种合适的扩充。例如，在定理 11 中，相关的关系条件是在 $L_{\omega_1\omega}$ 中定义的：带有可数的合取和析取的一阶逻辑。然而，不是所有的模态公式在这里都是可定义的。例如：洛伯公理定义了一种良基性，而已经知道，它超出了 $L_{\omega_1\omega}$，甚至 $L_{\infty\omega}$ 族的任意语言。另一方面，这次定义条件已经是在"弱的二阶逻辑" L^2 中，它允许对个体的有穷集进行量化。因此，除了 Π_1^1 外，可以考虑更广的模态公式可定义的类。而事实上，就是后者本身也是有趣的。例如，哪些 Π_1^1-句子容许模态可定义性。

这样的高阶逻辑一般缺少语义刻画，也就难以得到它们的模态片断的刻画。

可以观察到，$L_{\omega_1\omega}$ 和 L^2 都有对部分同构的不变性（参考本手册第 1 卷范达伦（van Dalen）所写的那章）。研究模态公式上的这种保持条件是有意思的。实际上，还没有发现反例；但是在时态逻辑中却存在反例（有理数 $\langle Q, <\rangle$ 和实数 $\langle R, <\rangle$ 是部分同构结构的经典例子，但是，存在一个表达戴德金完全性的时态逻辑公式，它在后者上是有效的，但在前一个框架上却不是有效的）。

另一方面，模态命题语言本身可能被加强，特别是通过引入命题量词 $\forall p$，$\exists p$。这种做法已出现在文献里的各种地方（参考本手册第 3 卷的嘎森（Garson）那章）。这样，如 $\forall p(\Box\Diamond p \to \exists q \Diamond\Box q)$ 将成为一个可容许的公式，而 $\Box\exists p\Diamond p \to \Diamond\forall q\Diamond\Box q$ 也一样。实际上，在这里有一种选择，就是在模态算子辖域里允许命题量词与否。今后我们考虑不允许的这种，即更受限制的这种。

这里以通常的方式出现了前束层级。所有的命题量词在前面，而原来的模态公式形成了 Π_1^1 部分（全称前缀）。接下来最简单的情况是 Σ_1^1（特称前缀）和 Δ_2^1。事实上，通过下面 1.3.2 提到的模态"规则"，后者有一种合理的动机。

格拜（Gabbay）已经观察到，下面规则定义了克里普克框架上的禁自返性：

"如果 $F \models (\Box p \wedge \neg p) \to \phi[w]$（$\phi$ 不含 p），那么 $F \models \phi[w]$"

这里一般的模式"如果 $F \models \phi[w]$，那么 $F \models \psi[w]$"，即两个 Π_1^1-公式所组成的一个蕴涵式，它是 Δ_2^1 公式（它可以写成 $\forall\exists$ 或 $\exists\forall$ 这样的形式）。

实际上，上面的具体例子已经是 Σ_1^1 公式，因为它相当于 $\forall pq(((\Box p \wedge \neg p) \to q) \to \forall qq$，即 $\forall p((\Box p \wedge \neg p) \to \bot) \to \bot$。另一个相关的观察是，上面形如 $\forall \to \forall$ 的蕴涵式，如果它是一阶可定义的，则它已经有一个一阶可定义的后承了。我们在此不详细探究这些具体问题，只是记录一个一般的问题。

正如在高阶逻辑常见的那样，我们对层级结果感兴趣。例如，每一层一阶可定义性的力量增加了多少？显然，Σ_1^1-可定义性本质上只是增加了 **P1** 中（局部的）原则的否定（参考 1.2.4），而 Δ_2^1 增加了 **P1** 和 **P1** 的"镜像"（mirror image）中的所有公式的合取和析取。

疑问 3　二阶前束层级引出了可及关系的模态可定义的一阶原则的一个上升的对应层级吗？

这个可能上升的层级不可能穷尽所有一阶原则，因为高阶模态公式确实保留基本的保持性质：转变到生成子框架时，它们局部真保持不变（生成定理 2 产生的这个结果不仅是针对原来的模态 Π_1^1-公式，而且也针对高阶的公式）。但是这样的话，我们就知道这种语义限制在语法方面对一阶公式意味着什么（参考 [van Benthem. 1976，第 6 章]）。这些公式将是"几乎受限制的"，它是由一个全称量词后面紧跟这样一个复合式所组成：这个复合式是由原子公式使用否定、合

取和受限制的量词$\exists y(Rxy\wedge\ )$而得到的复合式。

然而，1.2.1 中的其他保持性质消失了。正如早先所观察到的，禁自返性（$\forall x\neg Rxx$）成为可定义的了，并且，因而对 Z 字形态射保持就不成立了。因为早先的例子$\forall x\exists y$（$Rxy\wedge Ryy$）也成了可定义的了，因此超滤扩张下的反保持也不成立（一个直接的定义使用了模态辖域内的命题量词：$\Diamond\forall p(\Box p\rightarrow p)$。但是，存在一个非嵌入的代入形式$\exists p(\Diamond p\wedge\forall q\Box(p\rightarrow(\Box q\rightarrow q)))$。

因此，我们就到达了下面的：

问题 1　每一个几乎受限制的一阶公式$\forall x\phi(x)$能在模态命题量词的某个层级上被定义吗?

使用命题量词“模仿”受限制的一阶量化，人们可能确实能处理大多数明显的情况。这里是对过程的一个阐释。

例 15　令$\phi(x)$为$\exists y(Rxy\wedge\forall z(Ryz\rightarrow(Rzz\vee(Rzy\wedge Rzx))))$。想法就是，在某种意义上，如有必要就可以尽量远（即，在由 x、x 的 R-、R^2-和 R^3-后继所组成的集合上）地定义 $\{x\}$，$\{y\}$，$\{z\}$ ——然后，根据下面的模态公式来表达所有想要的它们之间的关系：

$\exists p_x(p_x\wedge\forall q_x(((p_x\wedge q_x)\vee\Diamond(p_x\wedge q_x)\vee\Diamond\Diamond((p_x\wedge q_x)\vee\Diamond\Diamond\Diamond(p_x\wedge q_x))\rightarrow\Box(p_x\rightarrow q_x)\wedge\Box\Box(p_x\rightarrow q_x)\wedge\Box\Box\Box(p_x\rightarrow q_x)))$[这使得$p_x$在所示的程度上是唯一的]$\wedge\exists p_y(\Diamond p_y\wedge$[同样的唯一性陈述]$\wedge\forall p_z((\Diamond(p_y\wedge\Diamond p_z)\wedge$[同样的唯一性陈述]$\rightarrow(\forall q_z\Box\Box(p_z\rightarrow(\Box q_z\rightarrow q_z))$[即,“$Rzz$”]$\vee\Diamond\Diamond((p_z\wedge\Diamond p_x\wedge\Diamond p_y)$[即,“$Rzy\wedge Rzx$”]))))。

相应地，我们猜想，上面的问题有一个肯定的答案。

我们以进一步提出下面的问题来结束本节：

问题 2　在模态辖域里增加命题量词会增加表达力吗?

1.3 其他的内涵概念

模态逻辑尽管是一般的内涵逻辑的一个例证，但它仅是一个分支，在其他内涵逻辑领域里，也可能有对应理论。在一些情况下，可以平稳地推广：可以立即运用或者仅做小的修改就可以运用已有的概念和结果。有关的一种情况是时态逻辑，1.3.1 将处理它。当相关的内涵语义呈现出强的独特性而偏离早先的模态情况时，所出现的推广就更具挑战性。有时，这些需要假设可及关系的事前条件

(pre-condition) 形式；但是可能最重要的障碍出现在宣称对可容许指派进行限制的时候。在条件句逻辑里都出现了这两种情况，这是 1.3.2 的主题。即使在这样的背景下，仍然能够保留一种有意思的对应理论。1.3.3 以直觉主义逻辑为例证明了这一点。

这两种新的特征并没有穷尽可能的语义变种。人们也可以转向不同种类的内涵算子之间的相互作用，例如，使用对应性来联接不同的可及关系。

例 16　在动态逻辑中，扮演角色的是两个模态算子$\Box$，$\Box^*$，并为它们提供了两个可及关系 R，R^*（回忆一下，$[a]$意指"在每次成功地计算 a 之后"，而$[a]^*$的直观意义是"在任意有穷多次运行 a 之后"）。现在，从对应的观点来看，著名的塞格伯格公理

$$\Box^* p \to \Box p$$
$$\Box^* p \to \Box\Box^* p$$
$$\Box^* (p \to \Box p) \to (\Box p \to \Box^* p)$$

恰恰定义了条件

R^* 与 R 的传递闭包一致。

对许多读者来说，这个例子的奇异之处可能有助于说明对应理论的无处不在。

随后各节中并没有系统地展开论述。它们的目的只是，通过主要解释例子来传达出概念与主题的一种印象。的确，这里是读者希望自己举起火炬的地方。

1.3.1　时态逻辑

传统上，时态逻辑结构一直取为时序〈T，<〉，其中 T 是由时间中的点所组成，以先于关系 <（"早于"、"之前"）排序。所选择的最简单的形式语言一直是普莱尔所提出的语言，并加上算子 G（"一直将是"）、H（"一直以来总是"）到某个命题集上。我们增加 F（"将来"）、P（"过去"）作为导出概念（关于必要的时态逻辑背景，参考第 6 卷中的基本时态逻辑一章）。

关于这种时态语义学有让人惊讶的各种"本体论的"和"语言学"的问题，这里仅提及其中的一些（一种不同的考察参考［van Benthem. 1985］)。

解释哲学格言　哲学家麦克塔格特（McTaggart）在其著名论文"时间的非现实性（The Unreality of Time）"中阐明了几个时序原则。在［McTaggart. 1908］中原则之一是：

"如果过去、现在和将来的一个决定可能应用（到一个事件），那么三者之

一将一直是并且将总是可应用的，当然，尽管它们并不总是具有相同的形式。”

将之翻译成普赖尔公理这就成了：

(1) $Pq \to H(Fq \vee q \vee Pq)$

(2) $Pq \to GPq$

(3) $q \to HFq$

(4) $q \to GPq$

(5) $Fq \to HFq$

(6) $Fq \to G(Fq \vee q \vee Pq)$

这些原则的含义是什么？可以通过代入的方法来得到答案（代入要适合时序的情形——但是此后将默认这种推广）。

例 17 (1) 定义左连通性：$\forall x \forall y < x \forall z < x\ (y < z \vee z < y \vee y = z)$

(2) 定义 ⊤ 传递性：$\forall x \forall y < x \forall z > x\ y < z$

(3) 定义 ⊤

(4) 定义 ⊤

如果 G，H 已通过不同的关系 $<_G$，$<_H$ 来解释，那么（3）和（4）本就已表达了 $<_H$ 是 $<_G$ 的逆。

(5) 再次定义传递性：$\forall x \forall y > x \forall z < x\ z < y$

(6) 定义右连通性：$\forall x \forall y > x \forall z > x\ (y < z \vee z < y \vee y = z)$

因此，麦克塔格特的时序图是一种线性流。

一个不完全性定理 早先的模态结果的简单迁移以一种非常简单的方式建立了［Thomason. 1972］中重要的不完全性结果。

定理 29 由

$$H(Hp \to p) \to Hp \qquad \text{（洛伯公理）}$$
$$GFp \to FGp \qquad \text{（麦肯西公理）}$$

公理化所得的时态逻辑是不完全的。

证明：具体地说，这个逻辑不在任何框架中成立——然而它不是不一致的。

首先，关于前一个陈述，回忆 1.2.2 中的

(1) 洛伯公理定义了 $>$ 的传递性 $<$ 的良基性

根据前一个，$<$ 也是传递的（传递性是“独立于时序方向的”，或者说是等方性的（参考［van Benthem. 1985］））。因此，例 11 运用在这个特别的情形下，我们有

(2) 麦肯西公理定义了原子性：$\forall x \exists y > x \forall z > y\ z = y$

后一个性质的一个推论是 $\forall x \exists y > x\ y < y$（参考例 12(4)）。因此，时序一定

包含瞬间的回路：$\cdots < y < y < y < \cdots$，这与良基性矛盾。因此我们的逻辑不在任何框架中成立。

然而，它的确在一个一般框架中成立，即取自 1.2.1 的一个早先的例子：$\langle N, <, \mathfrak{W} \rangle$，其中，

$$\mathfrak{W} = \{X \subseteq N \mid X \text{是有穷的或者} N - X \text{是有穷的}\}$$

原因是，拒斥麦肯西公理不再被“容许”，因此这些涉及无穷选择（托马森（Thomason）在此做了一个关于热动力学第二定律的推测：“事件模式稳定”）。但是这样的话，这个逻辑不可能是不一致的：在这个逻辑有效的所有一般框架上，它的 **K-**定理都成立。■

时序的时态逻辑公理　在 [van Benthem. 1985] 中，根据一种比较（语言意义上的）的“先于”导出了下面任意时序的重要公理。

（1）禁自返性：$\forall x \neg x < x$　（“时间中无旋涡”）

（2）传递性：$\forall x \forall y > x \forall z > y\ z > x$　（“流”）

（3）近似连通性：$\forall x \forall y > x \forall z\ (x < z \vee z < y)$　（“箭头是比较的码尺”）

人们可能也会发现，在莱布尼茨的空间-时间的关系理论中，后一个原则的一个形式是关键的公理（参考 [Winnie. 1977]）。

哪些时态逻辑公理对应了这些呢？从 1.2.4 我们知道，（1）是不可定义的，（2）产生了 $Gp \rightarrow GGp$，而（3）不在定理 25 的范围里。但后面这个结果确实给出了在

$$\forall x \forall y > x \forall z > y \forall u > x (y < u \vee u < z)$$

和

$$F(F(p \wedge Fq) \wedge Fr) \rightarrow (F(p \wedge Fr) \vee F(r \wedge Fq))$$

之间的一种对应。

另一个例子关于独特的时序。人们决不能希望根据框架的时态逻辑理论来完全范畴地定义这样的框架。因为根据生成定理，时态逻辑公式不能区别一条或几条平行的时间流——后一画面从当代科幻小说中是如此熟悉。然而，如果不考虑框架的不相交并，我们有：

定理 30　$\langle N, < \rangle$ 是由公理

$$H(Hp \rightarrow p) \rightarrow Hp$$

$$Pp \rightarrow H(Fp \vee p \vee Pp)$$

$$Fp \rightarrow G(Fp \vee p \vee Pp)$$

$$FT$$

$$G(Gp \rightarrow p) \rightarrow (FGp \rightarrow Gp)$$

范畴地定义的。

这里省略其证明。

但是，不能这样定义整数〈Z，<〉；因为收缩成一个单点保留了保持它们理论的一个 Z 字形态射（〈N，<〉这次不受影响：在时态逻辑中，Z 字形态射有两个往后关系条件——因此，早先的收缩不能做到这一点）。

时间和模态词 带两个可及关系 R，<的组合的模态-时态逻辑已经再三被提及。例如，在［White. 1981］中我们发现一个带有特征公理

$Gp \to GGp$，$Fp \to G\ (Fp \vee p \vee Pp)$，$PT$ (D4.3)

$Pq \to \Box Pq$ （“不能更改的过去”）

的逻辑。这个逻辑被声称适于用来分析著名的第奥多（Diodorean）“大论证”（Master Argument）：将可能性与现实真或将来真等同——这是一个后来被称作充分原则（the principle of Plenitude）的形式：所有形而上学的可能性最终都在这个世界得以实现。

我们分析该断定如下。$Gp \to GGp$ 定义了<的传递性，麦克塔格特公理定义了右连通性；而 PT 定义了左延续性：$\forall x \exists y\ y < x$。此外的“混合假设”定义了

$$\forall xy(Rxy \to \forall z(z < x \to z < y))$$

声明 1 $\forall xy(Rxy \to (y < x \vee y = x \vee x < y))$。

证明：假设 Rxy。令 $z < x$（根据左延续性）。那么 $z < y$（“混合”）。根据右连通性得到结论。■

声明 2 $\forall xy(Rxy \to (x < y \vee x = y))$。

证明：如果 Rxy 并且 $y < x$，那么 $y < y$（“混合”）：与禁自返性矛盾。■

结果是：没用传递性，而是用禁自返性（这是怀特（White）的整个背景所预设的），就可以得到由第奥多的挑战

$$\Diamond p \to (Fp \vee p)$$

所定义的一种关系条件。

当然这只是时序模态的许多可能的语义之一。［Burgess. 1979］中奥卡姆主义（Occamist）“分叉时间”的对应方面仍有待探索。

另一可选择的时序本体论 近来有人提出以“区间结构”（interval structures）来替代上面传统的点本体论。从［Humberstone. 1979］的宣言中呈现出下述的三元序组

$$\langle I, \subseteq, < \rangle$$

其中，⊆是区间之间的包含关系，<是全序先于关系。

这里再次证明，在探索被设想的原则中对应是有用的。该语言含有通常的时

态逻辑算子及一个模态词□（“在所有子区间（subintervals）中)”。以此记号，哈伯斯通的基本逻辑有下列基本公理：

(1) $Fp \to \Box Fp$,

(2) $F\Diamond p \to Fp$,

(3) $\Diamond F\Box p \to (\Diamond p \vee Fp)$。

根据早先的代入方法可以找到等值式，它们阐述了：

(1) 定义了 $\forall x \forall y > x \forall z \subseteq x\ y > z$,

这是一个被称为*左单调性*的性质，

(2) 定义了 $\forall x \forall y > x \forall z \subseteq y\ z > x$,①

它是*右单调性*的对偶性质。最后，

(3) 定义了 $\forall x \forall y \subseteq x \forall z > y(\exists u \subseteq z : u \subseteq x \vee \exists u \subseteq z : u > x)$。

这是一个被称为*凸面*（convexity）原则的一种表述(“时间的延展性应当是不间断”的)。

从另一方面开始，人们可以在⊆，<上加一些原则而来寻求在这种“区间时态逻辑”中的定义。对于<，这些可能是早先提及的逻辑，对于⊆，一种极小的要求似乎是*偏序*，而单调性（和凸面）处理<和⊆之间的极小联系。这将只是增加两个出于包含考虑的公理到前面的逻辑即 **S4** 中。进一步的条件*反对称性*不是可定义的——可以通过下面来看清这一点：映射 $n \mapsto n$（模 2）是一个⊆-Z 字形态射，它将反对称性框架〈Z，≤〉映射到非反对称性框架〈{0，1}，{〈0，0〉，〈0，1〉，〈1，0〉，〈1，1〉}〉。

除了这些基础的例子外，我们可以在［van Benthem. 1985］的第 II. 3. 2 节中可以找到进一步对应的更多例子。

1.3.2　条件句

这里包括了在大量丰富的“条件句逻辑”中的三类范例。这一领域还根本没有开展当前这种工作，因此，下面的考虑还是非常初步的（关于条件句逻辑，参考第 5 卷条件句逻辑一章)。

构造性蕴涵　支持构造性蕴涵反对经典蕴涵的最为有效的证明，也许是自然演绎分析。→引入和→消去的自然规则给予我们的仅仅是所有经典纯→重言式的一个片断；公理化如下：

(A1) $\phi \to (\psi \to \phi)$

① 其中的“$z > x$”原文误为“$z > z$”——译者注。

$(A2)(\phi\to(\psi\to\chi))\to((\phi\to\psi)\to(\phi\to\chi))$
加上分离规则。在此类之外的一个引人注意的原则是皮尔士（Peirce）律：

$$((\phi\to\psi)\to\phi)\to\phi$$

但是实际上，亨金完全性证明也是同样的漂亮。在通常的证明中，我们从一给定的一致集出发——然后，为了“推翻”根据经典真值表的蕴涵式，必须把该集合任意地扩张到任意一个极大一致集。一个典范模型构造更是使用一个唯一的自然模型，即那个一致集连同它的所有一致扩张，并利用下述这个明显的分解规则

$$\Sigma\vdash\phi\to\psi \text{ 当且仅当 } \forall\Sigma'\supseteq\Sigma\text{：如果 }\Sigma'\vdash\phi\text{，那么 }\Sigma'\vdash\psi$$

按照下列语义，一个完美的匹配随着出现了。结构是一般框架 $F=\langle W, R, \mathfrak{W}\rangle$，其中 R 对应上面的包含关系，而 $\mathfrak{W}$ 由所有 R-遗传的世界集组成（以此观点看，命题表示 R-累积的知识）。

直接研究这些框架上的逻辑会产生相当笨拙的条件。我们将展示一种情况，因为它阐明了对应概念的一个变异，即规则的对应而不是公理的对应。

例 18　分离规则定义了条件“每个世界都属于某个有穷的 R-回路”：

证明：“⇐”：假设 $xRx_1R\cdots Rx_nRx$。令 $V(p),V(q)$ 是 W 的 R-遗传子集，使得 p，$p\to q$ 在 x 处成立。那么，连续地有 p，q 在 x_1，…，x_n 处成立，并且最终在 x 处成立。

“⇒”：假设 x 不属于任意有穷的 R-回路。令 $V(p)$:= 包含 x 的最小的 R-遗传子集，$V(p)$:= $\{y\mid Rxy\}$ 的 R-遗传闭包。这将在 x 处验证 p，$p\to q$，而没有验证 q。 ■

我们将要假定⊆的偏序行为：自返性，传递性和反对称性。（A1）和（A2）的更细的特征在这个阈之下仍不可察觉。

更强的公理可以进一步限制 R；例如，我们可以明白为什么皮尔士律是经典逻辑的特征：

例 19　皮尔士律定义了到单点的限制

$$\forall xy(Rxy\to y=x)$$

证明：“⇐”：一个简单的计算就够了。

“⇒”：假设 Rxy，$x\neq y$。令 $V(q)=\varnothing, V(p)=\{z\mid Rxz\wedge x\neq z\}$。这使得在 x 处 $(p\to q)\to p$ 真（注意到 $p\to q$ 本身在 x 处假），而 p 假（顺便提一下，V 是可容许的，即 $V(p)$ 是 R-遗传的，这可从上面的一般假设得到）。 ■

但是“中间”蕴涵公理也存在。

例 20　下面的原则

$$((p\to q)\to p)\to(((q\to r)\to q)\to p)$$

定义了极大长度为 3 的 R 链：

$$\forall xy(Rxy\to\forall z(Ryz\to(x=y\vee y=z\vee\forall u(Rzu\to z=u))))$$

证明：这里是“⇒”方向证明的一个相关反例。假设 $xRyRzRu$，而 $x\neq y$，$y\neq z$，$z\neq u$。令 $V(r)=\varnothing, V(q)=\{v\mid Ruv\wedge u\neq v\}\cup\{v\mid Ryv\wedge\neg Rvz\}$，$V(p)=\{v\mid Ryv\wedge y\neq v\}$。这个原则在 y 处为假。■

不可能找到其他类型的中间例子。因此，我们以下列猜想作为结束：

猜想 1　所有纯构造性蕴涵原则定义了 R 上的一阶限制；即，限制到某有穷长度的链。

相干蕴涵　在为相干逻辑提出的各种各样的语义中，一个明晰的例子出自[Gabbay. 1976，第 15 章]。现在结构是〈W，R，V，0〉，其中 0 是一个特别世界，它提供了一个优势点，从该点可以通过三元关系 R 来比较其他世界。直觉上，R_abc 意味着，至少从 a 的角度来看，b“包含”在 c 中（例如，人们可以想象，“a-局部包含”：$a\cap b\subseteq a\cap c$）。这个关系上没有预先的条件。

这并不是说，根本没有发现这些条件。例如，可以证明：所提及的局部的包含关系为这样两个中间状态公理（betweenness axioms）所刻画：

（1）$R_abc\leftrightarrow R_bac$　（交换边界）

（2）$(R_abc\wedge R_dae\wedge R_dbe)\to R_dce$

（即，如果 $c\in[a,b], a\in[d,e], b\in[d,e]$，那么 $c\in[d,e]$：凸面的一种形式）

这种蕴涵解读如下：

如果 $\phi\to\psi$ 在 a 处为真，当且仅当，对所有满足 R_abc 的 b，c 有：

若 ϕ 在 b 处为真，则 ψ 在 c 处为真。

按此情况，这个定义没有使得蕴涵规则普遍有效。为了获得至少某种确实的原则，人们因而对赋值做一种限制。最紧迫的情况是 $p\to p$。在上面的无限制条件的语义上，这对应了 $\forall xyz\ (R_xyz\to y=z)$，它压缩了三元关系。为避免这种情况，人们又要求“累积”：

赋值 V 仅指派满足下面限制的 W 的子集 X：$\forall xy\in W\ (R_0xy\to(x\in X\to y\in X))$

如果这种限制自动扩展到由复合的蕴涵式所定义的集合 X 上，那么它还是在三元关系上加了一种温和的传递性：

$$\forall xyzu((R_0xy\wedge R_yzu)\to R_xzu)$$

注意这是如何将不同的优势点的角度联系起来的。

但是，如果传递性的合理的形式已经可以考虑的话，我们也要增加（*）

$\forall xyzu((R_0xy \wedge R_0yz) \to R_0xz)$。

最后，一些真正的对应现在就出现了——是一种“局部”的对应（参考 1.2.2）。

例 21

（1）分离规则定义了 R_000，

（2）公理 A1 定义了一种古怪形式的“传递性”：

$$\forall xyzu((R_0xy \wedge R_yzu) \to R_0xu)$$

证明：（仅证情况（1））“$\Leftarrow$”：这个方向立即可得。

“$\Rightarrow$”：令 $V(p) = \{0\} \cup \{x \mid R_00x\}$，$V(q) = \{x \mid R_00x\}$。根据上面原则（*），两种指派都是容许的。很清楚，p 和 $p \to q$ 在 0 处都为真，因而 q 也真：即 R_000。 ■

显然，第二个原则看起来不是非常地合理——但是，对于一个相干逻辑学来说，（A1）也不是。

从当前的观点来看，相干逻辑中一个更有意思的现象是对于否定的处理。现在使用一个世界上的“反转”运算 $^+$：

$$\neg\phi \text{ 在 } a \text{ 处为真，当且仅当 } \phi \text{ 在 } a^+ \text{ 处为真}$$

解释这个原来不明显的概念。这样一来，新的组合对应出现了，例如，像在逆否律和反转律

$$\forall xy(R_0xy \to R_0y^+x^+)$$

之间的对应。对应理论可以应用到任何种类的语义实体。

反事实蕴涵 拉姆兹（Ramsey）告诉我们像这样来计算条件句的值：为容纳前件而对你的信念集做极小的调整，然后看是否会得到后件。已存在各种各样的语法和语义，都是贯彻这种观点。其中［Lewis. 1973］的做法当然地已经赢得了大家的喜爱。根据他的解释，一个反事实条件句 $\phi \Box\!\!\to \psi$ 在一个世界里为真指：如果在所有最与那个世界相似的世界中，如若 ϕ 为真，则 ψ 也为真。

由于前面的说明在无穷的情况下有些困难，让我们考虑有穷模型 $\langle W, C, V\rangle$，其中 C 是一个比较相似性的三元关系：

C_xyz 表示：“y 比 z 更相近于 x”。

刘易斯给出了“不更相近于”关系上的三个基本条件：

（1）传递性：$\forall xyzu((\neg C_xyz \wedge \neg C_xzu) \to \neg C_xyu)$，

（2）连通性：$\forall xyz(\neg C_xyz \vee \neg C_xzy)$，

（3）自我中心性（egocentrism）：$\forall xy(\neg C_xxy \to x = y)$。

将这些重新写为“更相近于”，人们会惊奇地发现，（2）是相当弱的，仅是

（2）′ 非对称性：$\forall xyz(C_xyz \to \neg C_xzy)$，

另一方面，(1) 成为一个强的原则

$(1)'\ \forall xyu((C_x yu \rightarrow \forall z(C_x yz \vee C_x zu))$

我们知道这是前面 1.3.1 里的近似连通性。

从非对称性和近似连通性，人们可以推导出通常的传递性和禁自返性，因而，1.3.1 里的三个“比较”公理就出现了。这些原则为这张围绕着参考世界 x 的“相似性球”的吸引人的图提供了辩护。

自 1973 年以来，流行的都是仅保留传递性和禁自返性作为 C 上的基本的事前条件，而将各种形式的连通性作为附加的选择。这样，人们发现，在 [Burgess. 1981] 中这种严格的条件句逻辑的一个公理系统。

在这种情况下，真值定义可以取为如下：

$\phi \Box\!\!\rightarrow \psi$ 在 w 中为真，如果在所有与 w 是 C-最相近的所有 ϕ-世界中 ψ 成立[①]

的确，这个条件验证了下列原则而并没有更多的麻烦：

$$p \Box\!\!\rightarrow p,$$

$$p \Box\!\!\rightarrow q,\ p \Box\!\!\rightarrow r \vdash p \Box\!\!\rightarrow q \wedge r$$

$$p \wedge q \Box\!\!\rightarrow p$$

$$p \Box\!\!\rightarrow r,\ q \Box\!\!\rightarrow r \vdash p \vee q \Box\!\!\rightarrow r$$

仅最后一个需要传递性：

$$p \Box\!\!\rightarrow q \wedge r \vdash p \wedge q \Box\!\!\rightarrow r$$

自我中心性可以通过增加分离原则重新获得：

$$p \Box\!\!\rightarrow q, p \vdash q$$

但是，通常的刘易斯逻辑甚至包含了更多的原则，像强大的

$$((p \vee q) \Box\!\!\rightarrow p) \vee \neg((p \vee q) \Box\!\!\rightarrow r) \vee q \Box\!\!\rightarrow r$$

它表达了什么？它恰好恢复了近似连通性。

证明：首先，根据上面的讨论，这个公理在这个附加的假设下是有效的。

接下来，假设近似连通性不成立；即，对于某个 $xyzu$ 我们有：$C_x yz, \neg C_x yu, \neg C_x uz$。根据传递性，它可以得到：$\neg C_x zu$。现在，令 $V(p) = \{y\}$，$V(q) = \{z, u\}$，$V(r) = \{y, u\}$。这样 z 在 r 不成立的世界中是 q-最相近的。这两个 $p \vee q$-最相近的世界 y，u 都验证了 r。最后，p 在 $p \vee q$-最相近的世界 u 中不成立。因此，就拒斥了刘易斯公理。■

最后来提一下刘易斯原来逻辑之外的一个例子，“条件句排中律”的斯托内克尔原则：

① 其中第二个“ψ”原文误为“w”——译者注。

$$p \,\Box\!\!\rightarrow q \vee p \,\Box\!\!\rightarrow \neg q$$ [1]

正如在引论中所述的,这个公理甚至要求相似性的序是线性的。在当前有穷的情况下,这意味着,上面的真值定义归约为:

$\phi \,\Box\!\!\rightarrow \psi$ 在 w 中为真,如果在与 w 最相近的 ϕ-世界中 ψ 成立

而这就是斯托内克尔关于条件句的原初说明。

前面的例子都是没有$\Box\!\!\rightarrow$嵌套的条件句公理。对于这一领域中当前的大多数逻辑来说这是典型的。人们发现,与这些匹配的关系条件总是一阶的。因此,根据定理 12,我们

猜想 2 所有无嵌套条件句的反事实条件句公理都是一阶可定义的。

这一限制的原因在于当前领域的动机。人们出于对经典的"嵌套原则"如$p\rightarrow(q\rightarrow p)$或皮尔士律不满而常常提出一些衍推条件句,像构造性蕴涵或模态衍推。而人们并不质疑非嵌套的经典部分。然而,反事实条件句在非嵌套的推理层次上典型地不遵守经典蕴涵逻辑。如从 $p\rightarrow q$ 到 $p\wedge r\rightarrow q$ 的单调性规则。

然而,在上面的语义中毕竟还是发现有些内在的原因来考虑嵌套的公理。因为在上面所列的语义条件中一个明显的疏忽是,缺少与不同世界观相关联的指标原则。例如,当我们暂且把 C 读成欧几里得空间中的相对接近时,我们会发现下面的三角不等性:

$$\forall xyz((C_x yz \wedge C_z xy) \rightarrow C_y xz)$$

并且还有其他这种漂亮的原则。

现在,很容易看到,当计算嵌套的反事实条件时,这样的指标原则正好是所涉及的:角度开始转移。因此,这里也值得有对应。下面是一个不太令人兴奋的例子。吸收律

$$p \,\Box\!\!\rightarrow (q \,\Box\!\!\rightarrow r) \vdash (p \wedge q) \,\Box\!\!\rightarrow r$$

定义了指标原则

$$\forall xyz(C_x yz \rightarrow \forall u \neg C_y uz)$$

更好的例子还有待发现。的确,欧几里得空间的反事实条件逻辑——我们的相似性图景最自然的几何表示——仍是一个谜。

1.3.3 直觉主义逻辑

构造性条件句逻辑仅是全部直觉主义逻辑的一部分,它的克里普克语义扩展了早先的构造性模型。本节将概述直觉主义对应理论(关于直觉主义逻辑的详细

---

① 其中的"∨"原文误为"∧"——译者注。

内容，参考本手册的第7卷范达伦所写的那章)。

克里普克语义，中间公理和对应

定义18　一个直觉主义克里普克模型 $\mathfrak{M}$ 是一个三元组 $\langle W, \subseteq, V\rangle$，其中 $\subseteq$ 是 W（“知识积累的进程”）上的一个偏序（“可能的增长”）。V 给每个命题字母（“知识的积累”）指派 W 的 $\subseteq$-封闭的子集。

真值定义是下列熟悉的方式，

$\mathfrak{M} \not\models \bot\,[w]$　　对所有的 $w \in W$

$\mathfrak{M} \models \phi \to \psi[w]$　如果对所有的 $\nu \supseteq w$ 满足了：若 $\mathfrak{M} \models \phi[\nu]$ 则 $\mathfrak{M} \models \psi[\nu]$

$\mathfrak{M} \models \phi \wedge \psi[w]$　如果 $\mathfrak{M} \models \phi[w]$ 并且 $\mathfrak{M} \models \psi[w]$

$\mathfrak{M} \models \phi \vee \psi[w]$　如果 $\mathfrak{M} \models \phi[w]$ 或者 $\mathfrak{M} \models \psi[w]$

否定如通常所定义的（$\neg\phi$ 成了 $\phi \to \bot$）。

偏序的事前条件如先前那样提出。但是，其他选择也可以得到辩护。众所周知的，上面的语义通过哥德尔翻译 g 从模态语义导出：

$$g(p) = \Box p$$
$$g(\phi \to \psi) = \Box(g(\phi) \to g(\psi))$$
$$g(\phi \wedge \psi) = g(\phi) \wedge g(\psi)$$
$$g(\phi \vee \psi) = g(\phi) \vee g(\psi)$$
$$g(\bot) = \bot$$

现在有一整块模态逻辑，它的“直觉主义片断”（通过 g）与直觉主义命题逻辑吻合。在其他的逻辑中，我们有

定理31　令 X 是从 **S4** 到 **S4. Grz** = **S4** 中的任意一个加上格热高奇克（Grzegorczyk）公理

$$\Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p$$

所得，那么，对于所有的直觉公理 ϕ，ϕ 在海丁逻辑中是直觉主义可证的当且仅当 $g(\phi)$ 是 X 的一个定理。

早先的模态对应产生了一个对应的语义范围，它在“前序”（自返的和传递的）和“树”之间：

例22　格热高奇克公理定义了下面的组合（i）自返性，（ii）传递性和（iii）下列意义上的良基性：“不会有 w 使得存在一个升链 $w = w_1 \subseteq w_2 \subseteq \cdots$ 满足 $w_i \neq w_{i+1}$（$i = 1, 2, \cdots$）。”

证明：证明多多少少像密切相关的洛伯公理。顺便说一下，注意到（iii）蕴涵着反对称性。也注意到，语义上，格热高奇克公理单独蕴涵着 **S4** 律：相匹配的语法推导由 W. J. 布洛克（W. J. Blok）和 E. 普勒杰（E. Pledger）在 1979 年发现。 ■

因此，也可以得到一种情况，知识树是直觉主义语义的基础。然而，我们一开始还是坚持偏序。

在 **S4. Grz** 的上面模态逻辑开始产生出更多的 g-片断——所谓的中间逻辑，一直上升到整个经典逻辑。中间公理对知识增长模式给出了各种各样的限制，而经典逻辑迫使单个（“完全的”）节点存在。

例 23

（i）排中律 $p \vee \neg p$ 定义了 $\forall x \forall y(x \subseteq y \rightarrow x = y)$

证明：“$\Leftarrow$” 立即可得。

“$\Rightarrow$”：假设 $x \subseteq y$，$x \neq y$。（根据反对称性就有 $y \not\subseteq x$）令 $V(p) = \{z | y \subseteq z\}$。在 x 上 p 和 $\neg p$ 都假。 ■

（ii）弱的排中律 $\neg p \vee \neg\neg p$ 定义了有向性

证明：“$\Leftarrow$”：假设 $\neg p$ 在 x 处为假；比如说 p 在 $y \supseteq x$ 处成立。然后考虑任意 $z \supseteq x$。因为它与 y 有一个共同的后继，并且 $V(p)$ 是 $\subseteq$-遗传的，它有一个后继来验证 p，因而 $\neg p$ 在 z 处不成立。因此 $\neg\neg p$ 在 x 处成立。

“$\Rightarrow$”：假设 $x \subseteq y$，z，其中 y 与 z 没有共同的后继。令 $V(p) = \{u | z \subseteq u\}$（像上面一样，这是一个 $\subseteq$-封闭集）。注意 $x, y \notin V(p)$。它得到 $\neg p$ 在 x 处不成立（考虑 z），但是 $\neg\neg p$ 也不成立（考虑 y）。 ■

（iii）条件选择 $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ 定义了连通性

证明：“$\Leftarrow$”：假设 $p \rightarrow q$ 在 x 处不成立；即在某个 $y \supseteq x$ 处 p 为真，但是 q 为假。现在考虑任意 $z \supseteq x$，q 在其中成立。或者 $z \subseteq x$，但是那样的话，根据 $\subseteq$-遗传性，q 在 y 处为真（与事实不符），或者 $y \subseteq z$，因此，又根据 $\subseteq$-遗传性，p 在 z 处为真，即，$q \rightarrow p$ 也不成立（观察 z）。 ■

比这些更难处理的原则已经作为中间公理提出。但是令人惊讶的是，通常证明这些都是一阶可定义的。

例 24

（i）稳定性原则 $(\neg\neg p \rightarrow p) \rightarrow (p \vee \neg p)$ 定义了

$\forall x \neg \exists yz(x \subseteq y \wedge x \subseteq z \wedge \neg \exists u(y \subseteq u \wedge z \subseteq u) \wedge$

$\forall u(\forall s(u\subseteq s\to\exists t(s\subseteq t\wedge z\subseteq t))\to\neg\exists v(u\subseteq v\wedge y\subseteq v)))$

(ii) 克莱塞尔－普特南公理$(\neg p\to(q\vee r))\to((\neg p\to q)\vee(\neg p\to r))$定义了

$\forall x\neg\exists yz(x\subseteq y\wedge x\subseteq z\wedge\neg y\subseteq z\wedge\neg z\subseteq y\wedge$

$\forall u((x\subseteq u\wedge u\subseteq y\wedge u\subseteq z)\to\exists v(u\subseteq v\wedge\neg y\subseteq v\wedge\neg z\subseteq v)))$

不管这样的公理初看起来多么复杂，上面的断定是相当简单的练习，“想象一个反例将会是怎样”。

这一经历再次发生就导致 [van Benthem. 1976] 中的下列猜想：

所有中间公理表达了知识增长上的一阶限制。

两个被拒斥的猜想　早先的希望差不多在本章第 1 版里放弃了；因为“司各脱（Scott）规则”证明本质上是高阶的中介推理规则。相关的证明由罗登伯格（Rodenburg）做得更好了：

定理 32　司各脱公理 $((\neg\neg p\to p)\to(p\vee\neg p))\to(\neg p\vee\neg\neg p))$ 没有定义偏序上的任何一阶条件。

证明：一种详细的骆文汉姆-斯科伦证明起作用，其实质上是例 9。定理作为我们当前主题的非平凡的一个解释而得到。

步骤 1：考虑图 1-4 中克里普克框架 $\langle W,\subseteq\rangle$：

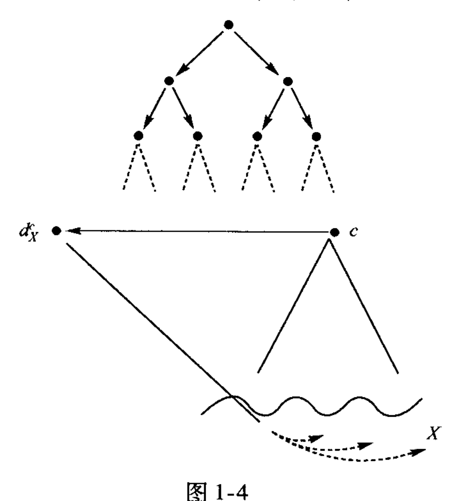


图 1-4

W 由无穷的二元树 T 和由下面方法得到的点组成：对 T 中的每个节点 c，及 T_c（即以 c 为根的子树）中的每个$\subseteq$-遗传的共尾集 X 得到某个点 d_X^c。$\subseteq$是 T 上的通常的序，并满足：

- $c\subseteq d_X^c\subseteq x$，对任意 $x\in X$

- $d_X^c \subseteq d_{X'}^c$，如果 $X' \subseteq X$

声明 3　司各脱公理在〈W，⊆〉中为真。

证明：首先，令 $c \in T$ 是一个假定的拒斥点。即，对某个赋值 V，

（1）$(\neg\neg p \rightarrow p) \rightarrow p \vee \neg p$ 在 c 处为真，

（2）$\neg p \vee \neg\neg p$ 在 c 处为假。

然后，考虑节点 d_X^c，其中 X 是共尾遗传集

$$T_C \cap (V(p) \cup V(\neg p))$$

我们可以连续验证在 d_X^c 处 $\neg\neg p \rightarrow p$ 为真，而 p 和 $\neg p$ 都假（例如，如果在 d_X^c 为真，那么 p 在 X 中处处都为真，因而，$\neg\neg p$ 在 c 处为真——而（2）说的与此相反）。因此，我们所得的就与（1）矛盾。

对于 c 本身为形式 d_X^c 的情况类似的证明可得。■

步骤 2：基数的问题：

声明 4　上面的克里普克框架是不可数的。

证明：特别地，有 $2^{\aleph_0}$ 个形如 d_X^c 的节点（图 1-5）。因为，使用这个无穷的二元树的（不同的）遗传的共尾子集 Y^+ 可以将 N 的每个子集 Y 编码如下：令 $Y = \{y_1, y_2, y_3, \cdots\}$。

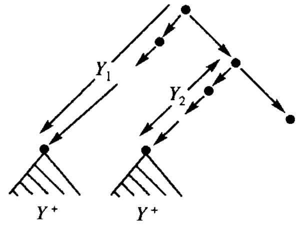
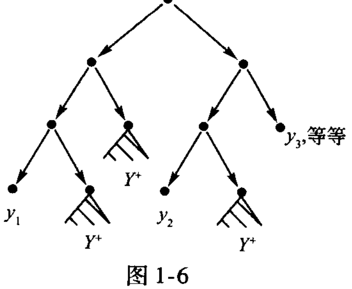


图 1-5

等等。使用最左边的那些分支沿着最右边的那个分支来解码 y_1，y_2，y_3，…。

对于所有那些用此方法没有到达的节点，人们根据图 1-6 中的规则来使得 Y^+ 共尾：



■

图 1-6

步骤 3：取任意包含原来那个二元树的〈W, ⊆〉的可数初等子结构 F。

声明 5　司各脱公理可以在 F 中为假。

证明：考虑 T 为一个双树（图 1-7）

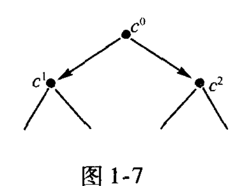


图 1-7

并且，T_{c^2}是一字符串上的树的一个可数序列（图 1-8）：

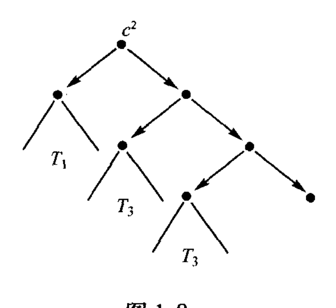


图 1-8

令 $D_{X_1}, D_{X_2}, \cdots$ 是仍保留在 F 中的点 $d_X^{C_0}$ 的一个枚举。注意，对于每个 $i \in N$，

（1）有穷交 $T_i \cap X_1 \cap \cdots \cap X_n$ 仍是 T_i 中的遗传共尾的，

（2）全部交 $T_i \cap \{X_j | j = 1, 2, \cdots\}$ 是空集。

至于后一个，只要看到断定

$$\forall x \exists d_X^{C_0} \text{ 满足}: d^{C_0} \not\subseteq x$$

这个断定在〈W, ⊆〉中成立，并可用〈W, ⊆〉中的一阶项来表达；因而，它在初等子结构 F 中仍有效。

现在，定义

$$X_1^* = X_1$$

$X_{n+1}^* = X_1 \cap \cdots \cap X_k$，其中 k 是满足下列要求的最小的数：

$$T_{n+1} \cap X_1 \cap \cdots \cap X_k \subset T_{n+1} \cap X_n^*$$

通过令

$$X^* = \cup \{T_i \cap X_i^* \mid i = 1, 2, \cdots\}, V(p) = \{y \mid \exists x \subseteq y, x \in X^*\}$$

司各脱公理现在可以在 c^0 处为假。

为看清这一点，注意到，连续地有：

(1) 每一个点 d_{X_i} 在 $V(p)$ 外有一个后继（在 T_i 中），

(2) $(\neg\neg p\to p)\to p\vee\neg p$ 在 c^0 处成立，

(3) $\neg p\vee\neg\neg p$ 在 c^0 处不成立。 ■

我们断定司各脱公理不是一阶可定义的——因为不对初等子框架保持。 ■

这一复杂行为在表现更好的结构上消失了。

观察 3 司各脱公理定义了树上的一阶条件

$\forall x\neg\exists yzu\ (x\subseteq y\wedge x\subseteq z\wedge z\subseteq u\wedge z\neq u\wedge\neg\exists v\ (y\subseteq v\wedge z\subseteq v))$

这个观察及这类其他经验导致了本章第 1 版一个猜测的修正：所有中间公理表达了树的后裔上的一阶限制。修订版增加了一个概要的证明，它使用了以树的形式描述的列出了所有可能的“反模型”（patterns of falsification）的语义表列。

[Rodenburg. 1982]“几乎”拒斥了这个猜想。语义表列方法以析取来处理问题。的确我们有下列反例。

例 25 考虑公式

$$\phi=((\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\to(p\wedge q\wedge r))\to(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)$$

以 $p\&q$ 代入 p，$p\&\neg q$ 代入 q，$\neg p\&q$ 代入 r。这个 ϕ 在偏序上不是一阶可定义的。在适当的像树样的结构中，它表达了没有立即后继成“3 个分叉”，也表达了没有无穷的梳状结构。

关于树，这个反面的例子仍可能有作用——但是，这里有一种具有启发意义的困难。树的类本身有一个高阶的定义，准确地说是 Π_1^1。因此，当前的否证一阶可定义性（紧致性，骆文汉姆-斯科伦）的模型论证明有使用这样一些危险的构造，它们导致跑到该类之外。高阶的前提都是我们对应理论的一个问题。

为从一个纯经典的角度来解释这个问题，读者可以考虑一个相关的问题，证明这些熟悉的模型论方法多快会让我们失败。有穷性在偏序上不是一阶可定义的，即使在树上也是不能。然而在线序性树上它是可定义的，即根据“每个非初始节点有一个立即前驱”（至多）。二元树的情况又是怎样呢？这个中间的情况仍是未知的。

本主题的状况 科学的发展有时真是令人吃惊。本章第 1 版（1981）有一些尝试性的例子，在报告 [Rodenburg. 1982] 中主要还是一些启发性的内容。在其众多主题之中，这里仅提及其中的一些。

首先，有几种语义选择——正如上面已说的，从偏序经“向下的线序性”到树。但是此外还有选择合理的语言问题。与其表面形式不同，正是析取这一条现在在直觉主义克里普克语义中是极具构造性的（“现在选择”！经典逻辑在 $\Box\Diamond(\phi\vee\psi)$，即“最终 ϕ 或 ψ”这一设置中有一个更仁慈的条件）。因此，既考虑整个语言又考虑无 $\vee$ 的片断是有意思的。

上面提到的语义表列方法和上面的反例就得到了表 1-2 中结果：

表 1-2

所有一阶可定义的公式	偏序	向下的线性序	树
不带 $\vee$	是	是	是
带 $\vee$	否	否	?

但是也有“微细的结构”问题。例如，司各脱公理仅有一个命题字母——并且对这样的直觉主义公式我们有漂亮的瑞格-尼希姆拉（Rieger-Nishimura）格。现在，文献中已有的中间公理中司各脱公理似乎是一个合适的选择。罗登伯格（Rodenburg）已经证明：对于一阶不可定义性，它在瑞格-尼希姆拉格中也是极小的（更精确地说，一个带有一个命题字母的直觉主义公式在偏序上是一阶可定义的，当且仅当它等值于这个格中的 A_1，…，A_9 中的一个）。

在后一个结果所需要的反例当中，一种齐一的方法可能在起作用：紧致性，表述为：如果公式集在有穷的模型中是有穷可满足的，则该集合（在某个无穷模型中）同时是可满足的。现在，直觉主义的真与有穷子模型中的真的确有某种紧密联系（参考［Smoryński. 1973］）。我们的问题是，这是否会导致在 1.2.2 中所给的一阶可定义性的数学刻画会有下面的改进。

猜想 3　一个直觉主义公式 ϕ 是一阶可定义的当且仅当它对有穷框架的超积保持。

直觉主义的可定义性　如“从内涵到经典”的方向一样，“从经典到直觉主义”的情况表明与我们早先的模态研究有许多相似的地方。例如，［van Benthem. 1983］中证明了一个戈德布莱特（Goldblatt）-托马森类型的刻画（参考前面的定理 24）：

增长模式的一阶限制是直觉主义可定义的当且仅当它对生成子框架、不相交并、Z 字形态射像、滤扩张和“滤的逆”保持。

这个主题有更广的语义意义。下面是背景中表示定理的一个概述，它仅是为了解释这个主题。

在代数方面，直觉主义语言可以在满足适当假定的海丁代数 $\langle A, 0, 1, +, \cdot, \Rightarrow\rangle$ 中得到解释。现在，在上述意义上的每个克里普克（一般）框架，只要有合适的明显的运算，通过其⊆-遗传的集合都会引出这样一个海丁代数。但是反过来，一个滤表示会将海丁代数转换为克里普克一般框架。的确，早先的范畴对偶（参考1.2.3）又将出现。

这种构造的更一般的兴趣在于如下。尽管表面上同由“完全的”可能世界所组成的结构相似，直觉主义的克里普克模型应当看成是部分信息状态的模式。这在上面的表示中表现得极好。在那儿，“世界”不再是完全的超滤，而仅是滤（在无∨的情况下）或者“分裂的”滤（在完全的语言情况下）。滤 F 仅满足封闭条件

$$a, b \in F, \text{当且仅当 } a \cdot b \in F$$

这是部分信息上的极小要求。非常有启发意义的是，“模态”可及关系坍塌成包含关系（“增长”）

$$\forall a \Rightarrow b \in F \forall a \in F' : b \in F', \text{当且仅当 } F \subseteq F'$$

当今的“部分模型”和“信息语义”的支持者对直觉主义逻辑的研究进行得很好。

谓词逻辑 对应现象并没有在谓词逻辑的边界止步。这将通过一些直观例子加以说明。

克里普克模型 $\mathfrak{M} = \langle W, \subseteq, D, V\rangle$ 将是通常的变异；特别地，它满足

(1) $\forall xy(x \subseteq y \to D_x \subseteq D_y)$ （单调性）

(2) $\forall xy(x \subseteq y \to \forall \vec{d} \in D_x(V_x(P, \vec{d}) = 1 \to V_y(P, \vec{d}) = 1)$ （遗传性）

但是，其他的比如说带有论域之间的映射的变异（参考［Goldblatt. 1979］）也是合适的。

1.2.5 的“从物/从言”的变换原则现在有明显的对应——下面的四组公式

(1) $\neg\exists xAx \to \forall x \neg Ax$

(2) $\forall x \neg Ax \to \neg\exists xAx$

(3) $\exists x \neg Ax \to \neg\forall xAx$

(4) $\neg\forall xAx \to \exists x \neg Ax$

前面的三个在当前的语义中是普遍有效的。(3) 的哥德尔变换

$$\Box(\exists x \Box\neg \Box Ax \to \Box\neg \Box \forall x \Box Ax)$$

或者

$$\Box(\exists x \Box \Diamond \neg Ax \to \Box \Diamond \exists x \Diamond \neg Ax)$$

表明，它们隐藏了相当的复杂性。难怪（3）并没有准确地定义上面的域上的单调性——尽管它的模态姊妹公式$\exists x\Box Ax\to\Box\exists xAx$定义了。

1.2.5中第一个真正复杂的原则是逆蕴涵$\Box\exists xAx\to\exists x\Box Ax$。我们现在来考察它的直觉主义姊妹公式（4）——一个被拒斥的经典规律。

例26

（1）$\neg\forall xAx\to\exists x\neg Ax$蕴涵了所有的论域都相等：

$$\forall xy(x\subseteq y\to D_x=D_y)$$①

（2）在带有有穷不变论域的框架上，$\neg\forall xAx\to\exists x\neg Ax$表达了一阶条件：

$$\forall x(\exists!d\ d\in D_x\vee\forall y(x\subseteq y\to\forall z(x\subseteq z\to\exists u(y\subseteq u\wedge z\subseteq u))))$$

证明：（1）假设$x\subseteq y$，但$D_x\subset D_y$。令A在y处对于所有的$d\in D_x$为真，并且，对所有的$y'\subseteq y$亦是类似。这一规定定义了一个容许指派，它在x处验证了$\neg\forall xAx$，而使得$\exists x\neg Ax$为假。

（2）首先，如果$|D_x|=1$，那么在x处$\neg\forall xAx\to\exists x\neg Ax$平凡地成立（回忆，所有的域都相等）。

然后，如果$|D_x|>1$，那么我们可以证明如下。如果，在上述的意义上，在x之上是有向的，那么假设$\exists x\neg Ax$在x处不成立，可以据此证明$\neg\forall xAx$也一定不成立。

因为，令$D_x=\{d_1,\cdots,d_k\}$。根据假设，Ad_i在某个$x_i\supseteq x$处为真（$1\leqslant i\leqslant k$）。这样，通过连续运用方向性，将会找到一个一个共同的后继$y\supseteq x_1,\cdots,y\supseteq x_k$，$\forall xAx$在$y$处为真（根据遗传性）。这样就使得$\neg\forall xAx$在$x$处为假。

另一方面，如果对某个x有$|D_x|>1$，而$\subseteq$在x之上不是方向的，那么，存在$x_1\supseteq x$，$x_2\supseteq x$，并且它们没有共同的后继。挑出任意一个$d\in D_x$使得：A在x_1及它的所有$\subseteq$-后继处对于除了d以外的所有对象都为真；而在x_2及它的所有后继处仅对d为真。这个指派在x处验证了$\neg\forall xAx$，而使得$\exists x\neg Ax$为假。■

因此，一个经典的量词公理可能表达了$\subseteq$上有趣的纯关系限制。

现在直觉主义者喜欢说，（4）对于有穷论域是有效的：然而，正如我们已经看到，那时它的确加了些限制。他们会继续说，推到无穷的情况是不合法的。至少，我们的原则那时会变得更复杂。

---

① 其中的"$D_x=D_y$"原文误为"$D_w=D_v$"——译者注。

定理 33　$\neg\forall xAx \to \exists x\neg Ax$ 一般不是一阶可定义的。

证明： 考虑下列结构，其中所有的世界都有一个共同的论域 N。

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & & \alpha & & & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdots \leftarrow & & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \rightarrow & (\alpha < \omega_1) \\ 0 & 1 & 2 & & & -1 & 0 & +1 & & & \end{array}$$

即，〈W，$\subseteq$〉有关系模式

$$\langle N \oplus (\omega_1 \odot \mathbb{Z}), \leq \rangle$$

声明 6　$\neg\forall xAx \to \exists x\neg Ax$ 在这个框架中为真。

证明： 从任意世界 x 开始，假设 $\exists x\neg Ax$ 不成立。对每个 $n \in N$，An 一定在某个（α_n，k_n）$> x$ 处成立。因为 ω_1 的共尾数超过了 ω，所以就存在某个 $\beta < \omega_1$ 使得（β，0）$>$（α_n，k_n）（$n \in N$）。现在，根据遗传性，$\forall xAx$ 一定在（β，0）处成立——因而，$\neg\forall xAx$ 在 x 处为假。 ■

接下来，（一如以往）根据骆文汉姆-斯科伦定理，这个框架有可数的初等子框架（的确，〈IN，$\leqslant$〉本身就是一个）。但是在这些子框架当中，我们的原则可能为假：使用某个可数的共尾序列 x_0，x_1，…，令 $A0$ 自 x_0 以上为真，$A1$ 自 x_1 以上为真，等等。如早先的证明那样就可以得到定理的结论。 ■

为结束列举例子，可能注意到，上面公理的一个著名的弱的变异的确定义了一阶限制。

例 27　马尔科夫（Markov）原则

$$\forall x(Ax \vee \neg Ax) \wedge \neg\neg\exists xAx \to \exists xAx$$

定义了关系条件

$$\forall x \exists y \supseteq x \forall z \supseteq y \forall d(Edz \to Edx)$$

对应理论仍是令人惊奇。

附加：量子逻辑

在内涵背景中对应理论还没有一致地取得成功。以一个更具问题的例子作为结束似乎显得公平些。

[Goldblatt. 1974] 提出了量子逻辑的一种可能的语义。克里普克框架现在被视为某种物理系统的"状态"的集合，再加上一种"正交性"（$\perp$）关系。从物理的目的得到 $\perp$ 的两种事前条件，即禁自返性和对称性。但是此外，还有对命题取值的"容许范围"限制：这些集合 $X \subseteq W$ 将是正交地闭的：

$$\forall x \in (W - X) \exists y \in (W - X)(\neg x \perp y \wedge \forall z \in X\, y \perp z)$$

主要的真值条件是关于合取（解释如通常）和否定，解释如下：

$\neg\phi$ 在 x 处为真如果 x 与所有 ϕ - 世界都是正交的

当∨通过¬，∧根据德摩根律来定义时，这种语义使得量子逻辑的通常原则都是有效的。但是，一个关键的原则却是无效的，即正交-模公理

$$p\leftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge\neg(p\wedge q))$$

这个公理在量子逻辑的希尔伯特空间语义中有种自然的出发点——它是正交-模格表示为合适的向量空间的子空间代数的关键基石。因此，一个极小的期待是，随着对正交关系⊥做某种限制会有某种有启发性的对应出现。

实际当中还没有发生这样的事情。量子逻辑学家转向一般框架，便利有效的正交模正是一般框架的定义。尽管这样掩饰，事实却仍是关系的可能世界观点在此做不了它的对应职责。这是一个妨碍，或是一种暗示，表明不必惧怕不费力气地过度运用克里普克语义？

1.4　结　　论

在纯的技术层面上，对应理论是一门应用学科。经典工具借自模型论和泛代数。对应理论则为这些源学科回报以大范围的（反例）例子，也给出了推广到高阶逻辑的其他恰当地选择的片断的前景（参考［van Benthem. 1983］）。

从更哲学的观点看，对应理论的全部可以说成是，找出可能世界语义学真正为我们做了些什么。给出概念方面的建议是一个方面，另一个方面是真正地探寻它们的深度。系统地研究从内涵的观点看可能世界结构与从经典的观点来看这二者间的联系，乃是探索由语义所获得的益处。本章从这样一个观察开始："复杂的"模态公理被证明是表达了"简单的"经典条件（即一阶的条件）。我们已经考察了这种表达的范围和局限，以及相关的现象。特别是，这些局限已经相当地清楚——有了它们，就有了克里普克语义的富有成果的运用的局限。当然，这个哲学结论对于所有语义都成立。但是，通过诚实的劳动我们获得了道义上的发言权利。

致谢

系统的模态模型论的经典导论仍是［Segerberg. 1971］。来自经典模型论更为复杂的工具的初步应用可以在［Fine. 1975］中找到。由艾萨基亚（L. Esakia），托马森、戈德布莱特和布洛克发展了初等水平之上的代数联系。两个好的概述是［Blok. 1976］和［Goldblatt. 1979］。［Thomason. 1975］给出了一个恰当的角度来

看模态逻辑，这样模态逻辑就成为二阶逻辑的一个片断。［Sahlqvist. 1975］给出了真正意义上的对应理论的早期面貌，模态逻辑对应理论的完整概述可以在［van Benthem. 1983］找到，时态逻辑情形则在［van Benthem. 1985］中。但是，除了直觉主义的论文［Rodenburg. 1982］外，其他情况的研究还是处于初步状态。

附录（1997）

本章于1984年第一次出版。在这段时间里，模态逻辑已经发展了，但是我们原来给出的基本结构仍是可以的。因此，我们未改变旧版而仅是增加了进一步发展的一个简短编年史，包括一些未解问题的答案。一般来说，对应方法已经成为纯模态逻辑或者应用模态逻辑中的一个有用的技术工具，而它们自己却还未形成一个主要的研究领域。［van Benthem. 1996A］给出了一个更具原则性的动机，其中，对应分析被视为语言和计算当中语义现象的逻辑“核心理论”的哲学寻求的中心部分。特别地，对应建议引入新的多种类模型，包括在时间和计算研究中“状态”和“路径”的可判定的几何图形。

扩展到内涵逻辑的其他分支

对应理论的第一个有意义扩展涉及直觉主义逻辑。这牵涉到下述的新特征：所有赋值都必须是遗传的，从而导致公式的真在关系序上向上保持。［Rodenburg. 1986］详细考察了这个领域。他特别证明了，蕴涵-合取片断完全是一阶的，而析取可以导致非一阶性。另外，他引入了语义表列方法来清晰地描述一阶对应式。最后一个有意思的特征是，罗登伯格运用一个二阶真值条件来分析直觉主义的贝特模型：如果一个析取式的析取支“阻挡”了所有的未来通道，那么它是真的。这些被证明服从于带点和路径的二种类的框架上的对应分析。限制赋值也出现在相干逻辑的三元关系模型上。一个完整的对应分析在［Kurtonina. 1995］中给出，它分析了处理具有下面这样一些特征时所具有的特别效果：特别的点（现实世界）、非标准联结词（包括一个新的乘积合取）及在范畴逻辑中用于分析语法的更弱的非布尔片断（参考［van Benthem. 1991；Moortgat. 1996］）。［van der Hoek. 1992］进一步把对应理论扩展到认知逻辑，而［Thijsse. 1992；Jaspars. 1994；Huertas. 1994］则扩展到部分逻辑。在标准的时序逻辑中，有人提出了对于“凸面”命题具有限制赋值的对应（参考［van Benthem. 1983；1986；1995B］）。但同时，以区间为基础的更为丰富的模态语言的大多数公理都具有一阶“萨奎斯特形式”［Venema. 1991］。［Zanardo. 1994］给出了分叉时空的模态-时序模型的对应。最后，已经证明，对应方法在代数逻辑中非常有用。［Venema. 1991；Marx & Venema. 1996］沿此方向系统地研究了关系代数和柱状代数，

指出了大多数熟悉的代数公理的萨奎斯特形式，并计算了代数的“原子结构”上它们的框架限制。这在代数逻辑和模态逻辑之间建立了比我们以前的对偶更为宽阔的桥梁。

限制的框架类

对应行为在特别的框架类上可能会变化。本章中我们已经看到限制到传递框架上的一些效果。但是，人们也可以考察非一阶框架类。[van Benthem. 1989A]考虑有穷框架，其中，麦肯西公理等仍是定义了一个非一阶条件。在这一领域中，标准的、基于紧致性的模型论技术不再起作用，并且它们一定要被更仔细的组合分析所替代。这种组合分析利用比较模型的埃伦芬赫特-弗雷斯博弈来进行（更一般地，模态逻辑的有穷模型论仍未被开发）。罗森（[Rosen. 1997]）证明了一些有意思的迁移结果，显示出对于一般的一阶逻辑而言的更好的有穷模型论行为。除了其他工作之外，[Doets. 1987] 还极其深入地利用模态埃伦芬赫特博弈考察了可数框架上和良基框架上的对应（例如，所谓的法因公理被证明在可数的框架上是一阶的）。

复杂性

本章包含了关于一元 Π^1_1-公式的可定义性问题的（高度）复杂性的结果。① 已经表明，处理其中的模态片断更为艰难。[Chagrova. 1991] 已经发现了模态公式一阶性的复杂性的下限：**M1** 是不可判定的。她的方法（涉及将明斯基（Minsky）机器计算归约到对应陈述）似乎也可以用于产生非算术的复杂性。反过来，[Wolter. 1993] 已经证明，一阶陈述的模态可定义性是不可判定的：即，**P1** 也是不可判定的。在 [Spaan. 1993] 中可以找到模态逻辑的时间和空间复杂性，以及“跳跃”——它可能出现在带有不同算子词汇的情况中——的更一般考察。[Fine. 1985] 中所定义的所谓的“子框架逻辑”的可判定性结果已经有推进了；多元模态逻辑中，复杂性从成分“迁移”到复合（参考 [Kracht & Wolter. 1991]）。

对应和完全性

模态逻辑的主要事业一直是寻找各种各样框架类的完全性定理。对应理论绕开了这一演绎信息而集中于直接的语义可定义性。然而，[Kracht. 1993] 表明，通过模态可定义性的一种适当的推广形式，这两者如何可以结合在一处。[Venema. 1991] 中推广的萨奎斯特定理也许是这种结果中最强的，它证明：在适当丰

① 其中的“Π^1_1-公式”原文误为“Φ^1_1-公式”——译者注。

富的模态语言（对于每个模态词，都含有通达它的可及关系的所有方向的相配形式）中，容许极小的模态逻辑之外的自然的推理规则，萨奎斯特定理的对应性和完全性在它们的证明中会聚在一起。证明的本质地方如下。与标准情况不同，在这些更为丰富的系统的标准亨金模型中，对应证明中使用的所有可定义的子集（如单元素集或后继集）都是模态可定义的。模态推理规则的直接的框架对应可以在［van Benthem. 1985］中找到。在这些框架上，后者对应于非 Π_1^1 二阶公式。[①] 但是除了文献中一些零散的报告外，模态推理规则的对应理论仍未得到研究。

与代数逻辑的对偶

代数方法在找寻关于对应的重要结果，如刻画模态可定义的一阶公式的戈德布莱特－托马森定理，一直是非常有价值的。然而，［van Benthem. 1993B］以纯模型论的途径再对该定理进行了分析，它不是以描述框架而是以饱和模型为中心。这里没有明确的优劣偏向，因为它恰恰是代数观点和模型论观点之间的相互作用，这种作用硕果累累。关于代数逻辑中对应方法的一些新的运用，以及带模态算子的布尔代数的新的集合论表示，参考［Marx. 1995；Mikulas. 1995］。例如，马克斯（Marx）对代数融合和逻辑内插之间的对偶进行了深入研究。后一方法不再使用如耀森-塔斯基表示中的简单的二元关系，而是更复杂的集合论的构造（有穷关系上的模态对应出现在［van Benthem. 1992］中，其中包含有逻辑程序的一种有穷邻域语义）。发展出一种这样推广的关系结构的系统对应理论就成了下一个挑战。

扩展的模态逻辑

过去十年里模态逻辑中最惊人的发展也许就是一直系统地使用具有更强表达能力、带有关系框架上更强的模态算子的形式系统。一种直接的步骤是“多模态逻辑”，在带更多可及关系的框架上具有相同的表达力。后一趋势的例子有动态命题逻辑的加标模态词 $<i>$（参考［Harel. 1984；Goldblatt. 1987；Harel, et al. 1998］），或者通达（$n+1$）元可及关系的 n 元模态词，正如在相干逻辑或范畴逻辑中发生的那样（参考［Dunn. 2001；Kurtonina. 1995］）。这些扩展的模态逻辑的对应理论是可以直接得到的，但是有些有趣的“迁移”问题：公理完全性、有穷模型性或者计算复杂性，参考［Spaan. 1993；Fine & Schurz. 1996］。迁移可能非常依赖于各种模态词之间的联系。模态谓词逻辑就是个恰当的例子，它的理

① 其中的“Π_1^1-公式”原文误为“Φ_1^1-公式”——译者注。

论在过去的十年里已经迅速发展了。［van Benthem. 1993A］概述了由吉拉第（Ghilardi）和谢特曼（Shehtman）所做的一些突出贡献。

从对应的观点看，更有意思的是在原来的二元关系框架上表达力的增加。对于时序逻辑，后一个研究方向是由坎普定理（Kamp's Theorem）开始的，这个定理是关于连续的线序上的｛自从，直到｝语言的函项完全性。在模态逻辑中，第一个系统的工作源于“索菲亚学派”（Sofia School）：参考，如［Gargov & Passy. 1990；Goranko. 1990；Vakarelov 1991；1996］。这些论文或者研究各种新算子的加法，如在所有（无论关系是否可及的）世界上取值的全称模态词，或者研究多模态词的各种运算，如“程序交”。新的框架构造如“复制”被创造出来以处理这些新事物。［De Rijke. 1992］考察了“区分模态词”（“在至少一个不同的世界中”）。已经表明，它有用且易于处理（被视为一种一般“信息论”的）。扩展模态逻辑的一个更为一般的计划出现在［van Benthem. 1990］中，但是其技术角度在开创性论文［Gabby. 1981］中也非常清楚。最后，［de Rijke. 1993］对扩展的模态语言的可定义性和对应做了模型论方面的广泛考察，得到了本章中的许多结果的推广（像框架保持定理或者能行的对应算法）。下面是所有这些主题的另外一角度的考察。

另一做法：直接的框架理论

人们也可以根据图的数学性质更直接地分析模态逻辑的框架内容。［Fine. 1985］是这一趋势的开创之作，它强调了对于取子框架下封闭的框架类完全的“子框架逻辑”的好的行为（这样的逻辑无“存在承诺”）。这里一阶性不是突出要考虑的：例如，洛伯公理定义了一个简单的子框架逻辑。查可哈雅什夫（［Zakharyashev. 1992；1995］）从这个观点深入地研究了模态逻辑。然而，他将模态逻辑直接分成框架保持行为的三个阶段又可以反映到二阶句法中，因而导致了在那个更高层次上的一种对应理论。查格诺夫（Chagrov）和查可哈雅什夫即将出版的专著提供了更多的背景，包括参考早先的俄罗斯资料（回溯到 19 世纪 60 年代的扬科夫（Jankov））。关于此处列出的许多主题，另一个极好的资料是［Chagrov，et al. 1996］的那一章。

模型，双仿和不变性

当前文献关注的重点还有一个值得注意的变化就是，语义兴趣的主要对象从框架移向了模型。这一转变使得所有基本模态逻辑都可通过我们的标准翻译成为一阶的。然后提出的主要问题就是，什么使得模态逻辑特别地成为一阶逻辑的亚种。特别地，对于基本模态逻辑来说，什么是基本语义的不变性、哪个应当扮演

像一阶模型论中的埃伦芬赫特博弈或者“部分同构”的角色？此处一个关键结果是，语义刻画一阶逻辑（模逻辑等值）的模态片断恰好就是那些含一个自由变元的、对于生成子模型和我们的“Z字形关系”不变的那些公式［van Benthem. 1976］。用现代的术语来说，这些公式恰好是那些对双仿不变的公式。［Hennessy & Milner. 1985］也发展了后一种联系，为具有不同力量的模态形式配以或粗或细的过程等值。模态逻辑和计算过程理论之间所得到的类似的最新结果参考［van Benthem & Bergstra. 1995；van Benthem, et al. 1994；Ponse, et al. 1995］中的各篇文稿。这一发展已经让人们对模态形式系统和一阶逻辑之间的联系有了新的看法。例如，在这两种逻辑的元理论之间存在惊人的相似，［de Rijke. 1993］和［Andréka, et al. 1998］考察了这种相似的准确程度，并对之做出了解释。特别地，作为一种一般地说明模态逻辑的可能选择，后一篇文章考察了一阶逻辑的有穷变元片断的层级（有关这一观点参考［Gabby. 1981；van Benthem. 1991］）。颇具特色的是，模态公式在其标准翻译中仅需两个变元来表示世界，时态公式仅需三个等。有穷变元片断都是自然的，并且可以被视为函项完全的模态形式系统（参考［Immerman & Kozen. 1987］中对坎普定理的基于博弈且具有深刻见解的分析）。然而，［Andréka, et al. 1998］也发现了一大批否定的性质，并且最终提出了另一种模态语言分类，它的分类根据是限制有界量词的原子。所得到的“安保片段”也可以像基本模态语言那样被分析，其中包括类似的双仿技术。特别地，这些双仿现在联系的是对象的有穷序列而不是单个世界，正如在多维模态逻辑中的那样（关于这种形式系统的理论参考［Marx & Venema. 1996］）。它们的对应理论被看做是关于任意的一阶关系的自然推广的框架条件，但还是有待于理解。［van Benthem. 1996B］通过这些技术对用于计算和认知的动态逻辑进行了一般研究。它所考虑的中心问题之一是与过程等价（如双仿一样）相关的模态过程逻辑的表达完全性。

与高阶逻辑和集合论的联系

从一阶逻辑对应可进入到高阶可定义性。有时模态语言本身暗示了这种移动。例如，在动态命题逻辑中，程序迭代（iteration）自然地翻译成有穷重复的可数析取。因此翻译成无穷标准语言 $L_{\omega_1\omega}$ 似乎就是明显的例行公事。无穷框架对应在［van Benthem. 1983］中有简要的考察，而［de Rijke. 1993；van Benthem & Bergstra. 1995］研究了它们的模态模型论。当然，人们可以在此恢复平衡，考虑 L_ω 的一个无穷模态对应部分，它允许任意集合的合取与析取。这将是最自然的、对双仿不变的形式系统。［Barwise & Moss. 1995］按此路线，将模型上的真与框架上的对应联系起来（［Barwise & van Benthem. 1996］给出了关于无穷模态逻辑

的另一种观点)。在许多原创的结果中，他们证明了，一个模态公式的无穷代入在一个模型 $\mathfrak{M}$ 中为真当且仅当它在 $\mathfrak{M}$ 上取极大双仿所得模型的框架坍塌中(在通常的二阶意义上)为真。作为一个直接推论，无穷模态逻辑中模态公式的框架对应蕴涵着模型对应。(它的逆是否成立仍是未知的。)这种类型的考察起初的目的，是它将模态逻辑与(非良基)集合论联系起来。这种联系在[d'Agostino. 1995]中得到了进一步的考察，其中还提出了模态公理的更为复杂的对应问题。例如，她证明，二阶的洛伯公理在一个框架中成立当且仅当这个框架是传递的而它关于极大双仿的坍塌是禁自返的。因此，更一般地，关于许多对应的有趣之处并不在于它们总是必须要将模态公理归约到一阶公理，而是在于它们把模态原则重述成为更明了的经典形式系统。后者的另一个自然的选择是一元二阶 Π_1^1 逻辑(参考[Doets & van Benthem. 2001])。特别是，[Doets. 1989]证明了模态完全性定理有时候如何可以被扩展以覆盖这一整个语言。另外，许多能行的翻译方法(见以下)被证明对这种更广泛的语言是起作用的。最后，[van Benthem. 1989B]指出，恰当地重述二阶 Π_1^1 公式的一阶对应理论如何自然地推广了处理 AI 文献中所谓界限(Circumscription)的可计算形式。(这个界限涉及从一阶公理的二阶"谓词极小"封闭进行推理；参考[Lifshitz. 1985])。①

翻译

在用内涵逻辑证明定理的可计算性文献中，对应已经成为一个显著的主题。许多算法已经被提出来了，其中的一些重新发现了代入方法和它的同类(参考[Simmons. 1994])，甚至二阶逻辑中的更老的结果(参考[Doherty, et al. 1994])，其他的结果与新的"函数"翻译相关，这种翻译得到了更好的调整，以为完全而标准的斯科伦化及消解服务(参考[Ohlbach. 1991；1993])。这些算法中的一些有个有意思的特征就是，它们也得到了二阶模态原则的一些有用的等值式。例如，典型地非一阶的麦肯西公理有一个自然的等值式，它既对个体世界也对斯科伦函数进行量化，而斯科伦函数见证了它的(非萨奎斯特)前件。最后我们提一下[d'Agostino, et al. 1995]中标准翻译的集合论解释的使用，这种解释将全称模态词看成是描述了一个幂集。为更好地发挥作用，这个翻译也假设有一般框架的一个清晰的公理系统及这样一条公理：一个框架中的任意一点的关系后继形成一个集合。这种观点的变化将模态逻辑中的定理证明归约到弱可计算集合论中的演绎。也可以用公式来表达许多这样的翻译以用来处理扩展的模态形式

① 本段落中两次出现的"Π_1^1-公式"原文均误为"Φ_1^1-公式"——译者注。

系统或者是二阶逻辑更大的片断。

设计新的逻辑

最后，对应技术已经用于“解构”标准逻辑和设计新的逻辑。例如，人们可以在可能世界模型（“加标转换系统”）上来解释一阶谓词逻辑，其中，指派被抽象状态所代替，而这些抽象状态与模拟变元变换的抽象关系 R_x 相联系。这样，标准的谓词逻辑有效性就表达了有趣的框架性质，限制了可能的计算，例如，通过丘奇-罗塞（Church-Rosser）相汇性质（它与一阶公理 $\exists y \forall x \phi \rightarrow \forall x \exists y \phi$ 相匹配）。另外，人们可能希望在可容许的赋值上添加一些限制，例如公理 $Py \rightarrow \forall x Py$ 或者 $Py \rightarrow [y/x]Px$ 的“遗传限制”（[van Benthem. 1997；1996B] 有详细讨论）。这些抽象模型反映了在因个体变元而存在的可容许对象值之间的某种依赖性。[Alechina & van Benthem. 1993；Alechina. 1995] 更明确地考察了这一主题，它们设计了“依赖模型”上的新的广义量词逻辑，这首先是由 M. 范拉巴衡（Michiel van Lambalgen）提出的——其中，可能的公理的力量至少最初是根据（萨奎斯特）框架对应来权衡的。与一阶逻辑的相关的模态方法可以在 [Venema. 1991；Marx. 1995] 中找到。

出版期间增加的（1999）

手册按照它自己的步骤出版了。自从为该附录写最新资料以来已经过去两年了。这里是一些进一步的有意思的条目。[d'Agostino. 1998] 包含了无穷模态逻辑中有关可定义性的新材料，这也是巴威斯（Barwise）和莫斯（Moss）所进一步探究的一个主题。[Meyer Viol. 1995] 有一些直觉主义谓词逻辑的对应例子，表明了中间公理可能有相当令人惊讶的内容。[Hollenberg. 1998] 广泛地研究了模态过程语言中的可定义性、不变性及安全性。[Gerbrandy. 1998] 有一些关于在非良基集合论背景下的模态可定义性和双仿不变性的有趣定理，以及它们对于认知更新的动态逻辑的运用。[Grädel. 1999] 对扩展了模态逻辑、也包含了不动点算子的可判定的安保一阶语言的计划中所取得的进步是一个极好的综述。[van Benthem. 1998] 是关于可定义性/对应范例，以及相应的研究模态逻辑和经典逻辑的“互相照应”的方法的最新综述。最后，[Blackburn, de Rijke & Venema. 2001；van Benthem. 1999] 是两本严肃认真地考察对应的模态逻辑教材。

参考文献

Ajtai M. 1979. Isomorphism and higher-order equivalence. *Annals of Mathematical Logic*, 16: 181 ~ 233

Alechina N. 1995. *Modal Quantifiers*. PhD thesis. ILLC, University of Amsterdam

Alechina N, van Benthem J. 1998. Modal quantification over structured domains. // de Rijke M, ed. *Advances in Intensional Logic*. Dordrecht: Kluwer: 1 ~ 28

Andréka H, van Benthem J, Németi L. 1995. Back and forth between modal logic and classical logic. *Bulletin of the Interest Group in Pure and Applied Logic*, 3: 685 ~ 720. Revised version. 1998. Modal logics and bounded fragments of predicate logic. *Journal of Philosophical Logic*, 27: 217 ~ 274

Barwise J, Moss L. 1995. *Vicious Circles*. Stanford: CSLI Publications

Barwise J, van Benthem J. 1999. Interpolation, preservation, and pebble games. *Journal of Symbolic Logic*, 64: 846 ~ 858

Blackburn P, de Rijke M, Venema Y. 2001. *Modal Logic*. Cambridge: Cambridge University Press

Blok W J. 1976. *Varieties of interior algebras*. PhD thesis. Mathematical Institute, University of Amsterdam

Boolos G. 1979. *The Unprovability of Consistency*. Cambridge: Cambridge University Press

Burgess J P. 1979. Logic and time. *Journal of Symbolic Logic*, 44: 566 ~ 582

Burgess J P. 1981. Quick completeness proofs for some logics of conditionals. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 22: 76 ~ 84

Chagrova L. 1991. An undecidable problem in correspondence theory. *Journal of Symbolic Logic*, 56: 1261 ~ 1272

Chagrov A, Wolter F, Zakharyashev M. 2001. Advanced modal logic // Gabbay D, Guenthner F, eds. *Handbook of Philosophical Logic*, Vol. III, 2nd edition. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Chang C C, Keisler H J. 1973. *Model Theory*. Amsterdam: North-Holland

d'Agostino G. 1995. Model and frame correspondence with bisimulation collapses. Manuscript. ILLC, University of Amsterdam

d'Agostino G. 1998. *Modal Logic and Non-Well-Founded Set Theory: Bisimulation, Translation and Interpolation*. PhD thesis. ILLC, University of Amsterdam

d' Agostino G, van Benthem J, Montanari A. 1997. Modal deduction in second-order logic and set theory. *Journal of Logic and Computation*, 7: 251 ~ 265

de Rijke M. 1992. The modal logic of inequality. *Journal of Symbolic Logic*, 57: 566 ~ 584

de Rijke M. 1993. *Extending Modal Logics*. PhD thesis. ILLC, University of Amsterdam

de Rijke M, ed. 1993. *Diamonds and Defaults*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

de Rijke M, ed. 1997. *Advances in Intensional Logic*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Doets K. 1987. *Completeness and Definability, Applications of the Ehrenfeucht Game in Second-Order*

and Intensional Logic. PhD thesis. Mathematical Institute, University of Amsterdam

Doets K. 1989. Monadic Π_1^1 theories of Π_1^1 properties. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 30: 224 ~ 240

Doets K, van Benthem J. 2001. Higher-order logic. // Gabbay D, Guenthner F, eds. *Handbook of Philosophical Logic*. Vol. 1, 2nd edition (Vol. I., 1st edition, 1983). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Doherty P, Łukasiewicz W, Szalas A. 1994. Computing circumscription revisited: A reduction algorithm. Tech Report LiTH-IDA-R-94-42, Institutionen for Datavetenskap, University of Linköping

Dunn M. 2001. Relevant logic. // Gabbay D, Guenthner F, eds. *Handbook of Philosophical Logic*. Vol. VIII, 2nd edition (Vol. III., 1st edition, 1985). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Fine K. 1974. An incomplete logic containing S4. *Theoria*, 40: 23 ~ 29

Fine K. 1975. Some connections between elementary and modal logic. // Kanger S, ed. *Proceedings of the 3rd Scandinavian Logic Symposium*. Amsterdam: North-Holland

Fine K. 1985. Logics containing K4. Part II. *Journal of Symbolic Logic*, 50: 619 ~ 651

Fine K, Schurz R. 1996. Transfer theorems for multimodal logics // Copeland J, ed. *Logic and Reality. Essays on the Legacy of Arthur Prior*. Oxford: Oxford University Press

Fitch F B. 1973. A correlation between modal reduction principles and properties of relations. *Journal of Philosophical Logic*, 2: 97 ~ 101

Gabbay D. 1976. *Investigations in Modal and Tense Logics*. Dordrecht: Reidel

Gabbay D. 1981. Expressive functional completeness in tense logic // Mönnich U, ed. *Aspects of Philosophical Logic*. Dordrecht: Reidel: 91 ~ 117

Gargov G, Passy S. 1990. A note on Boolean modal logic. // Petkov P, ed. *Mathematical Logic*. New York: Plenum Press: 311 ~ 321

Gerbrandy J. 1998. *Bisimulations on Planet Kripke*. PhD thesis. ILLC, University of Amsterdam

Goldblatt R I. 1974. Semantic analysis of orthologic. *Journal of Philosophical Logic*, 3: 19 ~ 35

Goldblatt R I. 1979. Metamathematics of modal logic. *Reports on Mathematical Logic*, 6: 4 ~ 77. 7: 21 ~ 52

Goldblatt R I. 1987. *Logics of Time and Computation*. CSLI Lecture Notes. Vol 7. Chicago University Press

Goldblatt R I, Thomason S K. 1974. Axiomatic classes in propositional modal logic. // Crossley J, ed. *Algebra and Logic*. Lecture Notes in Mathematics 450. Berlin: Springer

Goranko V. 1990. Modal definability in enriched languages. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 31: 81 ~ 105

Grädel E. 1999. Decision procedures for guarded logics. Lehrstuhl Mathematische Grundlagen der Informatik, RWTH Aachen

Grätzer G. 1968. *Universal Algebra*. Princeton: Van Nostrand

Harel D. 1984. Dynamic logic. // Gabbay D, Guenthner F, eds. *Handbook of Philosophical Logic*.

Vol. II. Dordrecht: Reidel

Harel D, Kozen D, Tiuryn J. 1998. *Dynamic Logic.* Cambridge (Mass.): The MIT Press

Henkin L. 1950. Completeness in the theory of types. *Journal of Symbolic Logic*, 15: 81 ~ 91

Henkin L, Monk D, Tarski A. 1971. *Cylindric Algebras I.* Amsterdam: North-Holland

Hennessy M, Milner R. 1985. Algebraic laws for indeterminism and concurrency. *Journal of the ACM*, 32: 137 ~ 162

Hollenberg M. 1998. *Logic and Bisimulation.* PhD Thesis. Institute of Philosophy, Utrecht University

Huertas A. 1994. *Modal Logics of Predicates and Partial and Heterogeneous Non-Classical Logic.* PhD thesis. Department of Logic, History and Philosophy of Science, Autonomous University of Barcelona

Humberstone I L. 1979. Interval semantics for tense logics. *Journal of Philosophical Logic*, 8: 171 ~ 196

Immermann N, Kozen D. 1987. Definability with bounded number of bound variables // *Proceedings 2nd IEEE Symposium on Logic in Computer Science*: 236 ~ 244

Jaspars J. 1994. *Calculi for Constructive Communication. The Dynamics of Partial States.* PhD thesis. ILLC, University of Amsterdam, and Institute for Language and Knowledge Technology, University of Tilburg

Jennings R, Johnstone D, Schotch P. 1980. Universal first-order definability in modal logic. *Zeitschrift fuer Mathematische Logik*, 26: 327 ~ 330

Kozen D. 1979. On the duality of dynamic algebras and Kripke models. New York: Tech Report RC 7893, IBM, Thomas J. Watson Research Center

Kracht M. 1993. How completeness and correspondence theory got married // de Rijke M, ed. *Diamonds and Defaults*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers: 175 ~ 214

Kracht M, Wolter F. 1991. Properties of independently axiomatizable bimodal logics. *Journal of Symbolic Logic*, 56: 1469 ~ 1485

Kurtonina N. 1995. *Frames and Labels. A Modal Analysis of Categorial Inference.* PhD thesis. ILLC, University of Amsterdam, and Onderzoeksinstituut voor Taal en Spraak UiL-OTS, Universiteit Utrecht

Lewis D. 1973. Counterfactuals and comparative possibility. *Journal of Philosophical Logic*, 2: 4 ~ 18

Lifshitz V. 1985. Computing circumscription // *Proceedings IJCAI-85*: 121 ~ 127

Marx M. 1995. *Algebraic Relativization and Arrow Logic.* PhD thesis. ILLC, University of Amsterdam

Marx M, Venema Y. 1996. *Multi-Dimensional Modal Logic.* Studies in Pure and Applied Logic. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

McTaggart J M E. 1908. The unreality of time. *Mind*, 17: 457 ~ 474

Meyer Viol W. 1995. *Instantial Logic.* PhD thesis. Utrecht Institute for Linguistics UiL-OTS, and ILLC, University of Amsterdam

Mikulas S. 1995. *Taming Logics.* PhD thesis. ILLC, University of Amsterdam

Moortgat M. 1996. Type-logical grammar. // van Benthem J, ter Meulen A, eds. *Handbook of Logic*

and Language. Amsterdam: Elsevier Science Publishers

Ohlbach H J. 1991. Semantics-based translation methods for modal logics. *Journal of Logic and Computation*, 1: 691 ~ 746

Ohlbach H J. 1993. Translation methods for non-classical logics, an overview. *Bulletin of the IGPL*, 1: 69 ~ 89

Ponse A, de Rijke M, Venema Y, eds. 1995. *Modal Logic and Process Algebra—A Bisimulation Perspective*. CSLI Lecture Notes. Cambridge University Press

Rasiowa H, Sikorski R. 1970. *The Mathematics of Metamathematics*. Warsaw: Polish Scientific Publishers

Rodenburg P. 1982. Intuitionistic correspondence theory. Tech Report, Mathematical Institute. University of Amsterdam

Rodenburg P. 1986. *Intuitionistic Correspondence Theory*. PhD thesis. Mathematical Institute, University of Amsterdam

Rosen E. 1997. Modal logic over finite structures. *Journal of Logic, Language and Information*, 4: 427 ~ 439

Sahlqvist H. 1975. Completeness and correspondence in the first- and second-order semantics for modal logic. // Kanger S, ed. *Proceedings of the 3rd Scandinavian Logic Symposium*, North-Holland, Amsterdam: 110 ~ 143

Segerberg K. 1971. *An Essay in Classical Modal Logic*. Filosofiska Studier, vol. 13, University of Uppsala

Simmons H. 1994. The monotonous elimination of predicate variables. *Journal of Logic and Computation*, 4: 23 ~ 68

Smoryński C S. 1973. Applications of Kripke models. // Troelstra A S. *Meta-Mathematical Investigations of Intuitionistic Arithmetic and Analysis*. Lecture Notes in Mathematics 344, Berlin: Springer, 329 ~ 391

Spaan E. 1993. *Complexity of Modal Logics*. PhD thesis. ILLC, University of Amsterdam

Thijsse E. 1992. *Partial Logic and Knowledge Representation*. PhD thesis. Institute for Language and Knowledge Technology, University of Tilburg

Thomason S K. 1972. Semantic analysis of tense logics. *Journal of Symbolic Logic*, 37: 150 ~ 158

Thomason S K. 1974. An incompleteness theorem in modal logic. *Theoria*, 40: 30 ~ 34

Thomason S K. 1975. Reduction of second-order logic to modal logic I. *Zeitschrift fuer Mathematische Logik*, 21: 107 ~ 114

Vakarelov D. 1991. A modal logic for similarity relations in Pawlak information systems. *Fundamenta Informaticae*, 15: 61 ~ 79

Vakarelov D. 1996. Many-dimensional arrow structures: arrow logics II. // Marx M, Pólos L, Masuch M, eds. *Arrow Logic and Multi-modal Logic*. Stanford: CSLI Publications: 141 ~ 187

van Benthem J. 1976. *Modal Correspondence Theory*. PhD thesis. Institut voor Grondslagenonderzoek,

University of Amsterdam

van Benthem J. 1978. Two simple incomplete modal logics. *Theoria*, 44: 25 ~ 37

van Benthem J. 1979A. Canonical modal logics and ultrafilter extensions. *Journal of Symbolic Logic*, 44: 1 ~ 8

van Benthem J. 1979B. Syntactic aspects of modal incompleteness theorems. *Theoria*, 45: 67 ~ 81

van Benthem J. 1980. Some kinds of modal completeness. *Studia Logica*, 39: 125 ~ 141

van Benthem J. 1981A. Intuitionistic definability, Tech Report, Philosophical Institute, University of Groningen

van Benthem J. 1981B. Possible worlds semantics for classical logic. Tech Report ZW-8018. Mathematical Institute, University of Groningen

van Benthem J. 1985. *Modal Logic and Classical Logic*. Napoli: Bibliopolis

van Benthem J. 1986. Tenses in real time. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 32: 61 ~ 72

van Benthem J. 1989A. Notes on modal definability. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 30: 20 ~ 35

van Benthem J. 1989B. Semantic parallels in natural language and computation. // Ebbinghaus H D, et al. eds. *Logic Colloquium. 1987. Granada*. Amsterdam: North-Holland: 331 ~ 375

van Benthem J. 1991A. *The Logic of Time*. Revised edition of Synthese Library, Vol. 156, Dordrecht: Reidel. 1983. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

van Benthem J. 1991B. *Language in Action. Categories, Lambdas and Dynamic Logic*. Vol. 130. Studies in Logic, Amsterdam: North-Holland

van Benthem J. 1992. Logic as programming. *Fundamenta Informaticae*, 17: 285 ~ 317

van Benthem J. 1993A. Beyond accessibility: functional models for modal logic. // de Rijke M, ed. *Diamonds and Defaults*. Dordrecht: Kluwer: 1 ~ 18

van Benthem J. 1993B. Modal frame classes revisited. *Fundamenta Informaticae*, 18: 307 ~ 317

van Benthem J. 1995A. Modal logic as a theory of information. // Copeland J, ed. *Logic and Reality. Essays on the Legacy of Arthur Prior*. Oxford: Oxford University Press: 135 ~ 186

van Benthem J. 1995B. Temporal logic. // Gabbay D, Hogger C, Robinson J, eds. *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*. Vol. 4. Oxford: Oxford University Press, 241 ~ 350

van Benthem J. 1995C. Modal foundations for predicate logic. Tech Report LP-95-07, ILLC. // Final publication in Orlowska E, ed. 1999. *Logic at Work. Memorial for Elena Rasiowa*. Studia Logica Library. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers: 39 ~ 54

van Benthem J. 1996A. Contents versus wrappings. // Marx M, Pólos L, Masuch M, eds. *Arrow Logic and Multi-Modal Logic*. Stanford: CSLI Publications: 203 ~ 219

van Benthem J. 1996B. *Exploring Logical Dynamics*. Stanford: CSLI Publications

van Benthem J. 1998. Modal logic in two gestalts. // de Rijke M, Wansing H, Zakharyashev M, eds.

Advances in Modal Logic, Vol. II. Uppsala. Stanford: CSLI Publications: 73 ~ 100

van Benthem J. 1999. *Intensional Logic*. Electronic lecture notes, Stanford University, http://staff.science.uva.nl/~johan/

van Benthem J, Bergstra J. 1995. Logic of transition systems. *Journal of Logic, Language and Information*, 3: 247 ~ 283

van Benthem J, van Eijck J, Stebletsova V. 1994. Modal logic, transition systems and processes. *Logic and Computation*, 4: 811 ~ 855

van der Hoek W. 1992. *Modalities for Reasoning about Knowledge and Quantities*. PhD thesis. Department of Computer Science, Free University, Amsterdam

Venema Y. 1991. *Many-Dimensional Modal Logic*. PhD thesis. ILLC, University of Amsterdam

White M J. 1981. Modal-tense logic incompleteness and the Master Argument. Department of philosophy, University of Arizona

Winnie J A. 1977. The causal theory of space-time. // Earman J S, et al. eds. *Foundations of Space-Time Theories*. University of Minnesota Press: 134 ~ 205

Wolter F. 1993. *Lattices of Modal Logics*. PhD thesis. Zweites Mathematisches Institut, Freie Universität, Berlin

Zakharyaschev M. 1992. Canonical formuls for K4. Part I: Basic results. *Journal of Symbolic Logic*, 57: 1377 ~ 1402

Zakharyaschev M. 1995. Canonical formulas for modal and superintuitionistic logics: a short outline. // de Rijke M, ed. *Modal Logic and its Neighbours*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Zanardo A. 1994. Branching-time logic with quantification over branches. The point of view of modal logic. Reprint 25, Institute for Mathematics, University of Padova

2 两个格式塔中的模态逻辑*

刘新文/译　裘江杰/校

2.1　作为一种生活方式的翻译

2.1.1　基本模态逻辑和一阶逻辑的模态片断

当今使用的诸模态语言，它们本身可以视为内涵逻辑王国中的一个种族。但是，经由翻译，它们也可成为标准逻辑语言——大多数指一阶的，有时也指高阶的或无穷语言的——片断。这些翻译反映了模态算子在可能世界模型中的真值条件。一个基本的例子是关于可能性和必然性的基本模态语言，其标准翻译 *ST* 激起了对应理论（[van Benthem. 1976；1985]）：

存在模态词$\Diamond p$ 对应到约束量词$\exists y(Rxy \wedge Py)$，后者表示当前世界 x 有一个 p 在其上成立的后继 y。

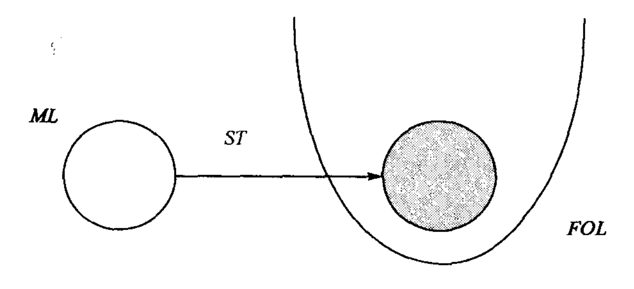


图 2-1　标准翻译

* Modal Logic in Two Gestalts // de Rijke M, Wansing H, Zakharyashev M, eds. *Advances in Modal Logic* Ⅱ. Stanford: CSLI Publications: 1998. 73 ~ 100.

以这种方式，基本模态语言转换成了关于可能世界模型的一阶语言的一个片断，该一阶语言基于一个恰当的相似型：有一个表示可达关系的二元谓词及（许多个）指示世界局部性质的一元谓词。在一阶语言中确定这一模态片断的基本语义特征是一个语义不变性质，这个语义特征通过比较“双仿节点”，借助模型之间恰当的结构等价来度量表达力：

定理 1（模态不变性定理，MIT）　一个一阶公式可由一个模态公式定义，当且仅当它是对双仿不变的。

这一基本模态片断有一些漂亮的性质。对于许多常见的需要来说，它具有恰当的表达力；基于双仿而非经典的潜同构，它有一个优美的、拥有所有经典元定理（紧致性、内插性、沃斯-塔斯基性等）的模型论；它还有一个漂亮的证明论。此外，基本模态逻辑是可判定的，这一点与完整的一阶逻辑不一样。在本文中，我们将推广这一观察。论文的主体围绕模型类的极小模态逻辑（称为“普遍”或“核心”逻辑或许更为恰当）及关于模型的一阶语义（而非关于框架的二阶语义）。

2.1.2 模态真值条件的一般翻译

可以用同样的翻译观点来看其他具有良定义语义（表达力更强）的模态、时态或动态语言。或许在 AiML-II 会议的每一篇论文中都能找到这样的例子。下面是众多情形中的两个：

直觉主义模态逻辑

$A \Rightarrow \Diamond B \qquad \forall y(x \leq y \rightarrow (Ay \rightarrow \exists z\ (Ryz \ \&\ Bz)))$

可解释性逻辑

$A \rhd B \qquad \forall yz(Rxyz \rightarrow (Ay \rightarrow \exists u\ (Szu \ \&\ Bu)))$

我们对模态逻辑的一般研究将发展下面两个观点：模态形式系统就其本身而言及它们的标准对应物对语言设计及元逻辑分析的目标是一前一后的。更激进地说，我们把这都看成是一个所需的格式塔转换的例子：须要发展这种把它们看成两者的能力。这种前后研究有种种好处。在一个更广阔的视野中来审视我们所钟爱的模态语言将允许我们从标准逻辑中移植（transfer）已有的结果，这会节省时间和精力（当然，对于较大的标准语言，并不是每一个性质都能显而易见地移植到模态片断。这常常是需要付出更多努力的……）。一个更宽泛的标准环境甚至可能使我们考虑重新设计那些倔强的模态语言。一个例子是位于一种恰当的二维模态逻辑当中的 Since/Until 时态逻辑，这个逻辑的基本算子都为双重量词 $\exists\forall$，看起来，这样处理比把它们看作单个量词的简单叠置要好一点。但相反方向的往来

也依然“有利可图”。这种前后的观点使得我们可以自然地推广先前那些将模态逻辑放在更广的标准逻辑中而发展出来的概念和技巧。本文中将给出许多示例。由此也见将系统的翻译观点应用于模态逻辑具有实践和理论的双重价值。

2.2　句法的良好结构：量词安保

本节的结果主要基于［Andréka，et al. 1998］，我们这里省略的定义和证明及对进一步的结果的阐述请参见该文。

2.2.1　从基本模态逻辑到安保片段

这里是模态逻辑在一阶逻辑中更为一般的推进。我们可以把上面存在模态词对应的形式扩展到更为一般的、称为*安保量化式*的多元格式

$$\exists y(G(x,y)\ \&\ \phi(x,y))$$

这里，约束存在量词的“安保原子” $G(x,\ y)$ 中其变元可以有任意的顺序且不必各不相同。约束量化式是一个已知的概念，比如，集合论中重要的“绝对” Δ_0-公式的定义就已采用。这里的新思想是，安保整个地限制随后的矩阵命题 $\phi(x,y)$ 可能断言的对象群体（允许除矩阵中 x、y 以外的新对象，就像在标准 Δ_0-公式中那样，将导致不可判定性）。一阶谓词逻辑中具有这一语形的子语言称为*安保片段* GF。

GF 也具有类似于模态不变性定理中基本模态逻辑那样的语义刻画，不过现在是在*安保双仿*下的不变性。*安保双仿*实为经典的“潜同构”，即它们是两个模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{N}$ 之间的有穷部分同构的非空族 I，只是在向前向后条件中仅有安保公式所选择的新元素序组。更确切地说（见图 2-2），

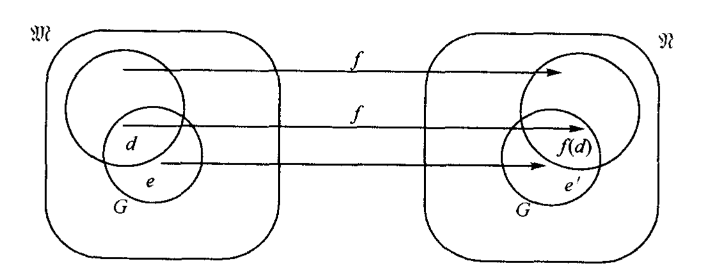


图 2-2　安保双仿

令 $f\in I$，安保原子 $G(d,e)$ 在 $\mathfrak{M}$ 上成立，其中 d 在 f 的论域中，e 为新的对象序组。那么在另一个模型 $\mathfrak{N}$ 中有对象序组 e' 使得 $G(f(d),\ e')$ 在 $\mathfrak{N}$ 上成立，

并且在 I 中有 f 的扩展把 e 中的对象映到 e' 中相应的对象。反方向亦然。

以这种明显的方式，我们就推广了基本的模态双仿。

定理 2　一个一阶公式对安保双仿不变当且仅当它可由安保公式定义。

证明：举起（lift）MIT 的模态证明到一阶逻辑。 ■

下面是使 GF 显得重要的一个主要结果。其证明依然是推广一种模态推理方法，即（使用“准模型”的）过滤：

定理 3　GF 是可判定的。

证明：为后面的参考起见，我们重复［Andréka，et al. 1998］中的基本步骤。所用的方法实际上是模态过滤论证的一个推广。每个可满足的 GF-公式 ϕ 都有一个有穷的所谓“准模型”，准模型论域中的元素是由 ϕ 的子公式组成的、具有能行可计算大小的“类型”——而且反过来，每个这样的准模型都生成 ϕ 的一个模型。这样，一个安保公式是否可满足就等价于它是否具有有穷的准模型：而这是一个可判定的性质。

从标准模型到有穷准模型　假定公式 ϕ 在标准模型 $\mathfrak{M}$ 中可满足。令 V 是出现在 ϕ 中（自由或约束）变元组成的集合。接下来，我们把注意力集中在由 ϕ 及其所有子公式构成的有穷集合 Sub_{ϕ}，它对只用到 V 中的变元、不改变句法形式的联立代入（simultaneous substitution）封闭（据本证明之后的注记，这是可行的：联立代入不需使用已有约束变元以外的变元）。每一个变元指派都确立一个该集合中有穷多个公式组成的“类型”Δ。

我们的准模型的论域将由模型 $\mathfrak{M}$ 中实现的有穷多个类型组成。此外，很明显，在这一句法结构中，对每一个安保公式 $\exists y(Qxy \wedge \psi(x,y)) \in \Delta$ 都有一个类型 Δ' 使得

（i）$Qxy, \psi(x,y) \in \Delta'$

（ii）Δ 和 Δ' 对自由变元只取自 x 中的“未受影响的”公式一致

定义 1

（i）令 F 表示所有长度 $\leqslant |\phi|$、只用到 V 中变元的安保公式组成的有穷集合。注意，$\phi \in F$，而且 F 对子公式和“易字”封闭。

（ii）一个 F-类型是 F 的一个子集 Δ，满足

（a）对 $\neg\psi \in F$，$\neg\psi \in \Delta$　　当且仅当　　并非 $\psi \in \Delta$

（b）对 $\psi \wedge \xi \in F$，$\psi \wedge \xi \in \Delta$　　当且仅当　　$\psi \in \Delta$ 且 $\xi \in \Delta$

（c）对 $\exists y\psi \in F$，$[u/y]\ \psi \in \Delta$　　蕴涵　　$\exists y\psi \in \Delta$

这里 $[u/y]\ \psi$ 是对 ψ 进行联立代入的结果：把在 y 中的每一个自由变元都

代入成 u 中相应的变元。

(iii) 令 y 是一个变元序列，Δ 和 Δ' 都是类型。我们以 $\Delta =_y \Delta'$ 表示 Δ 和 Δ' 有相同的其自由变元不同于 y 的公式

(iv) 一个准模型是一个 F-类型集 S，对每一个 $\Delta \in S$ 和每个安保公式 $\exists y(Qxy \wedge \psi) \in \Delta$，都有类型 $\Delta' \in S$ 使得 Qxy、$\psi(x,y) \in \Delta'$，并且 $\Delta =_y \Delta'$

称 ϕ 在一个准模型中成立当且仅当在这个模型中有某 Δ 使 $\phi \in \Delta$。

很明显，如果 ϕ 被某个模型所满足，那么 ϕ 也在某个准模型中成立。 ■

从准模型到标准模型　从任意一个准模型 $\mathfrak{M}$ 出发，我们可以定义一个标准模型 $\mathfrak{N}$。称 π 为一条路径，若 $\pi = \langle \Delta_1, \phi_1, \cdots, \Delta_n, \phi_n, \Delta_{n+1} \rangle$，其中 Δ_1，…，Δ_{n+1} 都是 $\mathfrak{M}$ 中的类型，每一个公式 ϕ_i 都形如 $\exists y(Qxy \wedge \psi)_i \in \Delta_i$ 且 Δ_{i+1} 是如上描述的可替换的类型（即 Qxy 和 $\psi(x, y)$ 都在 Δ_{i+1} 中且 $\Delta_{i+1} =_y \Delta_i$）。我们说 y 中的变元从 Δ_i 到 Δ_{i+1} 改变了它们的值（其余的变元没有变）。最后，称变元 z 在路径 π 中为新的，是说 $|\pi| = 1$ 或者 z 的值在 π 的最后一段（last round）被改变。$\mathfrak{N}$ 中的对象都是序对 (π, z)，其中 π 是一条路径，而 z 在 π 中为新的。下一步，我们在这些对象上解释谓词。$I(Q)$ 对对象序列 $\langle (\pi_j, x_j) \rangle_{j \in J}$ 成立，当且仅当各个路径 π_j 组成一个以包含为序的线序，该线序有一个极大路径 π^* 使得原子 $Q\langle x_j \rangle_{j \in J} \in \Delta^*$（$\Delta^*$ 为 π^* 上的最后一个类型）而且不存在 (π_j, x_j) 使得 x_j 在通往 π^* 的终点的另外路径上改变它的值。最后，我们为每一个路径定义一个指派 s_π。我们令 $s_\pi(x) =_{\mathrm{def}} (\pi', x)$，$\pi'$ 是 π^* 的具有下列性质的唯一子路径：x 在其端点是新的而之后一直保持不改变。

这一模型构造的正确性可以证明，在路径 π 上的最后一个类型 $last(\pi)$ 上：

引理 1（真值引理）　对任 $\mathfrak{N}$ 中路径 π，对任公式 $\psi \in F$，$\mathfrak{N}$，$s_\pi \models \psi$ 当且仅当 $\psi \in last(\pi)$。

证明：施归纳于 ψ。由类型对 $\neg$、$\wedge$ 的闭包条件，布尔情况直接可得。原子公式：解释函数 I 中的线性条件，以及准模型中的"$=_y$-条件"确保"未受影响的公式"能沿着路径移植，由此可直接推演得到。为后面的参考起见，我们重复有界存在量词 $\exists y(Qxy \wedge \psi(x,y))$ 的完整论证。

(i) 设 $\exists y(Qxy \wedge \psi(x,y)) \in last(\pi)$。那么存在一条扩充的路径 $\pi^+ =_{\mathrm{def}} \pi$ 与 $\langle \exists y(Qxy \wedge \psi(x,y))$，$\Delta' \rangle$ 的并置，其中 Δ' 是 Δ 的如上选择的后继类型，使得 Qxy，$\psi(x,y) \in \Delta'$（满足自由变元在 x 的未受影响的公式的移植条件）。对于 y_i 属于 y，所有的对象 (π^+, y_i) 在这里都是新的。由定义，原子安保 $I(Q)$ 对于对象序组 $s_{\pi^+}(y), s_{\pi^+}(x) (= s_\pi(x))$ 成立。由归纳假设，也有 $\mathfrak{N}$，$s_{\pi^+} \models \psi(x,y)$。因此，$\mathfrak{N}, s_{\pi^+} \models \exists y(Qxy \wedge \psi(x,y))$。并且由于标准模型 $\mathfrak{N}$ 中的 x-不变性，因此

确实有 $\mathfrak{N},s_\pi\models\exists y(Qxy\wedge\psi(x,y))$

(ii) 反过来，假设 $\mathfrak{N}$，$s_\pi\models\exists y(Qxy\wedge\psi(x,y))$。由真值定义，存在一些对象 $d_i=(\pi_i, u_i)$ 使得 $\mathfrak{N}$，$s^{y}_{\pi d}\models Qxy\wedge\psi(x,y)$（这里，除了把所有的 y_i 指派给 d_i 之外，$s^{y}_{\pi d}$与 s_π 在别处的值相同）。特别是 $I(Q)$ 对于对象 $s_\pi(x)$，d_i 成立。这就给出了一幅分叉路径的图画。所有的 $s_\pi(x)$ 都已经由 π 里面的阶段 π^* 引入，当时 d_i 已经（被插入或者）被加上以构造成一个原子公式 Qxy 在其终点为真的极大序列 π^+。分叉是这样的，x 的值从 π^* 向后不再改变，不管是转向 π 还是 π^+（这是我们量词上的原子安保真正进来的唯一的情形）。现在我们对这一“分叉情形”做更为详细的分析（图2-3）：

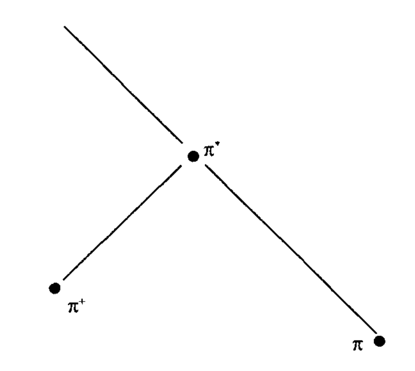


图2-3　作为见证的分叉

首先，变元 u_i 都不一定是 y_i。比如说，π^+ 有 $s_{\pi^+}(u_i)=(\pi_i, u_i)=d_i$。这样，指派 $s^{y}_{\pi d}$与 s_{π^+} 在 $\boldsymbol{x}$ 上是一致的，并且对于所有的 $y_i\in\boldsymbol{y}$ 我们有 $s^{y}_{\pi d}(y_i)=d_i=s_{\pi^+}(u_i)$。然后，由 $\mathfrak{N}$，$s^{y}_{\pi d}\models Qxy\wedge\psi$ 及上述观察，我们有 $\mathfrak{N}$，$s_{\pi^+}\models[u/y]Qxy$ 和 $\mathfrak{N}$，$s_{\pi^+}\models[u/y]\psi$。由归纳假设，$[u/y]\psi\in last(\pi^+)$。而且，从对 π^+ 的初始描述中，（由原子谓词的解释）我们立即可得 $[u/y]Qxy\in last(\pi^+)$。这样，再由类型的闭包条件（b）和（c），我们得 $\exists y(Qxy\wedge\psi(x,y))\in last(\pi^+)$。最后，在 π^* 分叉时，$\boldsymbol{x}$ 的值没有改变，因此，各条路径上沿着后继类型的未受影响的公式的移植条件保证了 $\exists y(Qxy\wedge\psi(x,y))$ 也在 $last(\pi)$ 中。■

这样，拥有一个准模型就蕴涵着拥有一个真正的模型，定理由此得到证明。

■

评论1　有穷变元片断都对联立代入封闭。

我们的证明假定了相关公式的有穷集合是对联立代入封闭的——没有扩大相关变元的集合 V。为看到这一点，考虑 k-变元（变元为 $\boldsymbol{x}=x_1, \cdots, x_k$）片断中

任意的代入$[x:=f(x)]\phi$。原子代入都是直接的。我们也可以在布尔公式内进行代入。唯一有意思的情形是当我们碰到存在量词的时候：$[x:=f(x)]\exists x_j\psi$。这时，指派条件 $x_j:=f(x_j)$ 将不起作用，从而可以忽略。因此，在剩下的代入 σ 中，至少有一个变元 x_k 在任意指派中的右边根本没有用到。但这样一来，下述公式很容易证明与原来的公式等值：$\exists x_k[x_j:=x_k, \sigma]\ \psi$。这就给出了一个简单的递归算法来计算我们片断之内的代入（但是如果语言中带有函数符，这一结果就不再成立：例子如$[x:=fxy]\ \exists yRxy$）。 ■

模态语言的这一分析与一个有名的替代：经由有穷变元片断，是不相交的。在元理论和复杂性方面，安保片段的表现似乎比有穷变元片断更好（［Andréka, et al. 1998］从正反两方面进行了综述）。确实，*GF* 提供了一个"句法量词限制"的新视角，非常不同于一阶逻辑通常的可判定片断。后者是通过限制谓词的主目数、量词前缀或者变元数目来进行的（参阅［Börger, et al. 1996］中的综述）。因此上述关于安保片段的结论本身就显示了模态逻辑是如何能促进开发经典逻辑的。

2.2.2　模态语言的安保分析

作为直接的应用，当模态语言的模态词被翻译到 *GF* 中时它们有一个可判定的极小逻辑。下面是一些例子：

（1）基本时序逻辑：前驱上的存在过去量词$\exists y(Ryx \ \& \ Py)$ 都是安保的（对将来量词也是如此）；

（2）相干逻辑：三元蕴涵式$\forall yz(Rxyz\to(Ay\to Bz))$ 和合取式$\exists yz(Rxyz \ \& \ Ay \ \& \ Bz)$ 是安保的；

（3）"柱状相对化集合代数"的代数逻辑 CRS：其中相对化提供了统一的安保。

有时候，寻找一个恰当的翻译是需要一点机智的。例如，作为一个挑战，考虑基本模态语言的"二阶"邻域语义学。它包含了世界 w 和（作为"邻域"的）世界集 X 之间的一个二元关系 R；这里可以说

$w\models\Diamond\phi$ 当且仅当　存在使得 RwX 成立的这样一个集合 X，其元素都满足 ϕ

这样得到的极小逻辑比极小模态逻辑 K 还要弱，它失去了可能词对析取的可分配性。现在，新的真值条件明显可以写成下述二阶记法：$\exists X(RwX \ \& \ \forall y(y\in X\to\phi(y)))$。然而，如果我们把公式看成是一个二种类的一阶公式，那么它变成了安保的——同时注意，这一变动对邻域语义学的功能并无影响。更多的安保分析例子可以在［van Benthem. 1999A］中找到，在那里分析了扩张的模态逻辑中

各种“索非亚”片段。

人们通常在一个极小逻辑上加入额外的框架条件。但是，甚至对于基本模态语言，这种作法也未必适合 *GF*（我们从未承诺过任何一种万灵妙药）！例如，对称性是安保的，但传递性却不是——可以通过建立一个传递和另一个非传递这样两个模型及两者之间的一个安保双仿来证明。这一事实表明了劳动的自然分工。安保片段的发现是为解释一般模态形式系统的可判定性之用。但是，除了它，在那些特定的表现好的框架类的特殊理论中肯定还有大量的可判定性资源（不过可以为了享受安保分析范围内的某些精妙之处而继续读下去……）。无论如何，我们的主要观点并不是把 *GF* 作为某种唯一偏爱的模态系统来兜售。我们宣传的毋宁是对量词约束方式这一基本问题及安保分析的实际能力的研究，在这一研究当中，当模态词出现的时候，我们特别关注于模态词句法上的良好结构。

2.3　捆绑与不可判定性的边缘

本节的结果大部分取自［van Benthem. 1997］中未发表的论文“Extending the Guarded Fragment to Betweenness and Pair Arrows”。

2.3.1　从单个安保到合取式安保

让我们再回到一般模态语言。除 *GF* 之外还有很多自然的可判定片断。它们常常涉及安保原子的合取。一个典型的例子是时序逻辑中点的中间状态，它自然地导致非安保的断言。

例1　模态词 *UNTIL AB* 说的是 $\exists y(x<y\wedge Ay\wedge\forall z((x<z\wedge z<y)\rightarrow Bz))$。它的中间状态条件有一个组合的安保 $x<z\wedge z<y$。这一断言不在 *GF* 之内，即便 *UNTIL*（及其对偶 *SINCE*）的极小时序逻辑是可判定的。

另外一个例证是关系代数中的相对化技术，把经典上不可判定的系统弱化为可判定。在所谓的箭号逻辑中，人们把箭号当作初始对象进行量化，把关系处理成这些对象上的一元谓词。典型的条件是关系复合的真值条件——其基础部分包含了一个初始的三元关系箭号复合 *Comp*：

$$RoS(a)\quad \text{当且仅当}\quad \exists bc(R(b)\&S(c)\ \&\ Comp(a,bc))$$

这是安保的，因此基本箭号逻辑的可判定性立即可以从 *GF* 的可判定性得到。但是代数逻辑学家对相对化有一个稍微具体一点的技术，依然使关系为序对集，但现在是基于任意的“最高的关系” U（而非限于完整的卡氏平方 $D\times D$）上。即

例 2　序对箭号模型定义其二元复合如下：$RoS =_{def} \lambda xy \bullet \exists z((Uxz \wedge Uzy) \wedge Rxz \wedge Szy)$，其中带了一个复合安保 $Uxz \wedge Uzy$。

这里，并不是说原子的任意合取都是可接受的安保。

命题 1　用任意合取扩张的 *GF* 是不可判定的。

证明： 已知一阶逻辑的 3-变元片段是不可判定的。我们这里将 3-变元片段的可满足性问题能行归约为带任意合取式安保之 *GF* 的可满足性问题。易见，3-变元公式 ϕ 可满足当且仅当它到某个新的三元谓词 U 的安保相对化 $(\phi)^U$ 在某个完整的卡氏积 $U = D \times D \times D$ 中可满足。现在，只要考察后一个断言——它可被表成下面的公式——的可满足性即可，

$$(\phi)^U \ \& \ CART(U)$$

其中 $CART(U)$ 为下述公式的合取

(i)　$\exists xyz\ Uxyz$

(ii)　$\forall xyz(Uxyz \to \wedge\{Urst \mid r,s,t \in \{x,y,z\}\})$

(iii)　$\forall xyzuvw((Uxyz \ \& \ Uuvw) \to \wedge\{Urst \mid r,s,t \in \{x,y,z,u,v,w\}\})$

后一个公式确实在带有任意安保合取式的 *GF* 之中。■

2.3.2　捆绑片段

这一节我们讨论概括了上面两个正面例子的一个严格意义上的推广。我们称一个量化式是成对安保的，或者捆绑的，是说它有下述的句法格式：

$\exists y(\wedge Qxy \wedge \psi(x,y))$

其中 $\wedge Qxy$ 是其自由变元取自 y 和 x 的原子公式的合取，并且

其中 $y \cup x$ 中的每两个变元都在这些原子公式的至少一个中一起出现

一个明显的归纳定义就能给出这个捆绑片段 *PF*，其中矩阵公式 $\psi(x,y)$ 本身来自于 *PF*。上述时序公式和箭号公式都是捆绑的（就 *UNTIL* 而言，匹配 $x < y$ 在“外面之上”已经给出）。作为比较，上面的公式 $CART(U)$ 就不是捆绑的。另外一个典型的非捆绑的例子是传递性：

$\forall y_1 y_2 y_3((y_1 < y_2 \wedge y_2 < y_3) \to y_1 < y_3)$，其中 y_1，y_3 没有在安保原子中一起出现：这一关系条件的关键之处是准确地获得 y_1 与 y_3 之间的一个关系。

定理 4　*PF* 是可判定的。

证明： 我们分析适于 *GF* 的代表性证明。上面准模型的定义可以继续沿用，不用做大的改变，其利用“路径模型”代表也一样。现在，我们允许利用约束量化式新的概括形式的路径扩充。关键结果仍然是真值引理，其意为，安保公式在由一条路径导出的指派下成立当且仅当这些公式出现在被编码在那条路径的最后

的那个集合之中。从右到左的步骤与前面一样。这样，关键之处还是逆方向的组合问题，这一方向证明的主要步骤在图2-3中已经说明。就像上面那样，对原子安保的合取，真存在公式的论证仍然有用。我们要如前那样寻找极大位置π^*。再在给定原子命题的真值条件下，对于每一个新的变元y，成对安保性要求新的y-值的路径线性地适合原来出现x-值的路径。因此，它或者位于后者之上，或者它从π^*开始扩充了它。此外，这一条件也可以应用到两者所有的新值y——而且由此，在最坏的情况下这些也构成某个扩充了π^*的线性路径π^+，直到某个引入了最高的新的y-值的极大节点。接下来论证跟前面一样，因为所有相关的y-原子都在π^+上成立，且沿着π^*向后退时y-值不发生改变。至于在原来路径π上作为内插的那些新的y-值的各种情形则更简单（这里，我们频繁运用了一个原子中相关变元的值沿路径直到提到的最高变元的不变性。这需要对各种情形进行验证）。 ■

对于捆绑片段，当然也有一个在恰当强化的安保模拟下关于不变性的语义刻画，在这里就不作讨论了。

2.4　助推（boost）可判定性：无穷语言与不动点

上面的讨论尚未涉及安保分析的局限。因为有很多其他明显不成功的情形。一个有意思的情形是上述非成对安保的*传递性*。考虑模态逻辑**K4**。为何它是（非常容易地）可判定的？这里有两种可能的角度来剖析。一种是尝试扩张*PF*及其家族的句法范围，以发现更广的涵盖**K4**的可判定逻辑。我们怀疑这是否可行。传递性是*危险的*：已知它使得一阶片段不可判定［Börger, et al. 1996］。但是也有绕过这一困难的路，通过重新审视**K4**之判定性，我们在超越一阶逻辑的同时维持双仿不变的重要地位。回忆命题动态逻辑*PDL*（或者模态μ-演算）是可判定的。现在很容易看到——重新解释那些通常的可判性论证——**K4**也是*任意迭代模态词*［a^*］*的逻辑*，在这一逻辑上我们根本没有施加任何的框架限制。这是一个完全不同的策略。因为，*PDL*-语言不能定义模型的传递性！就像基本模态语言那样，它也是*双仿不变的*（用来定义迭代的那些无穷合取式不会影响这一点），而传递性则不然。

猜想　加入定义新断言的不动点而扩张的*GF*是可判定的。

我们对于所谓的“有穷分配”单调算子一起出现的那些作为特例的不动点有一个证明（后者在序数ω始终稳定）。自从本文的初稿出来之后，这一猜想已经由格瑞德（Grädel）和瓦路克威茨（Walukiewicz）肯定地解决了［Grädel &

Walukiewicz. 1999]。他们的证明基于树自动机（参阅 [Vardi. 1997]）：其仍可以有一个拟模型类似物。

该猜想的肯定解决或许可以看成著名的模态 μ-演算可判定的一个自然推广。这一演算是一种增加了用来定义新命题的不动点算子 $\mu p \cdot \phi(p)$ 的多模态逻辑（其中命题字母 p 在 ϕ 中的所有出现在句法上都是正的）。但这里有一个微妙之处。μ-演算只有其可能的不动点的一部分，即那些定义关于状态的断言的不动点。而它缺少的则是那些通过转换关系上的递归来定义新的程序构造的不动点。例如，传递闭包 $\langle a^* \rangle p$ 由不动点断言 $\mu q \cdot \langle a \rangle p \vee \langle a \rangle q$ 所模拟。但是二元关系上的自然的递归 $a^* = a \cup a; a^*$ 却不可直接表达。

问题　带有关系不动点的 μ-演算也是可判定的吗?

状态断言和状态转换之间的这一区分是自然的——而且它还会在随后各节中得到考虑。特别是，它对于安保片段及其家族也有意义。“状态递归”和“行为递归”是添加不动点算子的两种不同的方式。例如，基于不动点方程的状态谓词的有穷逼近依然在 *GF* 之内，而行为谓词的有穷逼近却未必如此。原因在于，把一个安保原子代入为任意的安保公式不保证一定得到安保公式（如把 $\exists y(Axy \wedge Qy)$ 中的 Axy 代入为 $\neg Rxy$）。对于行为表达式，只有所谓的安全格式才具有这种代入性质，“解开”成迭代安保量化式（在这里就不给出安全性的精确定义了：请参阅 [van Benthem. 1996；van Benthem. 1998B；Hollenberg. 1998——或者第 7 节中给出的梗概]。[Grädel & Walukiewicz. 1999] 也证明了带有任意行为不动点的 *GF* 是不可判定的）。特别是，在第 5 节的铺砖问题中还会显示乱用行为不动点的危险性，在那里，我们会看到行为谓词 *North* 和 *East* 的传递闭包将导致不可判定性。

评论 2　真值条件和框架条件之间的变换（shift）

我们对 **K4** 的新分析突现了模态逻辑中通常隐含的工作区分：即一般的真值条件和特殊的框架条件之间的区分。我们所看到的是，通过操作这两种语义特征之间的“平衡”可以获得相同的效果。另外一个例子是对称框架的“布劳维尔逻辑” **B**，它也是存在模态词 $\exists y(Rxy \wedge Ryx \wedge \phi(y))$ 的极小逻辑。这种平衡就其一般性来说远未理解透彻。

评论 3　可判定片段的高阶扩张

一阶逻辑的可判定片段并不只是弱化。它们还可以携带“额外的分量”，而这一分量是一阶逻辑作为一个整体不能负担的，如果不付出代价的话。稍前的不动点算子即提供了这样的一个例子：它们被添加到 *FOL*，就生成了无穷语言的极

富表达能力但也非常复杂的部分。但是若在模态语言上添加，它们似乎就不那么有害了。在 *AiML*-Ⅱ发现的另外一个例子是二阶量词“*most*”。在 *FOL* 的顶上，它建立了一个可以范畴地定义自然数、却又因此招致非常高的复杂性的逻辑。不过［Ohlbach & Koehler. 1998］的方法表明，带有一个新数字模态算子“a-后继是 A 比 b-后继是 B 更多”的基本模态逻辑仍然是可判定的。*GF* 带非标准广义量词的相似扩张的情形又怎样？

评论4　更弱的命题基础

像在描述逻辑中那样，可以基于一个更弱的命题逻辑上研究我们的主要问题：例如，只有合取加上存在及全称安保量词。这时，对可满足性和后承的复杂性会发生什么影响？另外，什么才是恰当的“有向双仿”（参阅［Kurtonina & de Rijke. 1997］）？

2.5　动态观点：从相继行为到平行行为

本节基于［van Benthem. 1997］中的未发表论文“Guarded Questions and Variations”中对动态逻辑的一个分析。

2.5.1　状态谓词对行为谓词

无具体观点的句法可判定性分析易盲目。一个强有力的、更集中的观点把模态语言动态地看成是对行为及其穿越状态引起的效果的描述。也就是说，把可能世界模型看成是进程图或者“加标转换系统”。直观上讲，*GF* 是关于状态的，其中状态可以由“安保行为”$G(x,y)$改变：或者从 x 到 y 或者从 x 到 x，y。这仍然像基本模态逻辑或命题动态逻辑，其中它描述的是相继行为的效果。与之相对，合取安保提出的是平行行为，其中不同的行为子（子进程）改变一个全局状态的某组成部分。下面是一个典型的、与“集体行为”同时出现的量词方式：

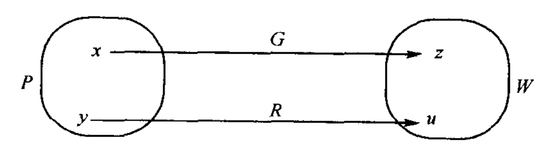


图2-4　平行行为

下面是一种具体的解释：可以令 P（“贫穷”）表示我们当前财产的总和，G 描述你在赌博场所的赌博行为，R 描述我抢劫银行的行为，而 W（“富裕”）表示我们新的个人经济状态的总和。描述这一结果的典型的量词方式是非安保的、非捆

绑的

$$Pxy \wedge \exists zu(Gxz \wedge Ryu \wedge Wzu)$$

我们可以把这看成是一个“积行为” $G \times R$，一类在进程理论中被研究的行为。给定其句法形状，我们就一定得出结论说“平行蕴涵不可判定性”吗？这样一个清晰的结果是富于魅力的。在 2.3 中，我们关于自由合取安保的否定性结论实际上指的是未受限制的平行会导致不可判定性。但是，现在带集体行为的情景更为精致，可以有更多的讨论。为了那一目的，我们需要从 *GF* 后退一点。

基本模态逻辑在行为谓词 Rxy 与状态谓词 Px 之间有一个直观的区分，这里 Rxy 表示沿着可达性连接（从 x 到 y）的跳跃；Px 表示对当前状态 x 进行静态断定。这一区分在 *GF* 的句法中被湮没了，在 *GF* 句法中，原子谓词可以不关心是描述状态之间的运动还是描述固定状态。但是，由维持这样一个区分，我们可以更自由地处理量词约束——在极端情况，甚至允许任意的合取。因此，下面我们在状态原子 Qx 和行为原子 Rx, y 之间都作出区分。这里行为原子中的逗号把左边的输入状态和右边的输出状态分隔开来。整个语言既有“行为公式”又有“状态公式”，它的句法也能被独立地使用——就像在命题动态逻辑中那样。这里是像这样的语言的一些具体的选择。我们从两个相继行为形式系统开始。

$GSAL_1$	行为公式	Rx, y
	状态公式	Qx，布尔公式，$\exists y(Rx,y \wedge \phi(y))$

这一“安保的状态 - 行为语言”描述从一个已知的状态到一个新状态的转换，但是没有任何已知状态和新状态之间的相互比较。这种输入 - 输出区分有各种效果。例如，行为原子 Rx, y 将会与它的逆 Ry, x 极大不同。此外，上面仅用行为 - 安保量词的限制具有使每个公式都依赖于自由变元的某个初始序组的效果。这样，$GSAL_1$ 中所有的公式都是“局部的”：没有闭的句子。与普通模态逻辑中一样，“可满足性”由此指称在一个模型中的某个状态序组上的局部真。而在模型中所有序组上的“全局可满足性”是一个非常强的概念。进一步，如果一些输入状态被允许再作为输出状态，那么我们需要其他的原子如 Rx, yx，而量词 $\exists y$ 只涉及输出状态的新的组成成分。很自然，一个矩阵陈述现在可以指称这些新的 y 加上持久稳固的 x。这些额外的句法特征把 $GSAL_1$ 转换成一个更有表达力的模态行为语言，我们称其为 $GSAL_2$。这两者都是 *GF* 的能行部分，因此继承了它的可判定性。注意，它们的句法没有明显的对行为谓词的运算。不过我们可以添加一些安全的运算（参阅 2-4）——主要是形如“选择”和“复合”这样的运算——而不增加这些片段的表达力来源。

2.5.2　平行行为的模态逻辑

上面都是“相继”行为。通过（不安全的!）合取及施加各种约束在量词方式上引入的平行真正地丰富了行为公式。这样，量词将集中原子合取式$\wedge Rx$，y中出现的所有输出状态。此外，为了强调新增物构成一融贯的状态，我们或许需要限定原子安保的出现或者在新的y之上或者在新的y加上保持下来的x之上。我们要列出一些可能的选择。但在此之前，有必要先提个醒。介绍它们的目的不在于给出一个烦人的形式语言目录——而是为了显示关于可判定性的各种表达力来源的效果。

$P\text{-}GSAL_1$	行为公式	Rx，y，合取式
	状态公式	Qx，布尔公式，$\exists y(\wedge Rx,y\wedge\phi(y))$
$P\text{-}GSAL_1^*$	行为公式	Rx，y，合取式
	状态公式	Qx，布尔公式，$\exists y(\wedge Rx,y\wedge Qy\wedge\phi(y))$

如前一样，两种语言都只允许描述某个状态序组的“局部”公式。第二个片断显然只是第一个片断的一部分。$P\text{-}GSAL_2$ 及 $P\text{-}GSAL_2^*$ 都以类似的方式定义，只是现在允许在x中的输入状态又可以作为输出状态而重复出现。这两种语言都不在GF中（即使 $P\text{-}GSAL_2^*$ 加上强安保），我们有：

$\exists y_1y_2$（Rx_1，$y_1\wedge Rx_2$，$y_2\wedge Qy_1y_2$）在 $P\text{-}GSAL_1^*$ 中但不在 GF 中

$\exists y_1y_2$（Rx_1，$y_1\wedge Sx_2$，$x_2y_2\wedge Qx_2y_1y_2$）在 $P\text{-}GSAL_2^*$ 中但不在 GF 中

通过一个仅为某种目的而进行的、特设的论证，人们可以得到下述结论：

定理 5　$P\text{-}GSAL_1^*$ 的可满足性是可判定的。

证明：我们再次从 GF 的可判定性证明及满足恰当的封闭条件的“类型”（即基于相关公式的有穷类得到的集合）组成的论域出发。从这我们构造类型路径以记录哪些公式在每个阶段都为真。我们对这一想法稍作修改，允许那些描述只在变元集的某个子集上的所需行为的类型。扩充路径的转换都明显地由出现在迄今最后类型中的带有“改变它们的值”的y的存在公式$\exists y(\wedge Rx,y\wedge\phi(y))$引起——而新的终点类型只包含自由变元都在$y$中的公式。一个结果是，作为输入变元的$x$的“生命时间”在这一步终止。在构造模型时，我们如前一样使用对象（π，x），这里x是路径π的终点上的能起作用的变元。对于谓词的解释，我们令

（1）一个状态原子公式Qd真，仅当d中的对象都在同一路径上、并且在最后的转换中被同时引入，这最后转换得到的类型包含带有d的（顺序相同的）变元的原子公式Q。

（2）一个行为原子公式Ad，e真，仅当所有它的对象都在同一路径上，并且

（就像（1）中那样）原子公式中对应的变元出现在某个转换的合取行为的前缀中。每一条路径都有一个关联的指派 s_π，它定义在路径的最后及倒数第二个类型中的变元上，把 x 指派给对象（π^*，x），这里的 π^* 是其中的 x 最后被改变的、π 的子路径。很清楚，行为原子将只在倒数第二个及最后阶段中的对象之间成立。这样，真值引理是说

一个（相关的）状态公式 ϕ 在一个路径的指派下成立，当且仅当 ϕ 以字的形式出现在该路径的最后那个类型上。

就像在原来 *GF* 的可判定性证明中那样，主要有两处有点意思。①首先是状态原子 Qx 情形。若 Qx 在 π 的最后类型中，那么——由我们对路径转换的结果类型之限制——它的变元都受这最后转换的影响。因此，我们就有了上述原子真值的条件。反过来，如果 Qx 在 s_π 下为真，但是这只可能在 Qx 明显出现并且其中的变元在路径 π 上同时被引入时才如此。②现在我们考虑存在量词 $\exists y(\wedge Rx,y \wedge Qy \wedge \phi(y))$ 情形。若其出现在最后的类型中，那么它为真——利用一个类似于 *GF* 中那样的证明：考虑由该存在公式引起的路径扩张。关键的情形是这样的公式在 s_π 下为真时：它将于 π 的最后类型中的何处出现。令某个对象序组 d 满足特殊的行为谓词，以及状态安保 Qy、矩阵陈述 $\phi(y)$。由真正行为谓词的定义，到当前路径的末端，d 必须已经被引入。此外，由于状态原子 Qy 成立，它们在一个转换中一起被引入，导致一个包含 Qy 的最后的类型 Δ（即，它们并不位于分开的分叉上）。记这扩张的路径为 π^+。其 s-指派把变元 y 指派为对象 d。然后由归纳假设，$\phi(y)$ 出现在 π^+ 的最后类型 Δ 中。但是这样一来，由准模型上一个明显的闭包条件，$\exists y(\wedge Rx,y \wedge Qy \wedge \phi(y))$ 出现在那一类型之前的类型中，而那是 π 的最后类型。■

我们认为（新的状态序组上不带安保条件的）$P\text{-}GSAL_1$ 也是可判定的。但是上面的证明方法不再起作用，原因在于并不能保证通过真正的存在量词 $\exists y(\wedge Rx, y)$ 引入的新状态构成一个在某个平行行为步骤中引入的“同时集合”（不同的 y 可能来自于不同的步骤）。当然上面那个证明的各个部分似乎仍容许有推广。至于那两个较强的平行行为语言 $P\text{-}GSAL_2$ 和 $P\text{-}GSAL_2^*$，我们把它们的可判定性留作未解决的问题。最后，注意上面的证明只关乎局部可满足性。它未解决（在一个模型的所有状态中为真的）*全局*可满足性的可判定性问题。我们将在后面再来讨论它。

评论 5　平行双仿

GSAL 的安保双仿可以扩充到适于更为丰富的 *PGAL* 语言的更为严格的双仿。这样，我们需要为联合行为提供另外的 Z 字形条件，类似下面

如果 aEb，并且 $Ra'c'$，$Sa''c''$，那么一定有 d'、d''且 $Rb'd'$，$Sb''d''$，使得 $c'c''Ed'd''$

平行行为语言是模态分析的新领域，我们提到它们的可判定性问题都没有解决。实际上它们的模型论也仍有待于进一步研究。

2.6 危险区域：栅格与铺砖问题

现在我们从一个不同的角度来处理这些问题，来确切地看看不可判定性出自何处。在此我们将借用［Spaan. 1993；Marx. 1997］中的观点。

2.6.1 编码铺砖问题

我们考虑铺砖问题的嵌入。不可判定的铺砖问题是这样的，把彩色的砖铺在无穷的 $N\times N$ 栅格上，其中，砖颜色取于某固定的有穷色彩集，每一块砖都有四条彩色的边，并且按照相邻两块砖边界具有相同颜色的要求铺。表达这些约束的一阶公式具有确定的 *P-GSAL* 形式，带有行为词 N（朝北一步）和 E（朝东一步）及描述颜色的状态谓词 Cx。下面是几个例子。颜色的邻接可以直接用下述形式的全称条件公式表达出来

$$\forall x:\forall y(Nx,y\rightarrow(C_1x\rightarrow\bigvee C_2y))$$
$$\forall x:\forall y(Ex,y\rightarrow(C_1x\rightarrow\bigvee C_2y))$$

其中，一元谓词 C_i 描述各种可能颜色的砖。一般的着色行为由下述形式的条件公式表达：

$$\forall x:\text{“至少且至多一个 } C \text{ 对 } x \text{ 成立”}$$

接着，紧要的从 x 看见的栅格模式由断言表达如下：

$$\forall x:\exists yNx,y\quad\forall x:\exists yEx,y$$

以及更为重要地，

$$\forall x:\forall yz((Nx,y\wedge Ex,z)\rightarrow\exists u(Ey,u\wedge Nz,u))$$

这些断言都在 $P\text{-}GSAL_1$ 之内，前面模以一个未约束的全称量词。我们记它们的合取式为 *TILE*。不难证明下述事实。

事实 1 $N\times N$ 可铺砖当且仅当 TILE 是可满足的。

证明：这里给出的是一个梗概（详细论证请参看［Blackburn, et al. 2001］）。显然，如果一个铺砖存在，那么恰当膨胀的 $N\times N$ 本身就可满足 *TILE*。反过来，若 *TILE* 可满足，任取 *TILE* 的一个模型。易定义从 $N\times N$ 到该模型论域的有如下性质的一个映射 f，它把原点映为模型的任意一个元素：

如果 y 是 x 的一个北边（东边）的邻居，那么 $Nf(x)$，$f(y)$（$Ef(x)$，$f(y)$）

为达到这一点，重复使用上面提到的三个公式来构造方形 $xNyEu$，$xEzNu$ 的一个栅格，它提供了所有必需的 f-值。然后，满足所有要求的 $N \times N$ 的着色可以从 f-值的 C-行为复制。■

2.6.2　究竟是什么导致不可判定性

上面这个结论告诉我们，平行行为的表达能力接近于编码栅格，因此可能会出现不可判定性问题。但是编码并不完全位于 $P\text{-}GSAL_1$ 之中。我们需要一个在前面未约束的全称量词来使 *TILE* 起作用——后者的危险是众所周知的。[Spaan. 1993] 表明，这么一点点增加，如何使可判定的模态逻辑变为了不可判定。她通过为该逻辑添加一个“全局模态词”来阐述这一点，但也看到一个这样的模态词在前面，即我们早先的全局可满足性，已经有所损害。一个可供选择的办法是只用那些（*TILE* 的模型中的）从固定的原点通过有穷多 E，N 步可以到达的点。这用到了关系 $N \cup E$ 的传递闭包，再一次超出了我们的片断——对可判定性来说甚至是更危险的，因为它可以嵌入 Σ_1^1-难的“循环铺砖”问题。这样，编码栅格加上某个弱的全称前束量化式的形式的混合将使得进程逻辑不可判定。然而，事情仍然很微妙。将全称量词添加到非合取约束的安保片段前面并无害处（对于扩充的模态逻辑中形式系统的类似观察请参阅［van Benthem. 1999A］）!

事实 2　一个全称前束量词的 *GF* 的可满足问题是可判定的。

证明：我们以任意包含一些全称量化安保公式 $\forall x\phi(x)$ 的类型出发。（对于相关的变元 u）把所有实例 $[u/x]\phi$ 加到准模型的类型中去。原先的树模型构造方法按现在的情况仍将起作用——最后，易证 ϕ 将对所有形如（π，u）的“路径对象”组成的序组成立。■

我们知道极小模态逻辑加上一个“全局模态词”仍然是可判定的。因此，正是平行行为与全称量化的混合产生了不可判定性。至于我们关于 *GF* 的观察的扩展，［Marx. 1997］提出了一个不可判定的、带有特有的全称霍恩框架条件的模态逻辑。因此，允许较大序组上的全称前束量化似乎已经就有问题了。

评论 6　变动编码

TILE 中的公式并没有满足语言 $P\text{-}GSAL_1^*$ 的句法约束，即量化式中的新对象必须同时被某个状态谓词 Q 安保而出现。但是我们可以通过在所有点上使用一个不足道的一元谓词 P 及所有点的序对上的一个平平无奇的二元谓词 Q 来修改 *TILE* 的定义：

$$\forall x: Px \quad \forall xy: Qxy$$

但是如果没有（双重）全称前束量词允许这一不足道的服从，那么如何修改这个必要的栅格编码及在 $P\text{-}GSAL_1^*$ 加到输出上的句法约束之内的恰当的铺砖恢复正常将是不清楚的。

总而言之，（带合取安保的）平行构造引来不可判定性。另一面，通常情况下它们并不如此（$P\text{-}GSAL_1$ 的可判定性可以为证），似乎主要是与全称前束量词联系着才有害的。我们在这里不讨论其间的可能性了。只是希望至少表明安保分析如何能以一种灵敏的方式探查到表达能力对可判定性的影响。

2.7　模型论：模拟与分裂（splitting）表达能力

在本节中，我们概略地讨论我们扩展的形式系统的模型论，得到的结论都将是基本模态逻辑已知结论的推广。[van Benthem. 1996] 第4、5章中相关结论的证明大都可以作某种直接显见的改动而用在这里。因此，我们省略了细节。

2.7.1　模型论中状态 - 行为的裂缝（split）

除了可判定性外，上述诸片断还有其他有意思的逻辑特征。我们考虑其中核心的双仿概念。首先，通过为状态谓词和行为谓词在安保双仿中指派不同的角色，它们之间的裂缝可以在标准一阶逻辑中得到一个具体的意义。行为谓词对向后 - 向前移动中的恰当的对象序组的选择进行调节，而状态谓词决定那些可以算是一个“部分同构”的“质量”。这两种有意思的角色之间的不同具有更为一般的意趣，因为标准一阶逻辑在其对非逻辑符号的处理上高度统一。在本文所关注的另外一个格式塔中，也可以设计出合并了这一区分的各种模态语言。我们将要给出的例子是命题动态逻辑的一个多状态形式。

2.7.2　多状态命题动态逻辑

这里是一个个案分析。考虑在有多个组成部分的“集体状态”上执行的相继行为。这需要从二元转换关系到有穷状态序组之间的一般有穷关系 Rxy 的变换。适用于此的模态语言是多维的，它有两类组成部分：状态谓词和行为谓词。新系统 PDL^* 需要一个两层次的句法，即 PDL 的句法加上某个适于两个层次的主目的簿记（位置数目，或本身作为“位置”的变元）。

断言：

状态原子 Px；所有的布尔运算；存在模态词 $\langle R\rangle_{x,y}$，意为把 y-状态公式替换 x-状态公式；以及（从 x-状态公式 ϕ 到 $x+z$-状态公式）"举起式（lifter）" $[\phi, T]_z$

程序：

行为原子 $R_{x,y}$；（主目相合适的）关系复合；（主目相合适的）并；测试 $(\phi)?$；（从变元集 x 到其某个子集 y 的）投射 $\Pi_{x,y}$

注意，这一语言的公式和程序都可以直接翻译到安保片段之中。因此，我们可以把它看成是一个模态形式系统或者一阶逻辑的一个片段。无论哪种方式，模型及真的定义都是显然的。特别地，举起式对一个 $x+z$-序组成立仅当 ϕ 对其 x-子序组成立。也可直接把原来（对 *PDL* 仍起作用的）模态双仿推广到恰当的安保双仿概念，只是稍微改变一下在 2.2.1 中分析 *GF* 时的向前 - 向后条件（这里有一个小的技术特征：需要在子 - 部分同构下封闭相关的族）。

我们将简要地讨论 PDL^* 的进一步的理论，可以视其为"模态"或"经典"的模型论，以演示一些有趣的论题。为了证明我们两层次语言的不变性定理——如在 *PDL* 中那样，我们也得确定另外一个基本概念（参阅［van Benthem. 1996］，第 5 章）。如前一样，我们称一个一阶公式 ϕ（x）对安保双仿 E 不变是指

$$\text{每当 } aEb\text{，那么 } \mathfrak{M}\models\phi(a) \text{ 当且仅当 } \mathfrak{N}\models\phi(b)$$

进一步，我们称一个一阶公式 π（x，y）对安保双仿安全如果。

> 若 E 是一个安保双仿（语言中的行为谓词满足其向前 - 向后条件），那么这向前 - 向后条件对于由 π 在两个模型 $\mathfrak{M}$、$\mathfrak{N}$ 中定义的新的关系自动成立

这样，安全公式定义我们模拟语义学"内部"、即我们的过程领域的转换关系。下面 PDL^* 的基本性质可以通过对公式和程序的联合归纳证明而得到。

命题 2

（1）所有公式都是对安保双仿不变的；

（2）所有程序都是对安保双仿安全的。

改写一下基本模态逻辑的相应论证也可以证明上面命题的逆命题也成立。

定理 6（动态不变定理）　对于所有的一阶公式 ϕ，下述两个断言是等价的：

（1）ϕ 对安保双仿不变；

（2）ϕ 在 PDL^* 中可定义。

另外一个受模态启发的证明（参见［van Benthem. 1998B］）刻画了安全运算。这一结果实为上述语言中之关键运算的表达完全性。

定理7（动态安全定理）　安全的一阶运算刚好就是运用下述可定义的运算：①原子行为谓词；②适于任意状态公式的测试；③投射；④关系复合；⑤并。

我们可以对这一句法描述做一点修改。如果我们添加一个作用于行为上的运算“不可能性否定”～，那么就可以只用原子测试，而不再需要其他的测试了。本质上，安全程序是描述由行为步骤或投射连接的、测试断言散布于其中的多状态的有穷序列的并（OR-树）。PDL^* 的模型论是“以一阶方式继续的模态思想”的混合物。安保双仿和普通的双仿是一样的，尽管它想象起来有点困难，原因在于匹配是在状态的有穷序组之间进行。我们介绍一种*展开方法*，用下述的路径来构造树模型

$$\langle \text{原子 } Ra,\ b,\ \text{选定的对象 } b_i,\ \text{原子 } Sb',\ c,\ \text{等等} \rangle$$

它有多种用途，其中包括用来证明内插及保持性。这里有一个简单的例子，用之于证明安全性定理。称一个公式 $\phi(Q)$ 在给出的状态谓词族 Q 中*完全可分配*，若对任意子族 $\{Q_i \mid i \in I\}$，ϕ 在它们并的真值等于 ϕ 在某个 Q_i 的真值。

定理8　一个公式在状态谓词 Qx 中是完全可分配的，当且仅当它可以以 $\langle \pi \rangle Qx$ 的形式被定义，其中 π 是一个上面那样的安全程序，并且其中间状态上的测试条件中不出现谓词 Q。

由于 GF 可判定，因此 PDL^* 亦然。它甚至还具有能行的有穷模型性，因为它位于 GF 的一个简单的、带有“可区分的安保”的片断之中，对该片断，[Andréka, et al. 1998] 中有它的能行可判定性的论证。有效的原则与 PDL 本身中的一样多。已经有多种完全性的证明方法（多维模态逻辑，代数表示，或可判定性证明的证明论的修改）。与 PDL 或 GF 一样，添加不动点算子也有点意思，特别是那些在 ω 步可以达到稳定的算子。在我们的一阶格式塔中，对所有可以用包含原子 Qx 的一个恰当出现的矩阵 $\phi(Q)$ 来计算的 ω-不动点 $\mu Q \cdot \phi(Q)$，PDL-型算子就足够了。语义上，一般的 ω-稳定性由*有穷可分配*保证，即，

ϕ 对 Q 成立 当且仅当 它对某个有穷的子谓词 Q_0 成立

后者允许几种以有穷多个恰当出现的 Q 定义的形式。对于有穷可分配算子，完整的一阶逻辑有一个简单的句法范式：

$\mu Q \cdot \phi(Q)$，其中 ϕ 中的 Q-原子的出现都在逻辑算子 ∨、∧、∃ 的辖域之内

对于 PDL^*，也有一个类似的状态谓词有穷可分配性的句法划分。它包含*有穷的行为树*，这些行为树都是 AND-树，其步骤都是安全行为，而其节点则可为无 Q 的测试条件或者包含有 Q 的原子测试。

定理9　对于状态公式 ϕ，下述两个断言是等价的：

（1）ϕ 在 Q 中有穷可分配；

（2）ϕ 说的是在某个有穷行为树的集合之外存在一个有穷行为树。

这是从早先提到的结论可以推出的，这些结论指的是以由上述句法运算定义的状态谓词的不动点算子扩张的 PDL^* 是可判定的。

2.7.3　模态模型论中的其他主题

我们以一些出现于模态逻辑中、但是具有更为一般的模型论意趣的主题来结束本节。首先，在模态逻辑中，我们对于基本结论都习惯于有两种说法。例如，模态内插定理说的是

如果 $\phi \models \psi$，那么存在一个内插 α 使得 $\phi \models \alpha \models \psi$，其中 α 位于 ϕ 和 ψ 的“共同语言”之内

后者既可以指命题字母表的交，也可以指与行为对应的模态词的交。沃斯－塔斯基定理也可以刻画保持：或者从一个模型中删去世界，或者从其可达性关系放弃箭号。状态谓词和行为谓词之间的这种裂缝在我们更为一般的语言中也出现了。例如，在上述 PDL^* 的讨论中，我们为关于状态谓词的语义可分配性列出了一些保持定理。但是关于行为谓词也有类似的问题（对此我们甚至还没有回答……）。这一裂缝甚至对其他的如单调性这样一些基本的语义概念也有回应。最后一个例子已经在 2.4 中提及。有两类自然的不动点算子：一类适于状态谓词，一类适于行为谓词。这两类并不一样，对于我们温和地称为带有“额外不动点算子”的 *GF* 的可判定性我们已经有两个不同的问题。

例 3　用双仿助推。

众所周知的模态表示和完全性定理也提出了一些新的标准概念和结论。考虑许多模态完全性证明中出现的“模型外科手术”。为某一非定理 ϕ 寻找一个简单的（亨金）反模型，然后构造一个（模态 ϕ 仍为假的）满足某个所需的、比方说由 α 定义的额外特征的双仿等价模型。在这一技术背后有一个存在保持性质，不同于通常的全称形式：

$$\text{每当 } \mathfrak{M} \models \phi\text{，存在一个双仿到那个模型 } \mathfrak{N} \models \phi \wedge \alpha$$

“利用双仿的助推”是具有一般意义的新概念（参阅［van Benthem. 1998A］中的论文“Information Links and Logical Transfer”）。

而当我们从相继模态形式系统转到允许合取安保的平行模态形式系统时，又引出了另外一类未解决的问题。在这时，我们的模拟必须扩充以新的条件，而上述关于模态不变性和安全的基本模型论（［van Benthem. 1996］，第 4、5 章）则需要重做。尤为特别的一个问题是，可以为平行行为找到表达完全的自然模态运算集合吗？

题外话 暂不考虑等词的情况

由于等词在我们语言中的特殊地位，“部分同构”的概念也需要改变。等式陈述$\exists y(Rx_1x_2,y \wedge \cdots \wedge y = x_1 \wedge \cdots)$围绕着输入状态和输出状态之间的区分，而且它们的影响很难描述。但是，如果没有等词，则必须得调整双仿，甚至也要改动*GF*。现在，我们手中的基本积木块是相同长度的对象有穷序组之间的二元关系了——或者作为选择，有穷变元指派之间的二元关系。

我们以隐含在上述语言构造之后的更为一般的主题来结束本次讨论。有一个一般的模仿与语言之间的对应的谱系，从“模态逻辑/双仿”一直到“一阶逻辑/潜同构”。这需要作更为一般的理解。特别是，为什么这一谱系上选出来的一阶逻辑的模态片断通常都是表现好的？人们所做的特定选择也许会服从某些隐含的、某个好的元理论的移植原则(警告。一个值得注意的例子是近来在[Hoogland & Marx. 1998] 中报告的结论，即克雷格内插性对*GF*不成立。一般图景中又怎样)？

甚至在这种相当散漫的格式中，问题多于答案，我们希望已经表明，当以这种“一前一后”方式进行研究时，模态逻辑也会在标准逻辑中促成一些有趣的新论题。

2.8 证明论角度

我们注意到，模态逻辑中的那些一般性结果也可以从证明论达到，有时甚至胜于模型论角度考虑的效果，这是有案可查的。下面是两个例证。

2.8.1 消解

我们也可以从可计算角度来分析模态语言的可判定性。例如，对*GF*有新的消解策略，使用熟悉的斯科伦化技术加上几种证明策略，提供了一个完备但有穷的搜索空间([de Nivelle. 1998])。基于这种方法的定理证明机“Bliksem”1998年在（德国）康斯坦茨举行的国际竞赛CADE上获得了第二名这样的好成绩。在这里，我们的重点与其说是放在模态语言的句法上不如说是放在特定证明策略的正确性和终止性上。这确实是一种不同的思路，基于算法而非句法或语义，使得模态可判定性活灵活现地呈现了。我们的第二个例子也是一样的思路。

2.8.2 收缩

容易证明，不用收缩规则，而只依靠通常的逻辑连结词的根岑引入规则加上所有的结构规则，就可以完备公理化基本模态逻辑（[Andréka, et al. 1998]）。

也可从一个简单有效的模态化/原子后承的归约方法推出这一点。对于更强一点的模态片断，收缩的能行有穷限制版本常常也够了。这一观察再次提出了一个独立的证明论观点。众所周知，在线性逻辑中，人们总是“隔开”收缩规则，然后看什么样的（可判定的）逻辑被保留下来。我们这里观察到的是，基本模态逻辑对这样的处理没有反应——没有有效式被丢失。此外，广义模态语言可以设法应付不遗失有效式的能行有限收缩规则。因此，我们要问，完整的经典逻辑的刚好哪些片断可以接受（保持搜索空间有穷的）收缩规则的能行有限形式。这一问题的结果将会和安保分析的结果相协调吗？

2.9 一般主题概要

前文中，我们希望大家了解的是一般翻译和采用一种前后方式研究的优点。我们确实注意到这必须小心才能做到。我们的“标准翻译”为模态语言树立了一个特别的语义观点，并且由此它们可以鼓舞不适当的保守主义。这些主题在 20 世纪 70 年代触发了诸多激烈的争论：例如，关于时序逻辑的内在观点与翻译主义者观点的针锋相对，可以参阅［van Benthem. 1977］。至于当前的例子，在［Artemov. 1998］的“证明的逻辑”中，方块模态词□不再是一个（所有可达世界上的）全称量词，而是一个（可用到的证明上的）存在量词。但是当定义合适时，这些不同的观点也都能“被翻译”。同时，模态翻译也不必总基于一阶逻辑。比如说，当我们考虑翻译直觉主义逻辑的贝特语义时，自然而然想到的是穿过一棵树之节点的“杠”上的二阶量化。这里，翻译也仍将是有用的，它促使人们去重新思考已有的语义学。我们真正需要这样一个二阶形式、还是需要一个多种类的一阶形式把节点、杠及分枝同等地处理成基本的语义对象（［van Benthem, et al. 1994］对带有状态和路径的进程逻辑采用了一个类似的处理）？由此看来，不必把“翻译主义”扣上保守派的帽子。

其次，我们已经强调语言设计和寻求典型的模拟之间的对偶。这里不存在量化：这就是一个好事情。然后，在这一语义设计中，我们强调了量词良好结构的重要性，特别是那些含有安保的量词结构。我们的主张并不是说这给我们解释模态逻辑中每一个可判定性形式一个奇迹般的解决。我们关于极小逻辑与额外框架条件比较的讨论已经清楚地显示安保分析的局限——但是也有一些令人吃惊的扩充（在 2.4 中见证传递性和不动点的讨论）。然后，我们还提倡了在扩充模态逻辑的范围时具体隐喻的使用，特别是在状态谓词对行为谓词与相继行为对平行行为之间带有新的区分的动态观点。这样，我们周游了一遍模态语言的全景，我们想在这里研究一般现象，而非欣赏任意一个特定的景点。这一全景也有其使人激

动的特征，比方说以一种通常无法觉察的方式出现的不可判定性阈限（它是不可判定的仅当一个给定的模态逻辑是可判定的：[Chagrov & Zakharyaschev. 1993]），极像南极洲冰帽下深处的裂缝。这一也许偏僻古怪的“风景主义”方法论（参阅[Moss. 2000]对[van Benthem. 1996]所写的书评）清楚地把广阔的逻辑现象看成像是我们真正的研究主题，远非——步我们乌普赛拉前辈林奈之后尘——通常的“模态逻辑植物学”。

然而，这篇文章并没有给出模态逻辑的定义。我在这里最多能说的就是这些。我们的领域关注于设计逻辑系统中表达能力与复杂性之间的平衡。这不是一个小事情。如果有很多普遍的保守原则构成逻辑的基础（就像我自己相信的那样：参阅[van Benthem. 1999B]），那么其中一条一定确实是反过来联系表达能力和复杂性的某种黄金规则。我们本文研究的就是关于那个微妙的关系的。

参考文献

Andréka H, van Benthem J, Németi I. 1998. Modal logics and bounded fragments of predicate logic. *Journal of Philosophical Logic*, 27: 217 ~ 274

Artemov S. 1998. Explicit modal logic. // *Proceedings AiML-II.* Uppsala. Philosophical Institute: 22 ~ 31

Blackburn P, de Rijke M, Venema Y. 2001. *Modal Logic.* Cambridge: Cambridge University Press

Börger E, Grädel E, Gurevich Y. 1996. *The Classical Decision Problem.* Berlin: Springer

Chagrov A, Zakharyaschev M. 1993. The Undecidability of the disjunction property of propositional logics and other related problems. *Journal of Symbolic Logic*, 58: 49 ~ 82

de Nivelle H. 1998. Resolution decides the guarded fragment, ILLC-Report. University of Amsterdam

de Rijke M. 1993. *Extending Modal Logics.* PhD thesis. ILLC-Report, University of Amsterdam

Grädel E. 1997. On the complexity of the guarded fragment. Department of Informatics & Mathematics, RWTH Aachen

Grädel E, Walukiewicz I. 1999. The guarded fragment with fixed points is decidable. Department of Informatics, RWTH Aachen. // *Proceedings of 14th IEEE Symposium on Logic in Computer Science LICS'99.* Trento: 45 ~ 54

Hollenberg M. 1998. *Logic and Bisimulation.* PhD thesis. Utrecht: Philosophical Institute

Hoogland E, Marx M. 1998. On the failure of interpolation for the guarded fragment. Manuscript, ILLC, University of Amsterdam. Official publication as Hoogland Marx M, Otto M. 1999. Beth definability for the Guarded Fragment, *Proceedings of LPAR'99*, Springer LNAI, vol. 1705: 273 ~ 285

Kurtonina N, de Rijke M. 1997. Simulating without negation. *Journal of Logic and Computation*, 7: 501 ~ 522

Marx M. 1997. Complexity of modal logics of relations. Report ILLC-ML-97-02, ILLC, University of Amsterdam

Marx M, Venema Y. 1996. *Multi-Dimensional Modal Logic*. Dordrecht: Kluwer

Moss L. 2000. Review of "Exploring Logical Dynamics". *Journal of Logic, Language and Information*, 9: 261 ~ 263

Ohlbach H J, Koehler J. 1998. Modal logics, description logics and arithmetical reasoning. // *Proceedings AiML-II*. Uppsala: Philosophical Institute: 231 ~ 255

Spaan E. 1993. *Complexity of Modal Logics*. PhD thesis. ILLC, University of Amsterdam

van Benthem J. 1976. *Modal Correspondence Theory*. PhD Thesis. Mathematical Institute, University of Amsterdam

van Benthem J. 1977. Tense logic and standard logic, *Logique et Analyse*, 20: 41 ~ 83

van Benthem J. 1985. *Modal Logic and Classical Logic*. Napoli: Bibliopolis

van Benthem J. 1996. *Exploring Logical Dynamics*. Stanford: CSLI Publications

van Benthem J. 1997. Dynamic bits and pieces. Tech Report LP-97-01. ILLC, University of Amsterdam

van Benthem J. 1998A. Dynamic odds and ends. Tech Report ML-98-08, ILLC, University of Amsterdam

van Benthem J. 1998B. Programming operations that are safe for bisimulation, *Studia Logica*, 60: 311 ~ 330 (Logic Colloquium. Clermont-Ferrand 1994)

van Benthem J. 1999A. The range of modal logic, *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 9: 407 ~ 442 (Issue in Memory of George Gargov)

van Benthem J. 1999B. Wider still and wider: resetting the bounds of logic. // Varzi A, ed. *The European Review of Philosophy*, Stanford: CSLI Publications: 21 ~ 44

van Benthem J, van Eijck J, Stebletsova V. 1994. Modal logic, transition systems and processes. *Journal of Logic and Computation*, 4: 811 ~ 855

Vardi M Y. 1997. What makes modal logic so robustly decidable? // *Descriptive Complexity and Finite Models*. Providence: American Mathematical Society

3 安保、界限和广义语义学*

刘新文/译　胡义昭/校

3.1　安保片段的基础

3.1.1　安保句法

［Andréka, et al. 1998］中的安保片段是带有语义理论的一阶句法的一个可判定部分：通过对象之上的谓词，量词只可“局部地”通达个体对象的整个论域。但是就像本文将要证明的那样，对安保的动机和抱负来说，仍然有大量的工作需要去做。我们首先快速回顾一些已有的结论和证明方法。

这里是一些句法的预备知识。主要是出于便利起见，我们在后面只考虑带谓词符号和变元的语言：不出现函数符号和等词。但是，我们却允许变元序组 $\boldsymbol{x}$ 之上的所谓多元一阶量词 $\exists \boldsymbol{x}\phi$、$\forall \boldsymbol{x}\phi$，其解释很明显。对于联立代入我们也用多元记法 $[\boldsymbol{u}/\boldsymbol{y}]\phi$。我们在标准的句法意义下使用它们：代入在 $\boldsymbol{u}$ 对 $\boldsymbol{y}$ 自由的条件下进行。如果不是这样，那就先为公式 ϕ 取某个恰当的易字变体。

我们的关键思想是，新的对象 $\boldsymbol{y}$ 只能相对于给定的对象 $\boldsymbol{x}$ 而被引入，就像是“安保原子”表达的那样（其中的变元可以以任意顺序出现或者重复出现）——而且在下面的论述只谈论安保对象 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$。

定义 1（安保公式）　安保公式是按照下述句法规则构造出来的公式：

$$\text{原子 } P\boldsymbol{x} \mid \neg \mid \vee \mid \exists \boldsymbol{y}(G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \& \phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$$

这里加粗的 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$ 表示变元的有穷序组，G 是一个谓词符号。松散安保公式

---

* Guards, Bounds and Generalized Semantics. *Journal of Logic, Language and Information*. Dordrecht: Springer Science, 2005, 14: 263～279.

允许在量词条款中用原子的合取式 $\gamma(x, y)$ 来代替 $G(x, y)$，条件是 y 中的每一个变元至少在一个 $\gamma(x, y)$ 的原子中和 x，y 中的每一个变元共同出现。所有安保一阶公式的集合称为安保片段（GF）。当然还存在一个松散安保片段（LGF）。

3.1.2 借由准模型得到的可判定性

具有促动性的最初结果是安保量词导致可判定性。

定理 1　GF 和 LGF 都是可判定的。

我们在后面主要关注 GF。后面将会提到定理 1 的证明，因此重述其梗概如下：

证明：第一个观察是，一阶公式在任一模型中的真都被某个称为"准模型"的有穷句法对象所见证。令公式 ϕ 在标准模型 $\mathfrak{M}$ 中为真。令 V 是 ϕ 中（自由或约束）出现的变元组成的那个有穷集合。实际上，这时候我们就处在一阶逻辑的一个有穷变元片断之中。然后，我们把注意力集中在由 ϕ 及其子公式组成的有穷集合 Sub_ϕ 上，这一集合同时还要对只用到 V 中的变元、不改变句法形式的联立代入 $[u/y]$ 封闭。其可行性来自于下述简单的、由某种句法运算就可以证明的观察：

引理 1　有穷变元片断对联立代入封闭。

现在，$\mathfrak{M}$ 上的每一个变元指派 s 证实 Sub_ϕ 的一个具有特殊性质的公式子集 Δ_s，我们称之为一个类型。注意，任一模型都实现至多有穷多的类型。一个"准模型"是带有某些性质和相互关系的类型组成的有穷集合：如果准模型的来源确实是某个模型 $\mathfrak{M}$，那么这些性质和关系是明显成立的。

定义 2（准模型）　令 F 是只用到 V 中的变元而长度 $\leq |\phi|$ 的所有公式组成的有穷集合。注意，$\phi \in F$ 并且 F 对取子公式及和代入一起被使用的上述"易字变体"封闭。一个 F-类型是 F 的一个满足下列条件的子集 Δ：

（a）对于任意的 $\neg\psi \in F$，$\neg\psi \in \Delta$ 当且仅当并非 $\psi \in \Delta$

（b）对于任意的 $\psi \vee \xi \in F$，$\psi \vee \xi \in \Delta$ 当且仅当 $\psi \in \Delta$ 或者 $\xi \in \Delta$

（c）对于任意的 $\exists y\psi \in F$，如果 $\exists y\psi \in \Delta$ 那么 $[u/y]\ \psi \in \Delta$

然后，如果 Δ 和 Δ'包含一些相同的公式而这些公式中所有的自由变元都不在 y 中出现，那么我们写成 $\Delta =_y \Delta'$。一个准模型是一个 F-类型的集合 S，使得

（d）对每一个 $\Delta \in S$ 且每一个公式 $\exists y\psi \in \Delta$，存在一个类型 $\Delta' \in S$ 满足 $\psi \in \Delta'$ 且 $\Delta =_y \Delta'$。

我们说 ϕ 在一个准模型中成立，是说对于这一个准模型中的某个 Δ 来说 $\phi \in \Delta$。

很明显，这一定义为下述断言的证明提供了根据：

引理2 如果一个一阶公式有一个模型，那么它也在某个准模型中为真。

其逆命题并非对于所有的一阶公式来说都成立，但对 *GF* 来说是成立的。

引理3 如果一个安保公式有一个准模型，那它也有一个标准模型。

关键的事实在于准模型可以“展开”成树形的标准模型而不至于影响集合 *F* 中的安保公式的真值。相关细节在［Andréka, et al. 1998］中可以找到——但是它们在这里无关紧要。同一个树模型构造也保持松散安保公式的真值不变。*GF* 或者 *LGF* 的可判定性现在就可以得到，原因在于我们可以通过检测其大小被 ϕ 的长度能行约束的、对任意（松散）安保公式 ϕ 而言的准模型的存在性而检测 ϕ 的可满足性。 ■

这一判定程序可以通过简单的调整来达到一个最优复杂性结果［Grädel. 1999B］。安保公式的可满足性是 2*EXPTIME*-完备的，而对于谓词元数有一个固定边界的那些 *GF* 来说可满足性是 *EXPTIME*-完备的。

3.1.3 其他的元性质

安保片段意欲同时满足几个目的。一方面，其复杂性低至可判定，而其表达力足够概括大多数普通的模态语言。这展示了在所有好的模态类（modal-like）语言中追求的平衡。另一个美好的特征与其元理论有关系。基本模态逻辑在它的所有元性质上与一阶逻辑都是相似的，即使对于那些不能从“是它的子语言”导出的“存在性”性质（如克雷格内插、贝特可定义性及标准的模型论保持定理）也是如此。*GF* 在一定程度上分享了这一良好行为，譬如说子模型的沃施型保持定理（［Andréka, et al. 1998］中给出的）就是例子。也可以参照［van Benthem. 2001］，其中 *GF* 被当作是用以找出“是什么激发模态逻辑运行的”工具。但随后的工作已经证明画面有点混杂。贝特可定义性是成立的［Hoogland, et al. 1999］，而克雷格内插的强一般形式却不成立——虽然它在我们把安保谓词看成是逻辑词汇的一部分时仍然有效［Hoogland & Mark. 2002］。再看其肯定的一面。*GF* 已经以其他的方式显示出了逻辑弹性，这是它第一次出现时所未曾预料到的。一个引人注目的例子是［Grädel. 1999C］中的结果：*GF* 带不动点算子 μ 和 v 的扩充 *LFP*(*GF*) 仍然是可判定的，而完整的一阶逻辑的扩张版本*LFP*(*FO*)是非可公理化的——实际上是非算术化的。［Grädel. 1999A］也附带地确定了 *LFP*(*GF*)的复杂性。

我们在本文其余部分研究安保句法的一些其他、未被广泛重视的方面，这些方面在安保句法发明之时也是发挥了作用的。

3.2　安保和一般指派模型

3.2.1　受限制的句法对广义的语义学

给每一个量词一个安保可以视为一种句法限制，这样做抑制了所有未约束的量化。在这种意义上，*GF* 确实是 *FOL* 的一个片断。但是也有另外一种角度：这么一步倒是表示了一种语义推广。我们现在假定量化将正常地出现在“结构化论域”中，其中从一个对象组到另外一个对象组的通达必须通过某个拥有恰当元数的联结关系 *R* 来实现。二元模态的可达性就是一个典型的例子。标准模型是 *R* 为全称关系时的特例。因此，非正式地讲，在下述两者之间似乎有一种相似：

（a）运用标准模型上的安保公式；

和

（b）运用适度广义的模型上的任意一阶公式。

这一点可以通过使用下述语义学来精确地刻画，该语义学可以追溯到［Németi. 1985］中对于代数模型的一般相对化技术。

3.2.2　模态模型和一般指派模型

作为出发点，通过对标准真值定义的一个简单考察，很容易在一个抽象的模态模型

$$\mathfrak{M} = (S, \{Rx\}_{x \in VAR}, I)$$

上解释一个完备的一阶语言，其中 S 是一个“状态”集合，对每一个 x 来说 Rx 是状态之间的一个二元可达关系，I 是一个在每一个状态 s 中为每一个原子公式给出真值的解释函数。这是标准一阶语义学的一个巨大扩张，其中没有“个体对象”论域需要用作状态的基础。实际上，我们经常观察到量词就是模态词这一现象，其中

$$\mathfrak{M}, s \models \exists x\phi \quad \text{当且仅当} \quad \text{对某个 } t: R_x st \text{ 且 } \mathfrak{M}, t \models \phi$$

这样，一阶逻辑是带有一个存在模态词 $\exists x$ 的多模态逻辑。对于我们来说，这就给多种类的广义语义学提供了一个广阔空间。

下述语义学更为具体，它只是取消了来自 *FOL* 的标准塔斯基模型中的“完整性”存在预设。

定义3（一般指派模型，*GAM*） 一个一般指派模型是一个序对（$\mathfrak{M}$，$\mathbb{V}$），其中$\mathfrak{M}$是论域为D、解释函数为I的标准一阶模型，$\mathbb{V}$是$\mathfrak{M}$上的任一非空的指派集，即D^{VAR}的一个子集。一阶语言如常解释，只是对于三元组$\mathfrak{M}$，$\mathbb{V}$和s（$s \in \mathbb{V}$）的量词情形有下面的特别条款：

$\mathfrak{M},\mathbb{V},s \models \exists x\phi$ 当且仅当 对某个$t \in V$:$s =_x t$且$\mathfrak{M},\mathbb{V},t \models \phi$

这里，$=_x$是模x-值的等同指派之间的标准关系。

这些模型中的指派间隙对变元之间存在依赖关系的自然现象进行了建模：一个变元x的值的改变可以引发、或者至少牵连到另外一个变元y的值的改变。一般指派模型还支持那些反映超出标准一阶逻辑表达力的差异的新词汇。比如那些约束变元序组$\boldsymbol{x}$、多元性不可归约的多元量词$\exists \boldsymbol{x}$，其真值条件如下：

$\mathfrak{M},\mathbb{V},s \models \exists x\phi$ 当且仅当 对某个$t \in \mathbb{V}$:$s =_x t$且$\mathfrak{M},\mathbb{V},t \models \phi$

这一次，$=_{\boldsymbol{x}}$是指派之间以$\boldsymbol{x}$中所有变元的值为模的相等关系。例如在标准一阶逻辑之中，记法$\exists xy \cdot \phi$只是$\exists x \exists y\phi$的缩写。但在*GAM*-语义学中，这两个表达式不再等价，原因在于并非所有对于x-或y-转换的“中间指派”都需要出场——并且它们都不等价于$\exists xy$，就像刚刚定义的那样。此外，也可以用这一方式直接解释一元或多元代入算子：

$\mathfrak{M},\mathbb{V},s \models [\boldsymbol{y}/\boldsymbol{x}]\phi$ 当且仅当 $s[\boldsymbol{x} := s(\boldsymbol{y})] \in \mathbb{V}$ & $\mathfrak{M},\mathbb{V},s[\boldsymbol{x} := s(\boldsymbol{y})] \models \phi$

这个在一般指派模型上得到的逻辑“*CRS*”已经得到充分的研究（[Marx & Venema. 1997]）。它的有效原则包含多元模态S5的标准公理及所有的原子“局部性原则”（¬）$\boldsymbol{Px} \rightarrow \forall \boldsymbol{y}$（¬）$\boldsymbol{Px}$（其中$x \cap y = \varnothing$）。然而，在上述这些模型中并不普遍有效的是如下两个原则：

(i) $[\boldsymbol{u}/\boldsymbol{y}]\psi \rightarrow \exists \boldsymbol{y}\psi$ 其中$\boldsymbol{u}$对ψ中的y自由 *存在概括*

(ii) $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \forall \boldsymbol{y}\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$ 其中y在$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})$中不是自由的 *完整局部性*

这些不足反映了对于那些并非所有指派都需要可用的模型中变元的特殊处理。所有的x，y，z，…，也就都获得一种“个体性”，原因是它们和其他变元之间的相互作用可能各不相同。这里我们省略技术细节（一个极好的出处是[Németi. 1996]），而转向*FOL*的*GAM*-语义学和*GF*的标准语义学这两者之间的联系。

3.2.3 归约*GAM*逻辑为*GF*

下述结果在［Andréka，et al. 1998］第5节中有证明。

定义4（安保翻译） 考虑任意的k-变元语言$L\{x_1, \cdots, x_k\}$。令R是一个新的k-元谓词。翻译*guard*通过把所有量词相对化到同一个原子$R_{x_1,\cdots,x_k}$，把k-变

元一阶公式 ϕ 转换为安保一阶公式 $guard(\phi)$。这一翻译对于多元一阶量词起作用，正如对于一元一阶量词那样——而且如果喜欢，甚至可以把这个翻译扩充到上述代入算子。同样有一个模型扩展的相应语义运算。令（$\mathfrak{M}$, $\mathbb{V}$）是对于 $L\{x_1,\cdots,x_k\}$ 的任意一般指派模型——没有新谓词 R。标准模型 $GUARD(\mathfrak{M}, \mathbb{V})$ 是视为标准模型的 $\mathfrak{M}$ 且用下述解释扩展得到的模型：

$$R(d_1,\cdots,d_k)\text{，当且仅当指派 } x_i := d_i (1 \leqslant i \leqslant k) \text{ 在}\mathbb{V}\text{中}$$

施归纳于一阶公式上可以很容易地证明下述引理：

引理 4　对于 $\mathbb{V}$ 中所有的可用指派 s，以及所有的 k-变元公式 ϕ，

$$\mathfrak{M},\mathbb{V},s \models \phi \quad \text{当且仅当} \quad GUARD(\mathfrak{M},\mathbb{V}),s \models guard(\phi)$$

这里就存在一个从 *GAM*-语义学到安保片段的归约。

定理 2　对于所有的一阶 k-变元公式 ϕ，下述命题是等价的：

(a) ϕ 在一般指派模型中是可满足的；

(b) $R_{x_1,\cdots,x_k} \wedge guard(\phi)$ 在标准模型中是可满足的。

证明：从（a）到（b），引理 4 就够了。对于反方向来说，假设 $R_{x_1,\cdots,x_k} \wedge guard(\phi)$ 在某个指派 s 下有一个标准模型 $\mathfrak{M}$。现在，通过只保留 x_1，…，x_k 的值满足关系 $R_{\mathfrak{M}}$ 的那些 $\mathfrak{M}$ 上的指派，来定义一般指派模型（$\mathfrak{N}$, $\mathbb{V}$）。这些指派也包括了指派 s 本身。那么由于引理 4 很容易地看到 $\mathfrak{N}$, $\mathbb{V}$, $s \models \phi$。 ■

对翻译稍作一点改变，这一归约也可以直接对没有 k-限制的完整一阶语言起作用。上述的反方向在［Andréka, et al. 1998］中留作未解问题，但我们在这里解决了。下面的注记 1 简要地讨论了马克斯（Marx）稍早的一个解。

3.2.4　归约 *GF* 为 *GAM* 逻辑

我们还需要一个翻译。这一次，在前面的意义上它不是组合的。原因在于前面存在概括（i）和完整局部性（ii）在一般指派模型中不成立。在随后的证明中，对于相关公式的某个有穷集合我们需要这些原则，因此我们把它们放到翻译中去。

定义 5（*GAM* 翻译）　令 ϕ 是任一带有变元 $\boldsymbol{x} = x_1$，…，x_k 的全集的安保一阶公式。令 $set\text{-}up(\phi)$ 是具有下述形式的所有公式的有穷合取：

(i)′ $\forall x\ ([\boldsymbol{u}/\boldsymbol{y}]\psi \rightarrow \exists \boldsymbol{y}\psi)$，其中 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{y} \subseteq \boldsymbol{x}$ 且 $\psi(\boldsymbol{y})$ 是 ϕ 的一个子公式；

(ii)′ $\forall x(\psi(\boldsymbol{z}) \rightarrow \forall \boldsymbol{y}\psi(\boldsymbol{z}))$，其中 $\boldsymbol{z}$，$\boldsymbol{y} \subseteq \boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{z}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 不相交，并且 $\psi(\boldsymbol{z})$ 是 ϕ 的一个子公式。

公式 $gam(\phi)$（不一定是安保公式）是合取式 $\phi \wedge set\text{-}up(\phi)$。

特别地有，前置的多元全称量词$\forall x$对所有相关变元的约束确保了蕴涵式(i)′和(ii)′在任一具有下述性质的一般指派模型中都成立：任意指派都使得*set-up*(ϕ)为真。

定理3 对于所有的安保公式ϕ，下述是等价的：

(a) ϕ在标准模型中是可满足的；

(b) *gam*(ϕ)在一般指派模型中是可满足的。

证明：从(a)到(b)只需注意ϕ的任一标准模型也满足*gam*(ϕ)，原因在于在第二个合取支中的公式都是普遍有效的。而且标准模型都是带有完全指派集的一般指派模型。

下一步是从(b)到(a)，令$\mathfrak{M}$，$\mathbb{V}$，$s \models gam(\phi)$。与3.1.2中一样，这一情形引出ϕ的一个准模型。回想一下，相关的公式是指ϕ的所有子公式及其带有x中的变元的易字变体。现在，准模型的类型是在$\mathbb{V}$中的指派下为真的相关公式的所有集合。我们必须检验定义2中的四个条款。这里，前两个可以从布尔运算的真值定义直接得到。然后，第三个存在概括条款件对于所有类型都成立，原因在于*set-up*(ϕ)中的合取支(i)′都为真。最后，存在量词的特殊"见证条款"(d)在适度相关的类型中成立，原因在于一般指派模型中存在量词的真值条件加上*set-up*(ϕ)中真值转换条件(ii)′。这样，给定的安保公式ϕ有一个准模型——而且由3.1.2中的引理3由此它也有一个标准模型。 ■

相同的推理可以扩展到松散安保片段*LGF*。也可以以其他有趣的方式对定理3[①]做些改动，就像在[Andréka & Németi. 2005]中的那样。后者把定义5中的特殊公式$\forall \boldsymbol{x}([u/y]\psi \rightarrow \exists y\psi)$和$\forall \boldsymbol{x}(\psi(z) \rightarrow \forall y\psi(z))$合取起来用以提出进一步的问题：比较标准一阶有效式和*GAM*-有效式。我们这里对此不做研究。

评论1 [Marx. 2001]也提出了语义相对化和句法安保的比较问题——在完成了本文之后我们才注意到它。根据早在1997年的结果，马克斯给出了一个像我们的定理2和3一样的双向归约——但他没有像我们那样"装载"翻译*gam*，而是使用了特殊的一般指派模型：满足*完整局部性*，再加上一个"*局部方块*"性质以保证存在概括的有效性。另外一个富有启发性的结果是一阶逻辑的"捆绑片断"的模型论保持定理（大致上是*LGF*的一个轻微扩张）。这被证明是一阶逻辑中对于标准模型的定值和相对化到某种"容忍关系"的模型的定值之间的差异不敏感的最大片断。

① 此处的"定理3"原文误为"定理4"——译者注。

3.2.5 推论：不动点语言的一般语义学

3.2.3 和 3.2.4 表明我们可以用两种方式来思考一阶逻辑：或者通过句法量词安保，或者通过广义语义学。这样一种二重性可以把其中一个领域中的真知灼见带到另外一个领域中。这里有一个或许有趣的例子。考虑完整的一阶逻辑的不动点扩张 *LFP*(*FO*)。它在一阶句法通常的构成规则上扩充以一个定义归纳性概念的算子：

$$\mu P, \boldsymbol{x} \cdot \phi(P, Q, \boldsymbol{x})$$

其中 P 只能在 $\phi(P, Q, \boldsymbol{x})$ 中正出现，变元序组 $\boldsymbol{x}$ 和 P 在元数上一致。在任一给定模型 $\mathfrak{M}$ 中，这些相关的谓词就是在谓词上的下列单调集合运算的最小不动点：

$$F_\phi^{\mathfrak{M}} = \lambda P \cdot \{\boldsymbol{d} \text{ 在 } \mathfrak{M} \text{ 中 } \mid (\mathfrak{M}, P), \boldsymbol{d} \models \phi(P, Q)\}$$

我们看到［Grädel. 1999B］证明了安保片段的不动点扩张 *LFP*(*GF*) 是可判定的，在这点上和比它强得多的 *LFP*(*FO*)是不同的。不过，这一现象也可以在一般指派模型上以二重性的方式来加以理解。用代数术语来说，*LFP*(*FO*)的“相对化”版本是行为良好的！

现在需要多关注一点语言 *LFP*(*FO*)中的公式 ϕ，因为就像我们前面提到的那样，变元在一般指派模型中不是那么“缺乏个性”。特别是，当定义一个谓词 μP，$\boldsymbol{x} \cdot \phi(P, Q, \boldsymbol{x})$时，特殊变元 $\boldsymbol{x}$ 事关紧要。这暗示着，我们只是在定义特定原子 $P\boldsymbol{x}$ 的值，而诸如 $P\boldsymbol{y}$ 这样的变体必须看成是代入实例［$\boldsymbol{y}/\boldsymbol{x}$］$P\boldsymbol{x}$。根据这一理解，我们可以像前面一样给出语义定值的定义。

定义 6（*GAM* 不动点定值） 上述语言中的公式 ϕ，在某个对于 ϕ 中自由变元的给定指派 s 下，给出一般指派模型（$\mathfrak{M}$，$\mathbb{V}$）中的下述映射：

$$F_\phi^{M,s} = \lambda P \cdot \{\boldsymbol{d} \text{ 在 } \mathfrak{M} \text{ 中} \mid s[x := d] \in \mathbb{V} \,\&\, (\mathfrak{M}, P), s[\boldsymbol{x} := \boldsymbol{d}] \models \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{P}, Q)\}$$

最小和最大不动点都如常定义。

例 1（安保谓词的传递闭包） 考虑不动点公式 $\phi = \mu P, x \cdot Qx \vee \exists y[y/x]Px$。它的逼近序列像在上面定义的那样，从对于 P 的空集开始，到 ω 阶段结束，其中映射 $F_\phi^{M,s}$ 的迭代不产生任何新的结果。下面是其中的一些阶段：

$$P^0 = \varnothing$$

$$P^1 = \{d \mid s[x := d] \in \mathbb{V} \,\&\, (\mathfrak{M}, P^0), s[x := d] \models Qx \vee \exists y[y/x]Px\}$$

$$= \{d \mid s[x := d] \in \mathbb{V} \,\&\, Q(d)\}$$

$$P^2 = \{d \mid s[x := d] \in \mathbb{V} \,\&\, (\mathfrak{M}, P^1), s[x := d] \models Qx \vee \exists y[y/x]Px\}$$

$$= \{d \mid s[x:= d] \in \mathbb{V} \ \& \ (Q(d) \lor \text{对于某个对象 } e:$$
$$s[x:= d][y:= e] \in \mathbb{V} \ \& \ s[x:= e][y:= e] \in \mathbb{V} \ \& \ Q(e))\}$$

不断迭代，就可以计算出所有满足下述条件的对象 d 的集合：对于 d，存在一个满足 Q 的对象 e，在下述关系的传递闭包中它是从 d 可达的：

$$R_s ab \text{ 当且仅当 } s[x:= a][y:= b], s[x:= b][y:= b] \in V$$

我们这里不再讨论进一步的细节——但是要注意这些不动点计算是如何显现出相关的一般模型中隐藏的依赖性结构的。

定理 4 *LFP*(*FO*) 在一般指派模型上是可判定的。

证明：首先，3.2.3 中从任意公式到安保公式的翻译 *guard* 可以容易地扩张到添加了不动点算子的语言。然后，翻译在 *LFP*(*GF*) 的语言之内进行，而不动点定值必定局限在那些满足安保关系 R 的序组所构成的集合之内。引理 4 仍将起作用——因此前面提到的格瑞德的结论就为我们提供了可判定性。 ■

这些结论暗示的那个新方向是一般指派模型在一阶逻辑扩张的抽象模型论中的一个系统运用。

3.3 二阶逻辑中的安保

3.3.1 降低高阶逻辑中的复杂性

安保的引入是为了使一阶逻辑可判定——但是降低逻辑复杂性的策略却至少始于亨金为二阶逻辑引入他的一般模型之时。这些策略使得二阶逻辑能行可公理化，且事实上等价于对象和集合之上、带有这两者之间的初始关系 $\in$ 的一个二种类一阶逻辑。在这些模型上，可以添加任意一族集合存在的概括公理作为额外的一阶公理。[van Benthem. 1996A] 提问安保和一般模型策略是否相关。接下来是一个为 *GF* 的另外一个先驱所激发的部分回答，这个先驱也就是 [Montague. 1970] 所谓“扩展的语用语言”中对于“持续公式”的运用。这些语言又受到 20 世纪 50 年代奥雷（Oray）关于高阶逻辑片断的早期工作的启发，并且在实际情况中，它们可以处理人们在自然语言中自然而然地想说的大量内容。

3.3.2 持续公式

蒙塔古（和其学生坎普（Kamp）一起）观察到，在完整的二阶逻辑之内，下述公式集合的行为特别良好。

定义 7（持续的二阶公式） 持续的二阶公式把它们所有的二阶量词都相对化在格式 $\exists X(R(X,\boldsymbol{Y},z)\wedge\phi)$ 中，其中 R 是某个三阶谓词，$\boldsymbol{Y}$ 是一个谓词变元的序组，z 是一个对象变元的序组。二阶逻辑只带这些量化形式的持续片断称为 *PSOL*。

这里，三阶谓词表达集合或者关系的性质。三阶类型论对象的例子有广义量词（见以下），当然也包括数学或者自然语言语义学中的其他高阶构造。

定理 5 *PSOL* 是能行可公理化的。 ■

证明：关键的观察在于以下。

引理 5 *PSOL*-公式具有标准模型当且仅当它们具有一般模型。

从左到右的方向是明显的。反过来，考虑任意的一般模型 $\mathfrak{M}$，$\mathbb{P}$，$\boldsymbol{P}$，$s\models\phi$，其中，$\mathbb{P}$ 是谓词的受限范围。然后，考虑完整的标准模型 $\mathfrak{M}^{+}=(\mathfrak{M},\boldsymbol{P},s)$，它则关注那个包含所有谓词的族 *PRED*。此外，复制 ϕ 的有界量词中使用的所有三阶谓词 R：由此它们只与来自于前面的那个族$\mathbb{P}$ 及可能是个体的那些对象的谓词相关。现在容易归纳地证明

$\mathfrak{M}$，$\mathbb{P}$，$\boldsymbol{P}$，$s\models\phi$ 当且仅当 对于所有的 *PSOL*-公式 ϕ，$\mathfrak{M}$，*PRED*，P，$s\models\phi$

关键的归纳步骤在于谓词上的存在量词 $\exists X(R(X,\boldsymbol{Y},z)\wedge\phi)$。从左到右，由于 *PRED* 是$\mathbb{P}$ 的扩展，这是很明显的。从右到左，我们使用有界量词 R 在如上定义的 $\mathfrak{M}^{+}$ 中的真值可以得到推断说谓词 X 一定属于$\mathbb{P}$。

最后，既然通常的亨金型证明表明一般模型中的有效性是能行可公理化的，那么 *PSOL*-公式的标准有效性同样如此。 ■

上述证明并没有检验一般模型是否对于所有的二阶公式 ψ 满足概括原则 $\exists Y\forall\boldsymbol{x}(Y\boldsymbol{x}\leftrightarrow\psi(\boldsymbol{x},z,\boldsymbol{P}))$。后者的作用在于确保逻辑满足其最强形式的全称例示。上面的结果实际上是一个从 *PSOL* 的可满足性到二种类一阶逻辑中的可满足性的归约。

3.3.3 有界片断对安保

引理 5 的证明中关键的归纳步骤表达了，一阶逻辑中关于有界公式（它们把自己所有的量词都相对化到某个原子谓词）的一个熟悉的事实。原因在于，上述的一般模型 $\mathfrak{M}$，$\mathbb{P}$ 是完整模型 $\mathfrak{M}^{+}$ 关于其谓词子域的一个所谓的“生成子模型”——并且［Feferman. 1969］证明了有界公式的典型的语义特征是它们对生成子模型的不变性。更确切地说，引理 5 也考虑到对象上未受限制的量词，因为 $\mathfrak{M}$，$\mathbb{P}$ 和 $\mathfrak{M}^{+}$ 的对象论域是相同的。［van Benthem. 1983］包含了一些适用于这些混合环境的语义保持定理。现在，我们集中精力于有界片断 *BF*。它不同于安保

片断的地方在于后者允许更为一般的量化形式

$$\exists y(G(x,y) \ \& \ \phi(x,y,z))$$

其中，公式 ϕ 可以包含新的自由变元。这一片断仍然是不可判定的，但是其语义不变行为作为一种定义不受标准模型和广义模型之间的差别影响、具有恰当的“绝对性”的性质的方式，可以应用到算术和集合论中去。[ten Cate. 2005]给出了一个现代处理，其中有一些有趣的新结果，譬如 *BF* 等于添加了命题量词的基本模态逻辑的一阶可定义部分这一结论。

对于本文的一般看法来说，相关的要点就在于此。像 *GF* 那样，*BF* 也表现为一种降低给定逻辑系统的复杂性的一般策略。在二阶逻辑之内，它把有效性的复杂度归约到 *RE*。就像我们刚刚注意到的那样，它并没有进一步取得可判定的结果——但是也可以出现可判定性，只要我们对 *PSOL* 的句法作进一步的限制，限制到谓词和对象上仅仅安保的量词。来看一下促动我们使用 *BF* 的高阶逻辑或集合论的哪些部分甚至在这一更强的形式中是安保的，这也许是有意思的。最后，和 *GF* 一样，*BF* 策略也以两种方式出现：或者句法限制，或者语义模型推广。由此看来，*BF* 和 *GF* 似乎是天生的一对儿。

3.3.4 进一步的模态二阶片断

可以把前面的思想应用到那些现有的、带有二阶风味的模态语言。

例 2（邻域语义学） 在模态邻域语义学之中，关键的语义条款是

$\mathfrak{M}, s \models [\,]\phi$ 当且仅当 存在某个世界集合 X 满足 $N(s, X)$ & $\forall t \in X$: $\mathfrak{M}, t \models \phi$

其中，N 是在世界和世界集合之间的一个给定的三阶关系。这一形式是安保的，因此这些模型的基本模态逻辑是可判定的。此外，甚至可以在保持安保的同时扩充这一逻辑——通过引入另一种带有用以指称集合 X 的元素的算子而表达这些集合的模态性质的公式。通过使用松散安保片段 *LGF* 中的真值条件，这样的可判定语言还可以变得更强。

还可以研究量化模态逻辑或者一元二阶逻辑 *MSOL* 的（松散安保）片断。当然，如果仅以 *RE*-性为目标，在一个持续格式中的真值条件就够了！

例 3（广义量词） 从我们的观点看，最激动人心的挑战是广义量词。把简单的量词，比如*多数 A 都是 B* 或者*至少有是 B 的 C 那么多个 A 是 B*，添加到一阶逻辑，将使这个语言不可公理化，因为标准的自然数可以被定义。这一复杂性可以通过某种安保策略加以驯服吗？一个驯服方法是使用对象之间的安保关系 R。例如，可以把

$$Most\ x \cdot (\phi(x,y), \psi(x,y))$$

解释成“满足 $\phi(x, y) \land Rxy$ 的所有对象 x 大部分也都满足 $\psi(x, y)$”。还不知道这一步是否使得该逻辑是可判定的。例如，[van der Hoek & de Rijke. 1993] 公理化了一个定义了“当前世界的大部分 R-后继……”这样一个算子的可判定基本模态逻辑，但这只是在等价关系 R 上起作用（在 R 为等价关系的时候迭代算子将会坍塌）——而这些都可以通过强力方式加以证明。

但也有另外一种相关的分析。像在持续公式中那样，一个广义量词是一个三阶谓词。广义量词不是自明的，对于这样的谓词我们使用的是一个固定的解释，而非像在上述归约到 RE-复杂度中那样是一个可自由赋值的谓词。即便如此，还是可以尝试界限或者安保出现在那一固定解释本身中的二阶量词。例如，上述关于“大多数”的陈述说的是存在某个从集合 $\{x \mid \phi(x, y) \land \neg Rxy\}$ 到集合 $\{x \mid \phi(x, y) \land Rxy\}$ 的单射，而反方向上则不存在这样一个映射。但是我们可以把其限定如下：

存在某个从 $\{x \mid \phi(x,y) \land \neg Rxy\}$ 到 $\{x \mid \phi(x,y) \land Rxy\}$ 的单射满足某个三阶性质 P，但反方向上则不成立

可以提出相关的三阶性质用以把注意力限制于某类“可用”映射，如可计算映射——或者是由给定的基本谓词可以简单定义的映射。至少在自然语言语义学中，这似乎是一个非常自然的限制。

这些例子仅仅用来展示，限定和安保策略在二阶逻辑中可能会以一些迄今尚未探究的方式表现出它们的用处来。

3.4　更多的路要走

3.2 和 3.3 只是陈述了安保研究中仍然可以提出来的一些问题。在这最后一节中，我们将再列出一些问题，作为一个简短的研究日程表。

3.4.1　下降的安保？

安保的意义不仅在于从一阶逻辑上升，还在于在更多的受限系统中下降。例如，[Kerdiles. 2001] 研究了概念图的语言 CG，这一语言只有原子、合取和存在量词。虽说这样的公式之间的一般后承问题的复杂度是 NP，但是我们有安保的 CG-公式之间的后承在 P 中这一结果。这一结果意味着，安保有时候可以拿走“NP”中的“N”，但是这一现象的精确程度仍是未知的。

3.4.2　*GF* 取代模态逻辑？

安保片段在相当大的程度上扩展了基本模态逻辑的表达力资源。此外，它是

我们熟悉的一阶逻辑系统的一部分——而一阶逻辑的元性质大致类似于基本模态逻辑的元性质。如此一来，人们或许会在各种语境中寻求用更自由的 *GF* 系统地替换基本模态逻辑。例如，μ-演算是可判定的模态不动点语言的一个主要例子，但是为什么不用完整的 *LFP*(*GF*) 取而代之呢（也请参考［Grädel. 1999A］）？类似地，标准模态双仿能做的所有事情用［Andréka, et al. 1998］的“安保双仿”似乎也可以做到。这一替换还没有得到一般性的研究，而且仍然可能有把 *GF* 和别的逻辑组合起来获得相比基本模态逻辑而惊人的系统性质的情形。但是所有这些都是理论问题，——不过下面还有一个实际得多的考虑。

3.4.3 安保的经验范围

基本模态逻辑刻画了一定量的关于单调性和分配的推理，且其部分吸引力在于，没有明显的变元约束机制的模态表达方式在许多领域是广泛存在的。安保句法又怎么样呢？如果我们对在一阶逻辑的标准使用中发现的表达式类型做一个真正的经验调查，我们将发现高度安保形式吗？作为开始，自然语言中的广义量词 $Q(A, B)$ 总是以限制到可定义的子域 A 的形式而出现（“所有人都会死”，“大多数男人喜欢金发女郎”）。然而这还不是完全的安保形式（参阅 3.3.4）——而是一种限定的情形，因为可能会有新的自由变元出现在随后的谓词 B 中。

比自然语言话语更好的一种测试方式也许是形式证明。鉴赏安保的力量和局限的一种好方法是，观察证明不可判定性的铺砖论证。写下一个描述某个矩形网格上的一个铺砖方法的一阶句子，它是可满足的当且仅当在 $N \times N$ 上存在一个预先给定有穷铺砌的铺砖方法。考察相关的断言，可以发现它们大多数是安保的——但是其中至关紧要的一个断言不是安保的，它表达的是网格的汇合性质：意思是说先东后北的行为总是可以被先北后东的行为所模仿。这后一个断言既不是安保的，也不是松散安保的。这样，每当要求某种汇合时，安保就会失败。这一更为广阔的路线是非常重要的，例如在设计计算机科学中的进程逻辑时。对于 *GF* 和 *BF*-型片断的范围来说，另外一个丰富的测试区域是［Andréka, et al. 2007］中研究的那个关于时空的新的一阶理论。

3.5 结　论

安保片段研究的初始动机是多方面的：从设计行为良好的可判定模态片段到广义语义学，从降低一阶逻辑中有效性的复杂度到其他领域中类似的考虑，都是它的动机。这些思想仍然是鲜活的，仍然可以得到进一步的推进。

附录：准模型本身

GF 最初的研究方法本身可能具有应用范围更为广阔的副产品。

特别地说，准模型是模态过滤和代数逻辑的“马赛克”的混合——甚至在某种程度上包括一阶逻辑的语义表列。现在，马赛克——在内梅提（Németi）的高级博士论文［“advanced doctoral dissertation”，这是匈牙利一种更高的第二学位，在其他地方没有相对应者——作者注］中引入、在［Németi. 1995］中有最新的讨论——似乎是模态逻辑和代数逻辑中证明可判定性的特别方法——马克斯、米库拉丝、雷诺兹（Reynolds）及其他很多人对此做出了贡献。但是准模型本身也是值得重视的。首先，某个初始公式 ϕ 的一个准模型事实上是一阶语言的一个模态模型 $\mathfrak{M}_\phi$。类型就是世界，存在可达关系 $=_x$ 在 x 中没有自由变元的所有公式上一致，而对于原子，$V(\Delta, Px)=1$ 当且仅当 $Px\in\Delta$。这样，就可以通过施归纳于公式容易地证明下述真值引理：

引理 6　对于所有的 $\alpha\in SUB_\phi$，$\mathfrak{M}_\phi$ 中所有的类型 Δ，$\mathfrak{M}$，$\Delta\models\alpha$ 当且仅当 $\alpha\in\Delta$。

因此，准模型本身即是模型，而且这或许会导致模态模型论在一阶逻辑中找到新的应用。模态模型和标准模型之间的联系在［van Benthem. 1996B］的第 9.8、9.9 节中有详细的研究。其中有下面这样一些结果。令 x，y 都表示有穷的变元序列。记号 R_x 代表那些可达关系 R_x 按照那些 x 在 x 中的出现顺序而构成的序列复合。

定理 6　一个抽象的模态框架（S，$\{R_x\}x\in VAR$）同构于某个一般指派模型的框架当且仅当 R_x 都是满足所有下述“路径原则”的等价关系：

（a）如果 $sR_{z_1}t$，…，$sR_{z_k}t$，并且在所有 z_1，…，z_k 中都出现的唯一变元是 x，那么 sR_xt。

（b）如果没有变元出现在所有的 z_1，…，z_k 中，那么 $s=t$。

是否能以这同一方式表示带有赋值的模态模型仍是一个悬而未决的问题。至少，需要一些更强的路径原则。但是，如果我们满足于一个较弱的结构等价而非同构，那么所需会更少而非更多。另外，一个类似于稍前准模型中用到的展开论证证明了如下定理。

定理 7　一个有穷的模态模型双仿于一个一般指派模型，当且仅当它的可达关系都是等价关系。

对于标准模型的双仿，情况更为复杂。首先，拥有一个准模型——由定义是

有穷的——并不蕴含拥有一个有穷的标准模型。例如，很容易为只拥有无穷模型的一阶公式

$$\forall xyz((Rxy \ \& \ Ryz) \rightarrow Rxz) \ \& \ \forall x \exists y Rxy \ \& \ \forall x \neg Rxx$$

找到一个准模型。但实际上，拥有一个准模型根本就不必蕴含标准的可满足性。例如，谓词逻辑中不协调的公式 $\exists x \exists y Rxy \ \& \neg \exists y \exists x Ryx$，很明显在论域为 {1, 2}、关系为 {⟨1, 2⟩} 及只有一个可容许指派 s 即 {(x, 1), (y, 2)} 的一般指派模型 $\mathfrak{M}$ 中是可满足的。这个模型也满足稍前的存在概括和完整局部性。由 s 导出的 $\mathfrak{M}$ 的单个类型由此是 $\exists x \exists y Rxy \ \& \neg \exists y \exists x Rxy$ 的一个准模型。在一个类型集合中的这种“不协调性”看起来是奇怪的——但它也说明准模型都是让人迷惑的结构。

致谢

感谢安德烈卡（Hajnal Andréka）、腾卡特（Balder ten Cate）、M. 马克斯（Martin Marx）、内梅（István Németi）提及 JoLLI 的匿名审稿者所提出的非常有用的意见及修正。

参考文献

Andréka H, van Benthem J, Németi I. 1998. Modal languages and bounded fragments of predicate logic. *Journal of Philosophical Logic*, 27: 217 ~ 274

Andréka H, Hodkinson I, Németi I. 1999. Finite algebras of relations are representable on finite sets. *Journal of Symbolic Logic*, 64: 243 ~ 267

Andréka H, Madarasz J, Németi I. 2007. Logics of relativistic space-time. // Aiello M, van Benthem J, Pratt I, eds. *Handbook of Spatial Logics*. Dordrecht: Springer Academic Publishers

Andréka H, Németi I. 2005. Private communication

Feferman S, Kreisel, G. 1969. Persistent and invariant formulas for outer extensions. *Compositio Mathematica*, 20: 29 ~ 52

Grädel E. 1999A. Decision procedures for guarded logics. // *Automated Deduction - Proceedings CADE 16*, Lecture Notes in Computer Science 1632, Berlin: Springer Verlag: 31 ~ 51

Grädel E. 1999B. On the restraining power of guards. *Journal of Symbolic Logic*, 64: 1719 ~ 1742

Grädel E. 1999C. The decidability of guarded fixed point logic. // Gerbrandy J, Marx M, de Rijke M, eds. *JFAK. Essays Dedicated to Johan van Benthem on the Occasion of his 50th Birthday*. CD-ROM http://staff. science. uva. nl/ ~ johan/ ~ j50/cdrom/. Amsterdam: Amsterdam University Press

Hoogland E, Marx M. 2002. Interpolation and definability in guarded fragments. *Studia Logica*, 70:

373 ~ 409

Hoogland E, Marx M, Otto M. 1999. Beth definability for the guarded fragment. // Ganzinger H, McAllester D, Voronkov A, eds. *Logic for Programming and Automated Reasoning*. LPAR 6, Springer Lecture Notes in AI 1705. Berlin: Springer: 273 ~ 285

Kerdiles G. 2001. *Saying it with Pictures: A Logical Landscape of Conceptual Graphs*, PhD thesis. ILLC, University of Amsterdam

Marx M. 2001 Tolerance logic. *Journal of Logic, Language and Information*, 10: 353 ~ 373

Marx M, Venema Y. 1997. *Multi-Dimensional Modal Logic*. Dordrecht: Kluwer

Montague R. 1970. Pragmatics and intensional logic. *Synthese*, 22: 68 ~ 94

Németi I. 1985. Cylindric-relativized set algebras have strong amalgamation. *Journal of Symbolic Logic*, 50: 689 ~ 700

Németi I. 1995. Decidability of weakened versions of first-order logic. // *Logic Colloquium 92*, Stanford: CSLI Publications: 177 ~ 241

Németi I. 1996. Fine-structure analysis of first-order logic. // Marx M, Masuch M, Pólos L, eds. *Arrow Logic and Multi-Modal Logic*. Stanford: CSLI Publications: 221 ~ 247

ten Cate B. 2005. *Model Theory for Extended Modal Languages*, PhD thesis. ILLC, University of Amsterdam

van Benthem J. 1985. *Modal Logic and Classical Logic*, Napoli: Bibliopolis

van Benthem J. 1996A. Complexity of contents versus complexity of wrappings. // Marx M, Masuch M, Pólos L, eds. *Arrow Logic and Multi-Modal Logic*, Stanford: CSLI Publications: 203 ~ 219

van Benthem J. 1996B. *Exploring Logical Dynamics*. Stanford: CSLI Publications

van Benthem J. 1997. Dynamic bits and pieces. Report LP-97-01, ILLC, University of Amsterdam

van Benthem J. 1999. The range of modal logic. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 9: 407 ~ 442

van Benthem J. 2001. Modal logic in two gestalts. // de Rijke M, Wansing H, Zakharyaschev M, eds. *Advances in Modal Logic*, Vol. II. Uppsala 1998. Stanford: CSLI Publications: 73 ~ 100

van der Hoek W, de Rijke M. 1993. Generalized quantifiers and modal logic. *Journal of Logic, Language, and Information*, 2: 19 ~ 50

第2部分

模态逻辑和计算

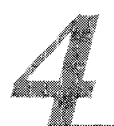
模态逻辑最显著的现代特征之一是其动态逻辑的形式，在那里，“世界”是某种进程的状态，加标的可及关系转换表示基本的行为。实际上，介于模态模型之间基本的互模拟不变性在这一角度下是一个十分自然的概念。动态逻辑产生于计算机科学的程序逻辑中，它包括命题和行为的表达式，特别是，行为在逻辑中受到同等的重视。这个观点得到普拉特（Pratt），哈尔（Harel）等人的发展，最终发展到当代极为丰富的不动点语言，譬如模态 μ-演算。我曾经在拙作《探索逻辑的动态性》一书中热忱地阐述了这个方法。不过，读者可以在本书中看到论述这一观点的论文，这里，我们增加了动态逻辑应用的两个新实例。

“使互模拟安全的程序构造”是我在 1995 年 Clermont-Ferrand 举行的符号逻辑学会（ASL）的逻辑讨论会上的一个邀请发言。这篇文章提出了一个问题：从基本进程等价的角度来说，什么样的进程算子（它们从旧的进程构造新的进程）是自然的？我的回答是“对互模拟是安全的”。并且，我证明了下面的命题：基本上只有经典的命题算子的“动态”部分是满足这个条件的，即，选择，序列结合，和适当的测试否定算子。这种对程序语法和进程结构的分析可以进一步处理进程代数里的可定义算子，其他的研究者在后来的工作中已经这样做了。

但是，那时我继续对加标转换系统的动态语义的一些基本假设进行追问。按照一般表述的那样，它使用关系代数的片断，我们知道一阶逻辑的这些部分马上会变得不可判定：又一次“丘奇魔咒”。1994 年的“动态箭号逻辑笔记”提出了一个新方法，以箭号为主要研究对象的箭号逻辑仍然是可判定的（这个系统在 1990 年左右被维尼玛和我独立发现，我们都受益于布达佩斯的代数逻辑学家）。我认为，箭号逻辑描述了动态行为的核心逻辑。除此之外，关系代数的不可判定性仅仅反映了一个额外的非-逻辑特征，即，使用带有很多转换关系的具体模型。这篇论文说明如何推广这种分析以包括非-一阶的进程算子，譬如迭代和极小化。

更为一般，我发展的这种“解构”程序能够把在其他领域的内容和包装纸分离开来。一个突出的例子还是一阶谓词逻辑本身。我认为，如果我们把下面的两个方面分开来，一阶谓词逻辑也有一个可判定的核心部分：一方面是那些规定组合解释的一些基本原则，它们对变元的独立或依赖关系不做任何假设，另一方面是基于具体的“全部指派模型”得到的不可判定的“区域”。最后一篇论文“谓词逻辑的模态基础”证明了如何做到这一点。这篇文章从 1995 年之后在很多地方报告和发表过。例如，在解释进程的可用指派空间中看，它揭示了一阶公理诸如 $\exists x \forall y\phi \to \forall y \exists x\phi$ 与指派行为的计算假设诸如“汇合”之间系统的对应。我认为如果你掌握了这里的思维方式，当你再次打开一本一阶逻辑的教科书时，

你应当看到不一样的东西！也许这篇论文最重要的想法是分析作为主要的逻辑范畴的变元本身之间的依赖关系。类似的想法可见于辛梯卡（Hintikka），霍基斯（Hodges），以及外纳能（Väänänen）等最近的工作，它与很多新的领域，譬如互动和博弈可以自然地联系起来。



动态箭号逻辑笔记*

刘新文/译　胡义昭/校

4.1　寻求计算内核

当前逻辑和信息流研究的兴趣已经在可以宽泛地称为“动态逻辑”的各种系统中找到技术表达。但不幸的是，基于计算状态之间的二元转换关系的现有动态逻辑具有高度的复杂性（参见［Harel. 1984］)。因此，值得重新考虑，在不陷入由额外的“序对数学”产生的复杂性困境的情况下，选择一个相对简单的动态基础系统，以形成我们需要的“计算内核”。这一计划在某种程度上为程序和行为的各种代数理论所实现。但是，潜藏在这些方法当中的常规智慧可能是带有偏见的，比方说，坚持认为布尔否定或者补是复杂性的主要来源。通过一种变通办法，即建立“箭号”的模态逻辑，就可以看到这一点；这一模态逻辑把转换本身严格地看成动态对象（参见［van Benthem. 1991；Venema. 1992］)。本笔记的主要技术结果是提出了一个包含一阶关系运算和无穷克里尼迭代的箭号逻辑系统，这个系统对于计算内核演算来说可能是一个恰当的候选者。我们还特别地证明了其极小系统的完全性，并且建立了它和命题动态逻辑及范畴逻辑的各种联系。

上述提议的背后其实还有一个更为一般的计划。例如，人们对于计算文献中许多其他系统也可以做同一种类的“箭号分析”，本卷中德莱克（de Rijke）的“动态模态逻辑”就是一例。此外，明显的不可判定性及高阶复杂性引起的问题大量存在于关于程序语言的语义学之中。比如说，在霍尔逻辑（Hoare Logic）中，无穷控制结构产生高度的复杂性：那么，这是不可避免的吗？或者说情况是否可以通过重新设计而得到缓和？同样的情形也出现在知识表示中，高阶数据结

* A Note on Dynamic Arrow Logic // van Eijck J, Visser A. *Logic and Information Flow*. Cambridge MA: MIT Press: 1994. 15 ~ 29.

构（如树中的“枝”）可以产生复杂性，有“分叉时序逻辑”领域为证，但是这种结构可以通过对多种类一阶理论重新进行恰当的分析加以避免。因此本笔记提出的一般问题如下：

> 在程序语言及其语义的逻辑分析中，何为真正的“计算”，何为“题外数学”？

如果我们能够把前一个问题孤立出来的话，当前文献中许多不同的技术结果就可以被看成是不同的计算内容加上本质上相同的数学开销的一次重复而已。对这一问题我们在这里并不提出一般的解决办法，不过，我们还是主张对这一现象有一个清醒的意识。

4.2　箭号逻辑概要

箭号逻辑背后的直观思想如下。二元关系可以被看成是箭号的指示集合。重要的例子有图表中的“弧线”，计算机科学中动态程序的“转换”，当然也可以算上（在人工智能、社会选择和经济学的当前推理理论中所看到的）等级关系中的“优先”。这些箭号可以有一个内部结构，由此它们不必等同于序对〈起点，终点〉：有些箭号可以共享某个相同的输入-输出序对，有的序对却无法用箭号例示出来。这就是下述定义的动机（此处只是一个概要，进一步的技术细节可以在参考文献中找到）：

箭号框架　是一个四元序组 $\langle A, C^3, R^2, I^1\rangle$，其中

A	是带有如下三个谓词的对象(“箭号”）集合：
C^3x, yz	x 是 y 和 z 的“复合”
R^2x, y	y 是 x 的“逆”
I^1x	x 是一个“恒等”箭号

箭号模型　$\mathfrak{M}$ 在箭号框架上加上一个命题赋值 V，然后就可以解释一个恰当的模态命题语言，这样的语言使用两个反映关系代数的基本“序运算”的模态词来表达箭号（的集合）的性质：

$\mathfrak{M}, x \models p$	当且仅当	$x \in V(p)$
$\mathfrak{M}, x \models \neg\phi$	当且仅当	并非 $\mathfrak{M}, x \models \phi$
$\mathfrak{M}, x \models \phi \,\&\, \psi$	当且仅当	$\mathfrak{M}, x \models \phi$ 并且 $\mathfrak{M}, x \models \psi$
$\mathfrak{M}, x \models \phi \cdot \psi$	当且仅当	存在使 C^3x, yz 成立的 y 和 z，使得 $\mathfrak{M}, y \models \phi$，$\mathfrak{M}, z \models \psi$

$\mathfrak{M}, x \models \phi^{\nu}$　　当且仅当　　存在使 R^2x, y 成立的 y，使得 $\mathfrak{M}, y \models \phi$

$\mathfrak{M}, x \models Id$　　当且仅当　　Ix

这一系统的极小模态逻辑与其单模态前身极为相似，其关键原则是如下的模态分配公理：

$(\phi_1 \vee \phi_2) \cdot \psi \leftrightarrow (\phi_1 \cdot \psi) \vee (\phi_2 \cdot \psi)$

$\phi \cdot (\psi_1 \vee \psi_2) \leftrightarrow (\phi \cdot \psi_1) \vee (\phi \cdot \psi_2)$

$(\phi_1 \vee \phi_2)^{\nu} \leftrightarrow \phi_1^{\nu} \vee \phi_2^{\nu}$

按照使用亨金模型的标准方法可以证明其完全性定理（这一极小逻辑包含了布尔代数的所有通常规律）。

其次，可以（仿照关系代数）进一步添加公理原则，并且通过通常的语义对应来分析它们为箭号框架添加了什么约束。特别是我们有

(1) $\neg(\phi)^{\nu} \rightarrow (\neg \phi)^{\nu}$　当且仅当　$\forall x \exists y\, Rx, y$

(2) $(\neg \phi)^{\nu} \rightarrow \neg(\phi)^{\nu}$　当且仅当　$\forall xyz: (Rx, y \,\&\, Rx, z) \rightarrow y = z$

它们一起把二元关系 R 转换为关于“逆”的一元函数 r。然后，“双重变换”公理使得函数 r 为幂等函数：

(3) $(\phi)^{\nu\nu} \leftrightarrow \phi$　当且仅当　$\forall x r(r(x)) = x$

此后将在我们的箭号框架中假定这一点。下一步，关系代数的下述原则控制逆和复合的相互作用：

(4) $(\phi \cdot \psi)^{\nu} \rightarrow \psi^{\nu} \cdot \phi^{\nu}$　　当且仅当　　$\forall xyz: Cx, yz \rightarrow Cr(x), r(z)r(y)$

(5) $\phi \cdot \neg(\phi^{\nu} \cdot \psi) \rightarrow \neg \psi$　　当且仅当　　$\forall xyz$: $Cx, yz \rightarrow Cz, r(y)x$

(2)、(4) 和 (5) 一起蕴涵另一条交换原则 $\forall xyz$: $Cx, yz \rightarrow Cy, xr(z)$。此外，公理 (5) 有一个不带否定的更为漂亮的形式：

$$\phi \,\&\, (\psi \cdot \chi) \rightarrow \psi \cdot (\chi \,\&\, (\psi^{\nu} \cdot \phi))$$

最后，命题常元 Id 将像下面那样包含在对应中：

(6) $Id \rightarrow Id^{\nu}$　　当且仅当　　$\forall x: Ix \rightarrow Ir(x)$

(7) $Id \cdot \phi \rightarrow \phi$　　当且仅当　　$\forall xyz: (Iy \,\&\, Cx, yz) \rightarrow x = z$

很明显，这里还有许多进一步的选择，而“箭号逻辑”实际上代表着一族模态逻辑，对它们的选择可能取决于预期的应用。然而，这一领域中最自然的“计算内核”可能是什么？我们的推荐是：

全称框架约束　只取箭号框架上那些关于复合、逆和恒等却不带存在含义的原则：即它们的对应约束可以用纯粹全称一阶句子来表示。

这一建议的一个可能例外是复合的结合律：

(8a) $(\phi \cdot \psi) \cdot \chi \rightarrow \phi \cdot (\psi \cdot \chi)$ 当且仅当

$\forall xyzuv:((Cx, yz \& Cy, uv) \rightarrow \exists w:(Cx, uw \& Cw, vz))$

(8b) 相反的方向上是类似的

在动态语义学的叙述中经常偷偷地预设结合律。在后面我们将避免这样的情况。

关于箭号逻辑的系统图景的更多信息可以在下述文献中找到：[van Benthem. 1991；Marx，et al. 1992；Vakarelov. 1992；Venema. 1992]（也可参见附录1）。这里需要提到两个进一步的技术问题。一个是某种一致性（uniformity）的存在。以上的对应都是从模态逻辑中称为萨奎斯特定理（参见[van Benthem. 1984]）这个一般性结果中推出来的——对于那些也可以应用到被提议加入核心集合的其他候选者的框架条件，该定理为我们提供了一个算法。另外一个是，目前的模态语言在其表达力方面也有明显的局限。值得注意的是，无法强迫复合变成一个部分函数（一般箭号逻辑允许以多种方式来复合两个转换）。对于后一个目的，需要一些采用了更多模态算子、更丰富的模态形式系统（参见[De Rijke. 1992B；Roorda. 1992]），但是本文对此不做研究。当然，到我们已经通过序对集加强了箭号框架的完整可表现性的时候为止，所得到的模态逻辑正好和可表示关系代数的普通理论一样复杂。巧妙之处在于知道何时该停下来。

4.3 动态箭号逻辑的一个完全系统

现在，动态箭号逻辑为上述语言添加了一个无穷算子：

$\mathfrak{M}, x \models \phi^*$ 当且仅当 x 可以被 C-分解成某个在 $\mathfrak{M}$ 中满足 ϕ 的有穷箭号序列

这就是说，$\mathfrak{M}$ 中存在某个有穷的 ϕ-箭号序列，允许至少一种经由中间箭号的连续复合方式以致达到 x（没有了结合律，这并不蕴含 x 可以从这些相同箭号的任意复合路径而得到）。直观上讲，ϕ^* 描述的是 ϕ 的传递闭包。它满足如下简单、自然的原则：

(9) 公理 $\phi \rightarrow \phi^*$

(10) 公理 $\phi^* \cdot \phi^* \rightarrow \phi^*$

(11) 规则 如果 $\phi \rightarrow \alpha$ 及 $\alpha \cdot \alpha \rightarrow \alpha$ 都是可证的，那么 $\phi^* \rightarrow \alpha$ 也是可证的

这些原则可以添加到此前的极小箭号逻辑，以得到一个简单的基础系统，但我们倾向于选择在这一极小基础加上此前的原则（1）～（5）以得到一个合适的公理化动态逻辑 *DAL*。下面是这一系统如何运行的一个说明。

例 1　对于迭代的单调性的推导

如果 $\vdash \alpha \to \beta$　　　　那么 $\vdash \alpha \to \beta^*$（公理(9)）

还有 $\vdash \beta^* \cdot \beta^* \to \beta^*$（公理(10)）　　因此 $\vdash \alpha^* \to \beta^*$（规则(11)）

例 2　迭代和逆的互换的推导

(i) $\phi \to \phi^*$	公理（9）
(ii) $\phi^{\nu} \to \phi^{*\nu}$	i 及逆的单调性 （逆的单调性由其分配律而来）
(iii) $(\phi^{*\nu} \cdot \phi^{*\nu}) \to (\phi^* \cdot \phi^*)^{\nu}$	从公理（3）、（4）可以推出
(iv) $\phi^* \cdot \phi^* \to \phi^*$	公理（10）
(v) $(\phi^* \cdot \phi^*)^{\nu} \to \phi^{*\nu}$	iv 加上逆的单调性
(vi) $(\phi^{*\nu} \cdot \phi^{*\nu}) \to \phi^{*\nu}$	iii,v
(vii) $\phi^{\nu *} \to \phi^{*\nu}$	ii,vi 加上规则（11）
(viii) $\phi^{\nu\nu *} \to \phi^{\nu *\nu}$	类似的推理
(ix) $\phi \to \phi^{\nu\nu}$	公理（3）
(x) $\phi^* \to \phi^{\nu\nu *}$	迭代的单调性
(xi) $\phi^* \to \phi^{\nu *\nu}$	x,viii
(xii) $\phi^{*\nu} \to \phi^{\nu *\nu\nu}$	xi 加上逆的单调性
(xiii) $\phi^{\nu *\nu\nu} \to \phi^{\nu *}$	公理（2）
(xiv) $\phi^{*\nu} \to \phi^{\nu *}$	xii,xiii

可以为 *DAL* 及它的某几个变体建立完全性。

定理 1　*DAL* 对其预期的解释是完全的。

证明：取相关公式的某个有穷集合为论域，它对子公式封闭并且满足下述闭包条件：

如果 ϕ^* 包含在这个集合中，那么 $\phi^* \cdot \phi^*$ 也包含在其中

现在，考虑在这一受限制的论域中的所有极大协调集组成的通常模型，（对所有“相关的”公式）规定：

Cx, yz　当且仅当　$\forall \phi \in y, \psi \in z: \phi \cdot \psi \in x$

Rx, y　当且仅当　$\forall \phi \in y: \phi^{\nu} \in x$

这里，我们只使用极小分配公理就可以证明极大协调集的通常“分解”，如

$\phi \cdot \psi \in x$　当且仅当　存在 y, z 使得 Cx, yz 且 $\phi \in y, \psi \in z$

这里关键的新情形是：

声明　$\phi^* \in x$ 当且仅当由每一个都包含 ϕ 的极大协调集组成的某个有穷序列

可以在前面提及的意义上“C-组合”到 x。

证明：*从右到左*。运用公理（9）、（10）和相关公式上的闭包条件，直接施归纳于分解的长度。

从左到右。以通常方式用一个公式 α 来描述所有“有穷 C-可分解的”极大协调集的有穷集：α 是与所有和这些极大协调集相关联的“完整描述”δ 的析取。那么我们有：

$$\vdash \phi \to \alpha$$

原因在于，在命题逻辑中 ϕ 与 $\bigvee_{\phi \in \delta}\delta$ 是关于可证性等价的，并且由定义，α 包含所有这些 δ。然后，我们有

$$\vdash \alpha \cdot \alpha \to \alpha$$

为了明白这一点，假设 $(\alpha \cdot \alpha) \& \neg \alpha$ 是协调的。运用关于连续相关公式的分配律，对于某个极大协调的 δ_1 和 δ_2 来说，$(\delta_1 \cdot \delta_2) \& \neg \alpha$ 一定是协调的。类似地，对某一个极大协调的 δ_3 来说，$(\delta_1 \cdot \delta_2) \& \neg \alpha \& \delta_3$ 将是协调的。现在，δ_1，δ_2 一定在 α 中，此外，由 C 的定义和某个演绎推理，有 $C\,\delta_3,\ \delta_1\delta_2$。因此，（由定义）$\delta_3$ 也在 α 中，这与 $\neg \alpha \& \delta_3$ 的协调性相矛盾。因此，应用迭代规则（11），我们有

$$\vdash \phi^* \to \alpha$$

所以，如果 $\phi^* \in x$，那么 x 属于 α。

典范模型中的语义赋值将和上面的语形分解一起协调地运行：任意相关公式“在”一个极大协调集为真当且仅当它属于这一集合。这就是我们对基本情形的分析。

为了处理附加的公理（1）~（5），它们的框架性质必须得到执行到我们的有穷典范模型中去。可按照如下方式做到这一点：

（i）在布尔运算和逆运算下封闭相关公式的论域：给定布尔规律和关于逆的可互换原则，所得到的无穷公式集仍然是*逻辑有穷的*；

（ii）关系 C 的定义通过添加恰当的条件而加以改变，以便“融入”所要求的额外框架性质。

首先，所要求的反转行为容易得到。可以把 $r(x)$ 定义成包含 $\{\phi^\vee \mid \phi \in x\}$（的所有代表）的极大协调集：可用的公理将使它成为相关极大协调集的论域内的一个幂等函数。对于一个更困难的情形，考虑公理（5）及对应的框架条件 $\forall xyz: Cx,yz \to C\,z,\ r(y)x$。重新定义：

$C\,x,\ yz$ 当且仅当 既有 $\forall \phi \in y, \psi \in z: \phi \cdot \psi \in x$，
也要 $\forall \phi^\vee \in y, \psi \in x: \phi \cdot \psi \in z$

这一设计可以使得给定的框架条件有效。但现在我们需要验证，此前关于极

大协调集的分解的那些事实仍然可用，以保留成员关系和在那样的集合上为真这两者之间的一致。下面是两种关键情形：

$\phi \cdot \psi \in x$ 当且仅当 存在 y,z 使得 $C\,x,\,yz$ 且 $\phi \in y, \psi \in z$

$\phi^* \in x$ 当且仅当 包含 ϕ 的各个极大协调集组成的某个有穷序列“C-组合”到 x

这里至关重要的方向是从左到右：我们可以找到那些要使 C 满足额外条件而必需的极大协调集吗？我们需要的就在于此。在稍前的证明之中，通过证明连续选择如何产生一个协调的公式集 x，$\&y \cdot \&z$（其中 $\phi \in y, \psi \in z$），集合 y,z 被“全局地”构造出来。（在那里，每当 $\alpha \cdot \beta$ 是一个满足 $\alpha \in y, \beta \in z$ 的相关公式时，$\alpha \cdot \beta$ 一定属于 x，否则就会不协调。）现在，只需证明在同一情景之中，集合 z，$\&r(y) \cdot \&x$ 也是协调的。这里，我们使用一条从公理(2)和(5)导出的规则：

$$\text{如果 } \vdash \phi \rightarrow \neg(\psi \cdot \chi)\text{，那么 } \vdash x \rightarrow \neg(\psi^{\vee} \cdot \phi)$$

然后，如果 $\vdash z \rightarrow \neg(\&r(y) \cdot \&x)$，那么 $\vdash x \rightarrow \neg(\&rr(y) \cdot \&z)$，并且因此还有 $\vdash x \rightarrow \neg(\&y \cdot \&z)$：与 x，$\&y \cdot \&z$ 的协调性相矛盾。对迭代的论证是相似的。此外，同时考虑所有框架条件的一般情形使用的是相同的推理。 ■

推论 *DAL* 是可判定的。

证明：前面的论证建立的不仅有公理系统的完全性，还有有穷模型性。 ■

以上和有穷反模型中相关的额外框架性质相顺应的策略是［Roorda. 1991］所使用的。更一般地，我们猜想每一个关于霍恩子句框架条件的某个有穷集合完全的模态逻辑都具有有穷模型性。但是，如果结合律的进一步的存在性质包括进我们的基本箭号逻辑，可判定性还将成立吗？这个问题更加困难，原因在于那些所需的额外世界（其存在性可以通过传统的论证在完全亨金模型中容易地证明）似乎在过滤过程中超出了“相关的”极大协调集的有穷论域。D. 瓦卡若洛夫（D. Vakarelov）宣布了一个证明，但是，［Andréka. 1991］中的否定性结果提醒我们要谨慎。

另外一种策略是使用*加标形式*的箭号逻辑，其中命题形如“箭号：断言”，上面的真值定义被转写成谓词逻辑的一个简单片断。标记可以是（带有复合关系和逆关系的）纯粹箭号，也可以是来源于某个（半）群的复杂描述。这样，按照［Roorda. 1992］，可判定性或许可以利用箭号逻辑的某个无切割加标后承演算的一个能行等价系统加以证明，其中，该系统的规则可能使用下述格式：

$\Sigma, x{:}A, y{:}B \vdash \Delta$ 蕴涵 $\Sigma, xy{:}A \cdot B \vdash \Delta$

$\Sigma \vdash \Delta, r(x){:}A$ 蕴涵 $\Sigma \vdash \Delta, x{:}A^{\vee}$

对箭号逻辑进行一般的加标研究需作进一步的探索。

4.4　带箭号的命题动态逻辑

现在，基于上述箭号逻辑的一个命题动态逻辑会是什么样子呢？文献中通常的方案把添加一个指称状态上的真的命题部分看成是至关重要的，因为它至少在后一个层次上给我们提供了某种否定。由于现在这一点不再为真，拥有这第二个部分就会多一些方便。然而，我们确实认为所得到的双层次系统是一个自然的系统："箭号谈论"和"状态谈论"同属于关于计算和一般行为的一个分析。所以像通常那样，我们添加一个布尔命题语言，以及两个所得部分之间相互作用的两个机制：

一个使陈述转换为程序的测试"模式"?

一个使程序转换为陈述的论域"投射"〈〉

为记法上的便利起见，此后我们将在这一双层次系统中保留 ϕ，ψ，…用作状态断言，π，π_1，π_2，…用来描述程序。

与上述的一般模态分析相一致，我们以更为抽象的形式来考虑这一系统。我们所拥有的是一个二种类的模态逻辑，其模型中既有"状态"也有"箭号"，其公式都为在这两者之一上的预期解释做了标记。箭号论域和状态论域都具有内部结构，这在某些模态词中得到反映，像在前面指称箭号的 · 和ˇ中那样（状态可以通过带有恰当模态词的"前驱关系"或者"优先关系"来排序）。然而我们的关键点也就在于此。甚至这些模式和投射本身也可以看成是"非同质的"模态词，这反映了有某种结构把我们模型中的两种对象相互关联起来。例如，"测试"还是一个可分配模态词，"论域"也是如此：

$(\phi \vee \psi)? \leftrightarrow \phi? \vee \psi?$

$\langle \pi_1 \vee \pi_2 \rangle \leftrightarrow \langle \pi_1 \rangle \vee \langle \pi_2 \rangle$

这两个模态词的解释如下：

$\mathfrak{M}, x \models \phi?$　当且仅当　存在某个 s 使得 Tx, s 且 $\mathfrak{M}, s \models \phi$

$\mathfrak{M}, s \models \langle \pi \rangle$　当且仅当　存在某个 x 使得 Ds, x 且 $\mathfrak{M}, s \models \pi$

直观上讲，第一个关系 Tx, s 是说，x 是一个对于点 s 的恒等箭号，而第二个关系 Ds, x 是说，s 是箭号 x 的一个左端点。

利用通常的对应，关于? 和〈〉的进一步的公理将在我们的箭号框架中为 T 和 D 之间增添额外的联系。

例 3　联结恒等箭号和端点

原则 $\langle \phi? \rangle \leftrightarrow \phi$（本身又是一个模态"萨奎斯特形式"的公式）表达了下述公式

的合取：

$\forall s \exists x: Ds, x \ \& \ Tx, s$

$\forall sx: Ds, x \rightarrow \forall s': Tx, s' \rightarrow s = s'$

利用两种极大协调集，公理系统完全性证明在这里也是直接的：一种极大协调集针对箭号，另一种则针对点。因此，关于命题动态逻辑的所有事情都是模态逻辑的：不仅对于它的两个分离的部分来说是这样，这两个部分的联系也是如此。这里，通过重新构造系统还可以得到进一步的漂亮结果。下面的观察是［van Benthem. 1991］作出的：

事实　存在一个作为布尔同态的投射，即对角线函数 $\lambda R \cdot \lambda x \cdot Rxx$；刚好只有两个同态模式，即 $\lambda P \cdot \lambda xy \cdot Px$ 和 $\lambda P \cdot \lambda xy \cdot Py$。

这样，我们可以引入三个模态词以匹配它们的语义中新的二元关系：

$\mathfrak{M}, s \models D\pi$　当且仅当　对某个 x,$\Delta s, x$ 且 $\mathfrak{M}, x \models \pi$

$\mathfrak{M}, x \models L\phi$　当且仅当　对某个 s, $\mathcal{L}s, x$ 且 $\mathfrak{M}, s \models \phi$

$\mathfrak{M}, x \models R\phi$　当且仅当　对某个 s,$\mathcal{R}s, x$ 且 $\mathfrak{M}, s \models \phi$

这些模态词不仅满足分配公理,而且(就像关系逆一样)可与布尔否定交换，因此我们可以把 Δ, $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ 看做是函数。这一构造更为漂亮,也易于使用(为了支持 $(L\phi)^{\vee}$ 而省掉 $R\phi$ 可以更简化一点)。例如,公理原则的一个来源是各种算子的相互作用：

观察

$DL\phi \leftrightarrow \phi$	表达的是	$\forall s: \mathcal{L}\Delta(s) = s$
$LD\pi \leftrightarrow (\pi \ \& \ Id) \cdot T$	表达的是	$\forall x \exists y: C\,x,\ \Delta\mathcal{L}(x)y$
$L\phi \cdot \pi \leftrightarrow L\phi$	表达的是	$\forall xyz: C\,x, yz \rightarrow \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(y)$

若按照如下翻译方法，我们就可以准确地得到带有这些新初始符号的标准系统的表达力量：

从旧格式到新格式的翻译

$\phi?$:　　$L\phi \ \& \ Id$

$\langle\pi\rangle$:　　$D(\pi \cdot T)$

以这种方式分析命题动态逻辑通常的公理只是一个简单的练习。我们列举出我们需要的那些关键原则（它们使得我们可以把陈述 $\langle\pi\rangle\phi$ 忠实地表示成 $D((\pi \& R\phi) \cdot T))$：

（1）　$D\pi \rightarrow D(\pi \ \& \ Id)$

（2）　$Id \rightarrow (L\phi \leftrightarrow R\phi)$

（3a）　$DL\phi \leftrightarrow \phi$

(3b) $DR\phi \leftrightarrow \phi$

(4) $\pi_1 \,\&\, RD\pi_2 \leftrightarrow \pi_1 \cdot (\pi_2 \,\&\, Id)$

(5) $(\pi_1 \cdot \pi_2) \,\&\, R\phi \leftrightarrow \pi_1 \cdot (\pi_2 \,\&\, R\phi)$

它们对应的框架条件可以手动或者又一次利用萨奎斯特算法计算出来，原因在于它们都具有恰当的模态形式。这些原则对于推出各种其他有用的原则来说是足够的，比如下述归约

$(Id \,\&\, L\phi) \cdot \pi \leftrightarrow L\phi \,\&\, \pi$

$\pi \cdot (Id \,\&\, R\phi) \leftrightarrow \pi \,\&\, R\phi$

最后，利用另外两个翻译模式，我们还有一个反转路径：

从旧格式到新格式的翻译

$L\phi$: $\phi? \cdot T$

$D\pi$: $\langle Id \,\&\, \pi \rangle$

相同的分析风格可以应用到更为丰富的、其状态论域具有额外结构的动态逻辑系统（参见[van Benthem. 1991；de Rijke. 1992A]）。一个例子就是德莱克为本卷所贡献的“动态模态逻辑”，它的特别之点在于带有一个包含序 б 的信息状态之上的模式。这一点可以通过在箭号层次上引入另外一个命题常元，如表示“包含关系”的 E（也许还带有表达其传递性和自返性的恰当的公理）来处理。然后，这一关于更新和修正的逻辑将使用特别定义的箭号，如

$E \,\&\, R\phi$	适于 ϕ 的更新转换
$(E \,\&\, R\phi) \,\&\, ((E \,\&\, R\phi) \cdot (E \,\&\, \neg\, Id))$	适于 ϕ 的极小更新转换

这可以为我们提供一种可行的方案选择，在这里，我们回避了整个系统的不可判定性。约略地说，箭号系统应该站在了“二维边界”的右边，这个“二维边界”允许我们把二维方格嵌入模型，且由此对全部图灵机计算进行编码。

致谢

安德烈卡（Hajnal Andréka）、内梅提（István Németi）、德莱克 Maarten de Rijke、塞恩（Ildikó Sain）、瓦卡若洛夫（Dimiter Vakarelov）及维尼玛（Yde Venema）曾对本文的草稿提出了有益的意见，并提出了他们对“箭号逻辑”的一般看法，特此致谢！

附录 1 从阿姆斯特丹到布达佩斯

“阿姆斯特丹形式”的箭号逻辑认为，动态转换不必等同于某个基础状态集的序对。这一思想实际上拥有两个不同的方面。不同的箭号可以对应于同一个序对〈输入，输出〉，但也并不是说每一个这样的序对需要对应一个可用的箭号。

下述不太标准的例子很好地证明了这一点：

> 令箭号都是函数 $f: A \to B$，它们给出、但不可能等同于“源”和“目标”组成的序对 $\langle A, B\rangle$。那么，关系 C 表达的是映射的复合的偏函数，而逆关系 R 将在一个函数及其逆之间成立，如果有这些函数的话。

这一模型将满足所有前面的核心原则，至少忽略逆的函数性之后对于它们的恰当版本来说是如此。例如，公理（5）现在表达这一事实，即每当 $f = g \circ h$ 且 $k = g^{-1}$ 那么 $h = k \circ f$。

然而，在布达佩斯学派稍早和近来发表的一些论著中还可以发现一个有趣的、更“保守的”变种，其中箭号仍然是序对，只是放弃了所有序对都可以作为箭号来使用的思想。本质上这把我们带到全称一阶可定义的箭号框架类，这一框架类可以由序对集（虽然不必是完全卡氏积）来表示。它的完全逻辑可以在我们的形式系统中得到确定，同时也被证明是可判定的([Marx, et al. 1992])。这一系统是箭号图景中另外一个自然的、也是更丰富的终点，它包括早先在以上第二节中研究的各个系统，并有额外的公理在本质上表达环绕任意一个箭号的那个恒等箭号序对的唯一性，而这些系统对于复合和逆还有“合适的松紧度”。各种具有我们想要的元性质（可判定性、内插性等）的、但较弱的自然箭号逻辑可以在［Németi. 1987］中找到（也可以参考［Németi. 1991］的综述以了解更为广阔的研究结果）。［Simón. 1992］研究了箭号逻辑的演绎定理，证明了我们的基本系统缺乏这一定理。最后，［Andréka. 1991］提供了一个方法来在有完整结合律的情形下证明关于非有穷可公理化的一些结果。在这个观点之下，只要我们获得足够的力量去执行从关系代数的拟等式到等式的编码任务的话，不可判定性就在眼前。

附录 2　带一个不动点算子的动态箭号逻辑

这一笔记的分析可加以拓展去证明更具表达力的、具有著名的极小不动点算子 $\mu p \cdot \phi(p)$ 的动态箭号逻辑系统的完全性。它的两个关键的推导规则如下所示：

如果 $\vdash \phi(\alpha) \to \alpha$	那么 $\vdash \mu p \cdot \phi(p) \to \alpha$	I
如果 $\vdash \beta \to \mu p \cdot \phi(p)$	那么 $\vdash \phi(\beta) \to \mu p \cdot \phi(p)$	II

该语言利用不动点公式来定义我们意义上的迭代 ϕ^*：

$$\mu p \cdot \phi \vee p \cdot p$$

（它的连续逼近为我们给出了所有在早先的语义定义中提到的 C-组合）。这样，对于迭代的推导规则可以从上述两条规则导出：I 对应规则（11），而 II 与（9）、（10）具有一样的效果。在完全性定理中，这些规则使得我们可以把早前的论证推广到下述关键的分解上来：

$\mu p \cdot \phi(p) \in x$ 当且仅当 x 属于 $\lambda p \cdot \phi(p)$ 的某个从空集开始的算子的有穷迭代

附录 3 与范畴逻辑和行为代数的联系

动态箭号逻辑也可以和范畴逻辑的动态版本作比较，就像在用克里尼迭代来扩充的当前范畴语法中一样。在基本层次上，这一联系在普通的箭号逻辑和像带两个有向函数斜线的兰贝克演算这样的标准系统之间成立（详细情况参见［van Benthem. 1991；1995］）：

$$a \backslash b := \neg (a^{\vee} \cdot \neg b)$$
$$a/b := \neg (\neg b \cdot a^{\vee})$$

此外，范畴积对应复合 · 。这样，这两个基本的范畴规律表达了箭号框架上 C 和 r 的基本交互原则：

$$a \cdot (a \backslash b) \leqslant b \qquad \forall xyz: C\, x,\ yz \rightarrow C\, z;\ r(y)x$$
$$(b/a) \cdot a \leqslant b \qquad \forall xyz: C\, x,\ yz \rightarrow C\, y,\ xr(z)$$

从此我们得到两个蕴涵式

$$X \leqslant a \backslash b \Rightarrow a \cdot X \leqslant b$$
$$X \leqslant b/a \Rightarrow X \cdot a \leqslant b$$

不再另外需要它们的（生成全部兰贝克演算的）逆命题。例如，假设 $a \cdot X \leqslant b$。现在，由第一条交互原则有 $X \mathbin{\&} (a^{\vee} \cdot \neg b) \leqslant a^{\vee} \cdot (\neg b \mathbin{\&} (a \cdot X))$，因此我们得到 $X \mathbin{\&} (a^{\vee} \cdot \neg b) \leqslant a^{\vee} \cdot (\neg b \mathbin{\&} b)$ 且因此有 $X \mathbin{\&} (a^{\vee} \cdot \neg b) \leqslant a^{\vee} \cdot 0 \leqslant 0$，即 $X \leqslant \neg (a^{\vee} \cdot \neg b)$。

这样，基本箭号逻辑包含了兰贝克演算，而且由于［Mikulás. 1992］中的完全性定理，它完完全全地包含了兰贝克演算。范畴逻辑和箭号逻辑之间进一步的联系仍有待于研究。

再加上 *，我们得到一些明显的、更进一步的原则，如源于塔斯基和吴（Ng）的

$$(a \backslash a)^* = (a \backslash a)$$

注意，现在这可以从动态箭号逻辑中推导出来：

(1) $(a \backslash a) \leqslant (a \backslash a)^*$ 公理(9)

(2) $(a \backslash a) \leqslant (a \backslash a)$

$(a \backslash a) \cdot (a \backslash a) \leqslant (a \backslash a)$ 由上述（可在箭号逻辑中推出的）范畴原则

$(a \backslash a)^* = (a \backslash a)$　　　　由规则(11)

一个相关的系统是［Pratt. 1990］及它之前的出版物提出的行为代数，可以视为添加了迭代和析取的一个标准范畴逻辑。这里一件有意思的事情应该是确定它和箭号逻辑的精确关系。至少，容易确定的是普拉特（Pratt）提出的等式公理化的下述“箭号内容”。它的每一个基本公理都例示了我们的构架中四类断言中的一个：

(i) 极小箭号逻辑的推论 —— 特别是单调性的基本原则(一个典型的例子是 $\vdash a \to b \leqslant a \to (b + b')$”);

(ii) 范畴原则的表达式,其内容是复合和逆之间的基本交互(就像在 $\vdash a(a \to b) \leqslant b \leqslant a \to ab$”这些不等式中表达的一样);

(iii) 适于迭代的普遍有效原则,如其单调性(比较 $\vdash a^* \leqslant (a + b)^*$”);

(iv) 复合的结合性（正如我们看到的那样，其精确的能力在箭号架构中仍有待于确定)。

附录 4　谓词箭号逻辑

上述分析的风格是否可以应用到通常的谓词逻辑大概也是一个有意思的问题。特别是，一旦我们放弃通常对序对的偏爱，其不可判定性是否也尾随而去？首先，可以很容易地把它表述出来：

取一个具有“对象”和“箭号”的二种类语言，并且把诸如“Rxy”等读作

$$\exists a(Ra \ \& \ l(a) = x \ \& \ r(a) = y)$$

因此，我们需要一个适于旧有关系的一元谓词，以及两个新的、辅助的跨种类映射 l 和 r 以指定箭号的两个端点（对于一般的 n 元关系，我们或许需要一个更多维的箭号逻辑，就像在［Vakarelov. 1992］中一样)。但是，所得的系统仍然忠实地嵌入通常的谓词逻辑，并且因此它具有最小的复杂性。

问题 1　或者以阿姆斯特丹方式，或者以布达佩斯方式，谓词逻辑中有什么东西可以弱化以得到一个基于箭号的可判定版本？

这一分析显示的是，箭号逻辑的那些版本在某些时候也可以是不可判定的，譬如在没有把箭号等同于序对的时候，即，通过“全局模态词”或“区分算子”这样的模态算子反映进一步的谓词逻辑陈述类型，以增强表达力（再次参考［De Rijke. 1992B；Roorda. 1992］——也请参考“索非亚学派”的加戈夫（Gargov)，戈兰科（Goranko)，帕塞（Passy）和其他人近年来研究扩展的模态逻辑的出版物)。

问题 2　如果添加一个“全模态词”或一个“区分算子”，或者扩展模态逻

辑中的其他概念，命题箭号逻辑的前面那个版本中会出现什么情况？

这里一个好的具体例子是把一个二元关系的无穷性纳入到其模型中的传统公式：

$$\forall x \neg Rxx \ \& \ \forall x \exists y Rxy \ \& \ \forall xy(Rxy \rightarrow \forall z(Ryz \rightarrow Rxz))$$

用箭号图表中的成长链来说，其“箭号转写”反映了我们关于这一公式的自然推理。分析通常关于这一模型的讨论，可以发现它们的无穷性证明需要的东西是多么的少，正是这个无穷性由此破坏了有穷模型性并危及可判定性。

参考文献

Andréka H. 1991. Representations of distributive semilattice-ordered semigroups with binary relations, *Algebra Universalis*, 28: 12 ~ 25

de Rijke M. 1992A. A system of dynamic modal logic. Report LP-92-08, ILLC, University of Amsterdam

de Rijke M. 1992B. The modal logic of inequality. *Journal of Symbolic Logic*, 57: 566 ~ 584

Gabbay D, Guenthner F, eds. 1984. *Handbook of Philosophical Logic.* Vol. II. Dordrecht: Reidel

Harel D. 1984. Dynamic Logic. // Gabbay D, Guenthner F, eds. *Handbook of Philosophical Logic.* Vol. II. Dordrecht: Reidel: 497 ~ 604

Marx M, Németi I, Sain I. 1992. Everything you always wanted to know about arrow logic. Center for Computer Science in Organization and Management, University of Amsterdam / Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest

Mikulás S. 1992. Completeness of the Lambek calculus with respect to relational semantics. Tech Report LP-92-03. ILLC, University of Amsterdam

Németi I. 1987. Decidability of relation algebras with weakened axioms for associativity. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 100: 340 ~ 345

Németi I. 1991. Algebraizations of quantifier logics, an introductory overview. *Studia Logica*, 50: 485 ~ 570. (Special issue on Algebraic Logic, W. Blok & D. Pigozzi, eds)

Pratt V. 1990. Action logic and pure induction. // van Eijck J, ed. *Logics in AI: European Workshop JELIA* '90. LNCS, Vol. 478. Springer-Verlag: 97 ~ 120

Prawitz D, Skyrms B, Westerståhl D, eds. 1994. *Proceedings 9th International Congress for Logic*, Methodology and *Philosophy of Science.* Uppsala 1991, North-Holland, Amsterdam

Roorda D. 1991. *Resource Logics. Proof-Theoretical Investigations.* PhD Thesis. ILLC, University of Amsterdam

Roorda D. 1992. Lambek Calculus and Boolean connectives: on the road, Onderzoeksinstituut voor Taal en Spraak, Rijksuniversiteit, Utrecht

Simon A. 1992. Arrow logic lacks the deduction theorem, Mathematical Institute of the Hungarian

Academy of Sciences, Budapest

Vakarelov D. 1992. A modal theory of arrows I. Tech Report ML-92-04. ILLC, University of Amsterdam

van Benthem J. 1984. Correspondence theory. // Gabbay D, Guenthner F, eds. *Handbook of Philosophical Logic.* Vol. II. Dordrecht: Reidel: 167 ~ 247

van Benthem J. 1991. *Language in Action. Categories, Lambdas and Dynamic Logic.* Studies in Logic. Vol. 130. Amsterdam: Elsevier Science Publishers.

van Benthem J. 1995. Logic and the flow of information. // Prawitz D, Skyrms B, Westerståhl D, eds. *Proceedings* 9th *International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science. Uppsala* 1993, Amsterdam: Elsevier Science Publishers: 693 ~ 724

Venema Y. 1992. *Many-Dimensional Modal Logic*, PhD Thesis. ILLC, University of Amsterdam

5 谓词逻辑的模态基础*

胡义昭　裘江杰/译　余俊伟/校

5.1 谓词逻辑的模态核心

著名的谓词逻辑标准语义有以下关键条款：

$$\mathfrak{M}, \alpha \models \exists x\phi \quad 当且仅当 \quad 对于某个 d \in |\mathfrak{M}|: \mathfrak{M}, \alpha_d^x \models \phi$$

塔斯基在此的主要创新在于对指派的使用。指派在分解量化命题中具有根本意义，它使得自由变元得以进入它们的真值矩阵（matrix）。但是为了给出一阶量化的组合语义，远远不需要这么多。使得一阶量化起作用的抽象核心模式是：

$$\mathfrak{M}, \alpha \models \exists x\phi \quad 当且仅当 \quad 对于某个 \beta: R_x\alpha\beta 并且 \mathfrak{M}, \beta \models \phi$$

这里，“指派”α，β 变成了抽象状态，而具体关系 $\alpha =_x \beta$（它在 α 和 α_d^x 之间成立）则只是变成任意的二元更新关系 R_x。这种抽象模式显然涉及以下形式的标准多模态模型：

$$\mathfrak{M} = (S, \{R_x\}_{x \in VAR}, I)$$

其中 S 是一个“状态”集，对每一个变元 x，R_x 是一个二元关系，而 I 是在每一个状态 α 中对于每一个原子公式 Px，Rxy，…给出一个真值的“赋值”或者“解释函数”。特别地，存在量词 $\exists x$ 成为一元存在模态 $\langle x \rangle$。谓词逻辑的这种模态状态语义有一种独立的动态趣味：一阶定值（evaluation）是一种改变计算状态的信息过程。一阶语言由此成为拥有特殊的原子选择却没有明显的复合程序的动态逻辑。

相反，从模态逻辑的观点来看，“标准语义”来自对三个附加数学选择的坚持，而这些选择却不为新的核心语义所强求。①状态等同于变元指派，②“更新”必须是特定关系 $=_x$，以及③在函数空间 D^{VAR} 中的所有指派必须为定值

* Modal Foundations for Predicate Logic. *Logic Journal of the IGPL*, 1997, 5: 259 ~ 286.

过程可用（*available*）。前面两个是实施的问题，后面一个则是一个强的存在假设（实际上，标准谓词逻辑只需用到局部有限的指派——但即便如此仍然是一个强的存在要求）。从而，我们将把这些进一步的“集合论”选择看做是可以商榷的。这个观点进一步支持了这种抽象模态方法。例如，我们常常认为，通常用以构造多元组谓词集的集合论技术应该与逻辑有效性的本质无关。最后，作为①、②这两个假设的替代，［Hollenberg & Vermeulen. 1994］提出谓词逻辑的一个动态语义，其中的状态涉及变元堆栈，而变元堆栈的更新关系 R_x 和标准关系大不相同。

由一般模态语义产生的普遍（universal）有效性众所周知。我们可以得到一个极小多模态逻辑，它的原则包括：

· 所有经典布尔命题规律

· 模态分配：$\forall x(\phi\rightarrow\psi)\rightarrow(\forall x\,\phi\rightarrow\forall x\psi)$

· 模态必然化：如果 $\vdash\phi$，那么 $\vdash\forall x\phi$

· 把 $\exists x\phi$ 定义为 $\neg\forall x\neg\phi$

对上面的抽象模型而言的完全性定理可以通过标准的模态亨金构造得到证明。这个构造使用对于 S 当中的状态而言的极大协调集，以及如下定义的关系 R_x：

$$\Delta_1 R_x \Delta_2 \quad \text{当且仅当对于所有 } \phi\in\Delta_2\text{：} \exists x\phi\in\Delta_1$$

这个逻辑可以使用标准的模态方法加以分析（参阅［Andréka，van Benthem & Németi. 1994］中的现代处理），以获得像克雷格（Craig）内插、沃施-塔斯基·（LOS-Tarski）保持那样通常的元性质。另外，由标准的模态技术（过滤，语义表列）可知，它也是可判定的。人们现在可以在追求标准一阶模型论的模态对应的同时有效地追求标准一阶模型论本身。例如，考虑模型的模态双仿，对于关系 R_x 应用 Z 字形（zigzag）关系，把拥有相同原子行为的状态关联起来。对于标准的塔斯基模型专门探讨这些问题，结果会得到一个模型间部分同构的概念，它和标准的概念相关却不相同（这个类比在［Fernando. 1992］中得到实质性的考察）。进一步的类比在［van Benthem. 1991；1996；De Rijke. 1993］当中有详细的讨论。

这种模态视角暗示了标准谓词逻辑下面的一个完整图景：底部是一个“极小模态逻辑”，它可通过连续的框架约束上升为“标准语义学”。这似乎是当前逻辑语言学文献里探讨的“动态语义学”的真正栖息地。特别地，这个图景包含了谓词逻辑的可判定的子逻辑，这些子逻辑同样拥有它那些让人满意的元性质（极小模态基础本身就是一个例子）。因而“谓词逻辑的不可判定”很大程度上

反映了它的塔斯基建模的数学意外，特别是对于函数空间 D^{VAR}——而并非量化和变元指派的核心逻辑——的集合论事实进行编码。我们将利用许多作者的工作对一阶语义的这个结果观点进行考察。特别地，我们发现，像在其他的标准逻辑之下的“精细结构图景”（譬如范畴层级或子结构层级：[van Benthem. 1991]，[Dosen & Schroeder-Heister. 1993]）当中那样，在我们的初始语言当中不仅有一大族的自然演算，还有一种反映更宽泛、更敏感的语义的更为丰富的语言。特别地，抽象核心模型支持在标准谓词逻辑当中坍塌的那些不同量化形式（“一元”和“多元”）之间的差异。

5.2　依赖性模型

除了我们目前为止的两个选择（也就是标准逻辑和它的极小模态内核）之外，在它们之间的图景当中还有一些自然居民。例如，人们可以保留塔斯基语义的一般实施（上面的①，②），但放弃存在假设③。结果是一种“折中”，其中 S 是通常意义上的某族指派（不必是完全函数空间 D^{VAR}），而 R_x 是标准关系 $=_x$。例如，在有两个变元 $\{x, y\}$ 的情况下，一个对象集为 $\{1, 2\}$ 的论域支持2^4 个指派集。一个是包含从变元到对象的四个映射的标准模型。另一个模型则仅仅拥有两个指派 $\{\alpha, \beta\}$，其中 $\alpha(x)=1, \alpha(y)=2$ 而 $\beta(x)=2, \beta(y)=1$。一阶定值就将运行在拥有一个“可用指派”的范围 V 作为特别参数的广义塔斯基模型（$\mathfrak{M}$, V）。一个存在量词 $\exists x\phi$ 说的是，当前状态的某个 x-修改存在于满足 ϕ 的 V 之内。

“指派间隙”反映了一个有趣的现象。直观地说，人们经常想对变元之间的依赖性进行建模。这种依赖性也就是一种情形，其中一个变元 x 的值的变化可能引发另一个变元 y 的值的变化，或者至少这两者的变化相互关联。这方面的例子包括自然推理（[Fine. 1985]），概率逻辑（[van Lambalgen. 1991]）和复数指代话语（[van den Berg. 1995]）。这个现象不可能在标准塔斯基语义里面加以建模，因为在标准语义里面我们能够完全独立地改变变元的值：从任意状态 α 出发，人们可以移动到任意的 α_d^x。但在带有指派间隙的模型当中，改变从某个指派 α 出发的 x 值的唯一方法可能也是引起 y 值变化的方法。上面的 2-指派模型就是一例，其中 x 值的任意变化都会引起 y 值的对应变化。因而，标准模型一定程度上成为变元之间所有依赖性受到压制的“退化情形”。在量词交换原则 $\exists x\exists y\phi \leftrightarrow \exists y\exists x\phi$——它在我们的广义模型上典型无效——的标准有效性当中清楚地表明了这一点。例如，[Alechina. 1995] 提出一个语义，其中关键的定值条款变成了（在我们现在的架构当中表述为）

$\mathfrak{M}, \alpha \models \exists x\phi$　当且仅当对于某个 β：$R_{x,y}\alpha\beta$ 并且 $\mathfrak{M}, \beta \models \phi$

这里 y 是某个“相关语境变元”的序列——它也许由 $\exists x\phi$ 中的自由变元构成。在此情形中，甚至模态分配律都将失效。沿着不同的路径，[van den Berg. 1995] 把指派集本身放进了包含依赖性信息的新状态当中，而其中的依赖性可以在定值的动态过程当中加以修改。

5.3　一阶公理说明了一些什么？

上面的三个语义层次还有进一步的精细结构。这可以在两种方式下出现。第一种，人们可以研究在模态框架或者广义指派模型上、反映“依赖性”的不同方面的那些自然的数学约束。第二种，人们可以分析在我们的一阶语言当中可以表达的那些可能的有效性。后一个策略牵涉到模态框架对应。一个模态公式 ϕ 表达了抽象状态框架上的一个关系约束 C，如果：

C 对于 $(S, \{R_x\}_{x\in VAR})$ 成立，当且仅当

对于所有状态 α 和解释函数 I，$(S, \{R_x\}_{x\in VAR}, I), \alpha \models \phi$

让我们看看，在极小模态逻辑之上，谓词逻辑的规律都表达了一些什么。通常，所有一阶有效性一起都在一个大袋子里。但在我们的模态语义中，它们却以一种计算倾向，表达了关于状态和可达性的不同要求。作为一个具体的示例，我们使用模态对应来“解构”著名教材 [Enderton. 1972] 当中的那些公理（但任意一种教材式公理化都可以这样做，只是以一种不同的方式罢了）。安德顿（Enderton）的清单包含布尔命题规律的所有普遍闭包，加上三条量词公理

(1)　$\forall x(\phi\to\psi) \to (\forall x\phi\to\forall x\psi)$；

(2)　$\phi\to\forall x\phi$，如果 x 不在 ϕ 中自由出现；

(3)　$\forall x\phi\to [t/x]\phi$，如果 t 对于 ϕ 中的 x 自由。

这个系统有一条推理规则，也就是分离规则。从模态的角度来看，它的命题部分是基础（base）有效的（包括公理和规则）。第一条量化公理是基础有效的模态分配律。另外，取公理的普遍闭包是一个相当于假定关于普遍量词的必然化规则的技术。事实上，安德顿公理化的第一部分单独地就是极小模态逻辑的一个完全演算！我们非常希望看清在此起作用的天意之手。现在，让我们分析其他的量词公理。我们从最不显眼的那个开始。从我们现在的角度来看，它却是极其强大的。

公理　$\phi\to\forall x\phi$

我们在一种修改了的、使用原子及其否定，$\wedge$，$\vee$，$\exists$，$\forall$ 形成的公式中，归纳地分析这个原则。我们的论证将是启发式的，它独立地确定这个原则的不同

实例的效果。第一个实例是原子对：

(2.1) $Py \to \forall x\, Py$ $\quad \neg Py \to \forall x \neg Py$

这两个原则说的是，没有变元 x 的原子的真值不受 R_x-转换影响。对于指派，在谓词解释一如通常的情况下，它等价于 R_x 蕴含 $=_x$ 这个条件。可是在我们的抽象语义中，(2.1) 却不可以自然地翻译成一个框架对应。它在一定程度上暗示了在我们的抽象解释函数 I 上的一个限制。它们必须满足一个表述为"对于所有满足 $R_x\alpha\beta$ 的状态 β，如果 $I(\alpha, Py)$ 那么 $I(\beta, Py)$"的遗传原则（从直觉主义逻辑的克里普克语义那里我们知道了对于赋值的限制）。纯粹的框架条件随着公理 (2) 的复合情形一起呈现出来。

(2.2) 布尔情形 $\phi_1 \wedge \phi_2$，$\phi_1 \vee \phi_2$

这儿没有新信息可以提取。归纳地假设，我们已经知道 $\vdash \phi_1 \to \forall x\phi_1$ 和 $\vdash \phi_2 \to \forall x\phi_2$。那么，在基础逻辑里，我们（使用分配原则）自动地就有 $\vdash (\phi_1 \wedge \phi_2) \to \forall x(\phi_1 \wedge \phi_2)$。对于析取的情形完全类似。真正的影响在量化情形当中。

(2.3) $\exists y\phi$，$\forall y\phi$

在此我们必须区分两种子情形。

(2.3.1) 量化变元 y 就是 x 本身

那么我们无需任何假设就有

$$\exists x\phi \to \forall x \exists x\phi \qquad \forall x\phi \to \forall x \forall x\phi$$

在此我们发现两个对于 $\langle x\rangle$ 的模态 S5-公理，也就是

$$\langle x\rangle\phi \to [x]\langle x\rangle\phi \qquad [x]\phi \to [x][x]\phi$$

它们的框架内容众所周知。

事实 1 · $\forall x\phi \to \forall x \forall x\phi$ 表达"R_x 是传递的"

· $\exists x\, \phi \to \forall x \exists x\phi$ 表达"R_x 是欧几里得的"

如果加上安德顿公理 (3) 最简单的实例，也即 $\forall x\phi \to \phi$（表达 R_x 的自返性），我们得到完全的 S5，其中所有 R_x 必定是等价关系（一阶演绎的这种模态特征在 [Henkin, et al. 1985] 的 1.2 章当中表现得非常清楚，这本书中还有许多以代数形式出现的标准 **S5**-演绎）。今后，我们假设这些在所有广义指派模型当中成立的 **S5**-原则（只要没有 **S4**，下面的分析就会变得稍微杂乱一些）。因而，考虑另外一种情形，其中不同变元的更新之间发生真正的相互作用。

(2.3.2) 变元 x，y 不同

归纳地，我们可以假设 $\vdash \phi \to \forall x\phi$，然后我们还需要

$$\exists y\phi \to \forall x \exists y\phi \qquad \forall y\phi \to \forall x \forall y\, \phi$$

以 **S4** 来衡量，这两个推论规则表达了两个著名的量词轮换原则：

声明 1　· 规则“如果 $\vdash\phi\rightarrow\forall x\phi$，那么 $\vdash\exists y\phi\rightarrow\forall x\exists y\phi$”等价于公理 $\exists y\forall x\phi\rightarrow\exists x\forall y\phi$

· 规则“如果 $\vdash\phi\rightarrow\forall x\phi$，那么 $\vdash\forall y\phi\rightarrow\forall x\forall y\phi$”等价于公理 $\forall y\forall x\phi\rightarrow\forall x\ \forall y\phi$

证明：（第一个情形）“公理到规则”。如果 $\vdash\phi\rightarrow\forall x\phi$，那么在极小模态逻辑中，就有 $\vdash\exists y\phi\rightarrow\exists y\forall x\phi$——由此根据我们的公理，就有 $\vdash\exists y\phi\rightarrow\forall x\exists y\phi$。“规则到公理”（我们使用 **S4**）。从公理 $\vdash\forall x\phi\rightarrow\forall x\forall x\phi$ 开始，并应用规则。可得 $\vdash\exists y\forall x\phi\rightarrow\forall x\exists y\forall x\phi$。而 **S4** 又有 $\vdash\forall x\phi\rightarrow\phi$。在极小模态逻辑中，就可得 $\vdash\forall x\exists y\forall x\phi\rightarrow\forall x\exists y\phi$。归结起来：$\vdash\exists y\forall x\phi\rightarrow\forall x\exists y\phi$。■

关于模态对应，这两种量词轮换都可以采用临时的方法或者一种更为精细的模态技术加以分析。注意，它们其实就是*萨奎斯特*（Sahlqvist）形式，而对于这种形式在计算它们的一阶框架等价式时可以应用一个著名的算法：

事实 2　· $\exists y\exists x\phi\rightarrow\exists x\exists y\phi$　表达路径反转：$\forall\alpha\beta\gamma\ ((R_x\alpha\beta\wedge R_y\beta\gamma)\rightarrow\exists\delta\ (R_y\ \alpha\delta\wedge R_x\delta\gamma))$

· $\exists y\forall x\phi\rightarrow\forall x\exists y\phi$　表达汇合：$\forall\alpha\beta\gamma\ ((R_y\alpha\beta\wedge R_x\alpha\gamma)\rightarrow\exists\delta\ (R_x\ \beta\delta\wedge R_y\gamma\delta))$

在 **S5**-模型中，路径反转和汇合是语义等价的。而事实上，[Henkin et al. 1985] 就给出了这个事实的代数证明。我们到目前为止的一般结论是，一阶谓词逻辑公理表达模态萨奎斯特形式，而对于萨奎斯特形式可以应用标准的模态对应和完全性技术（进一步的示例可在 [Venema. 1992；de Rijke. 1993；Marx. 1994] 中找到）。

人们也可以使用关于谓词逻辑的一般事实来暗示依赖性模型之上的自然约束。例如，*有穷性引理*说的是，公式的定值仅仅取决于它们的自由变元的值。这点在广义指派模型中不再为真，因为其中的自由变元可以承载隐含的依赖性。但人们依然能够把有穷性本身作为一个有趣的条件来加以研究。这样的条件可以在模型上，而不是在框架上。[Westenståhl. 1995] 对于带有可容许赋值遗传限制的模态框架重做了上面的对应分析。接下来，我们必须分析安德顿的最后一条量词公理，这条公理说“如果 t 对于 ϕ 中的 x 自由，$\forall x\phi\rightarrow[t/x]\ \phi$”。以我们到目前为止的分析精神来看，可以自然地把代入算子 $[t/x]$ 本身看作是一个语义更新指令。它将表示“受控的值指派” $x:=t$，而这个指派在语义上和我们对于存在量词 $\exists x$ 的“随机指派”自然相伴。

5.4 量词和代入

在动态逻辑中有一个通俗观念认为语形代入 $[t/x]$ 像程序指令 $x:=t$ 那样语义地工作。[Goldblatt. 1987] 使用了后一种记法避免了哈尔的量化动态逻辑当中的语形复杂性。这种双重性的另一个实例和谓词逻辑那个著名的代入引理相伴而生：

$$\mathfrak{M},\ \alpha \models [t/x]\ \phi \quad \text{当且仅当} \quad \mathfrak{M},\ \alpha^{x}_{value(\mathfrak{M},a,t)} \models \phi$$

这表达了“名调用”和“值调用”之间的程序等价。最后，随机指派 $[\![\exists x]\!]$ 自然地引入了它的特定对应物 $[\![t/x]\!]$。对于代入的这种模态处理和前面对于量词的处理十分相似。

抽象指派框架

我们通过加入抽象关系 $A_{x,y}$ 来丰富前面的模型。这种关系在标准模型中的具体解释如下：

$\alpha A_{x,y}\beta$ 当且仅当 $\beta(x)=\alpha(y)$ 并且对于所有不同于 x 的 z，$\beta(z)=\alpha(z)$

下面，为了方便，我们仅仅考虑变元对变元的代入。真值定义再一次按照代入算子 $[y/x]$ 的字面形式把它处理为模态（天意之手很久以前就修补了这种方块记法）：

$$\mathfrak{M},\ \alpha \models [y/x]\ \phi \quad \text{当且仅当} \quad \text{对于所有满足 } A_{x,y}\alpha\beta \text{ 的 } \beta,\ \mathfrak{M},\ \beta \models \phi$$

这样的结果和对于存在量词的结果相似。存在一个普遍有效的极小逻辑，在它的顶部，进一步的原则借由框架对应表达了关系之上的一些特别约束（所有牵涉其中的原则都有撒奎斯特形式）。有趣的是，代入的通常语形“定义”获得了语义重要性：

代入的语义分析

原子情形 $[y/x]\ Px \to Py$

$[y/x]\ Pz \to Pz$（z 不同于 x）

这样的结果一如从前。在抽象框架之上，这些原则表达了关于可容许赋值的遗传约束。但是在具体的指派框架上，它们却表达了“关系 $A_{x,y}$ 将像在上面的具体条款中规定的那样行动”。

布尔情形 $[y/x]\ \phi\wedge\psi \leftrightarrow [y/x]\ \phi \wedge [y/x]\ \psi$

$[y/x]\neg\phi \leftrightarrow \neg[y/x]\ \phi$

它们中的第一个在极小模态逻辑中是普遍有效的。而第二个是著名的模态公理，

它的两个方向合起来表达了“关系 $A_{x,y}$是一个函数”这一点。为了方便，我们从此做出这个假设。

量化情形　$[y/x]\exists x\phi \leftrightarrow \exists x\phi$

$[y/x]\forall x\phi \leftrightarrow \forall x\phi$

$[y/x]\exists z\phi \leftrightarrow \exists z[y/x]\phi$ （z 不同于 x，y）

$[y/x]\forall z\phi \leftrightarrow \forall z[y/x]\phi$ （z 不同于 x，y）

这些式子表达了抽象关系 $A_{x,y}$和 R_x 的不同复合之间一些简单的相互作用，而这些复合都是可以机械地计算出来的。还没有讨论的量化情形是 $[z/x]\exists z\phi$ 和 $[z/x]\forall z\phi$。在此我们仅仅允许那些在我们所想要的语义中有效的代入。当真值矩阵 ϕ 中有 x 的自由出现时，没有什么东西可以一般地成立。但我们还是想要下面两个等价式

$$[z/x]\exists z\phi \leftrightarrow \exists z\phi \qquad [z/x]\forall z\phi \leftrightarrow \forall z\phi$$

更一般地，在这里，我们想要一个像前面的量词公理（2）那样的原则：

$[z/x]\phi \leftrightarrow \phi$，只要 x 不在 ϕ 中自由出现

这里从右到左的方向结合使用了量词公理（2）和公理（3）（对于公理（3）的其他力量会在下面有所判断）。因为如果 x 不在 ϕ 中自由出现，那么 $\forall x\phi$ 成立，而后者又推出 $[y/x]\phi$（既然 y 对于 ϕ 中的 x 自由）。从左到右，我们论证如下。如果 x 不在 ϕ 中自由出现，那么我们已有 $\vdash \phi \to \forall x\phi$。在极小模态逻辑中，就有 $\vdash [z/x]\phi \to [z/x]\forall x\phi$。现在，由前面的一个原则，我们就有 $[z/x]\forall x\phi \to \forall x\phi$。那么，应用一个 **S4**-公理，我们就有$[z/x]\forall x\phi \to \phi$。合在一起，这就得到我们所需要的东西。一阶代入的完全演算在［Németi. 1985；Thompson. 1981；Venema. 1993］中都可以找到。

最后，我们回来分析最初的量词公理（3），它可以写为：

$\forall x\phi \to [y/x]\phi$，如果 y 对于 ϕ 中的 x 自由

它做的事情现在变成只是把 $[x]$ 和 $[y/x]$ 这两个模态关联起来：

$A_{x,y}$包含在 R_x 中

前面“谨慎代入”的原则所关心的就是这个限制条件。这就完成了我们对于谓词逻辑的一个完全公理系统的语义分析。它的分析由在扩展抽象指派框架 $(S, \{R_x\}_{x\in VAR}, \{A_{x,y}\}_{x,y\in VAR})$ 上的所有累次增加的原则，以及对于可容许赋值的某些限制所构成。当然，这只不过是借由安德顿的特殊公理表现对于谓词逻辑所作的一种贯穿性的分析罢了。人们也可以分析其他不同的公理形式（对比［Meyer Viol. 1995］中的自然演绎分析）。例如，［Henkin，et al. 1985］就有：

如果 $\vdash \phi \leftrightarrow \psi$，那么 $\vdash \exists x\phi \leftrightarrow \exists x\psi$　　（来自极小模态逻辑）

$\exists x \bot \leftrightarrow \bot$　　（同上）

$\exists x(\phi \wedge \exists x\psi) \leftrightarrow \exists x\phi \wedge \exists xy$　　（著名的 S5-原则）

$\phi \rightarrow \exists x\phi$　　（T 公理）

由此出现的一般观念是，通常的“谓词逻辑有效性”形成了一团非常多样化的东西，我们可以出于不同的目的对它进行多种方式的分层。

5.5　演绎力量的图景

让我们总结到目前为止的主线。一阶谓词逻辑可以被看成是变元指派的动态逻辑，这个动态逻辑的原子过程改变寄存器（register）x，y，z，…中的值。这个观点向我们展现了标准谓词逻辑之下的精细结构的一种层级。在这个视角下，标准谓词逻辑仅仅成为“丰富指派模型”的一个特殊数学类当中的一个（不可判定的）理论而已。我们由此得到一个宽广的语义图景（像在模态逻辑或者箭号逻辑当中发现的那样，参见［van Benthem. 1991］），其中极小模态逻辑位于底部，而各种各样的中间系统都可以通过再指派和它们的 R_x（以及 $A_{x,y}$）结构上施加一些（尽管不是所有的）通常要求来得到（图 5-1）：

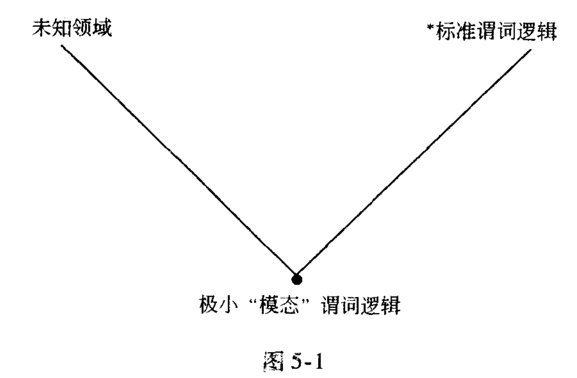


图 5-1

在这个区域中，哪些是自然地标呢？我们想找到那些满足以下要求的逻辑：①具有合理的表达力，②同样拥有谓词逻辑的那些重要的元性质（诸如内插，能行可公理化，或许还有“可根岑性”（Gentzenizability））及③甚至可以要求是可判定的，以改进系统。极小谓词逻辑满足这三个要求——但是我们能够在上面的图景中上升并且得到具有同一行为但更有力量的逻辑吗？幸运的是，这个区域并非完全未经探索。在柱状代数中现存的大量研究已经确认了一些非常有趣的系统（参照例如［Henkin, et al. 1985；Andréka. 1991；Németi. 1985；Venema. 1994；Marx. 1994］）。［Németi. 1993］就包含了许多有趣的演算，譬如柱状代数的所谓“非交换性”版本（在［Thompson. 1981］中第一次提出）——通过放弃对于

$\exists x \exists y$和$\forall x \forall y$的量词交换公理而成为可判定的演算。所有这些都更像著名的模态格([Bull & Segerberg. 1984；Blok. 1980])。

这个图景中一个颇具吸引力的候选者是 **CRS** 系统([Németi. 1993])。它可以被描述为在关于量化和代入的下列抽象状态框架中成立的所有谓词逻辑有效式的集合：它们满足在标准指派模型中成立的所有普遍框架条件。它们遵守指派的所有一般逻辑性质，但它们在可用指派的供给上不作任何存在假设。前一个条件似乎看起来更像真正的“逻辑”条件，而后者却具有更多的“数学”或“集合论”特性（逻辑建模当中普遍和存在原则之间的这种差异已经得到更为一般的辩护：例如，在［van Benthem. 1983］里为时间逻辑建模所作的辩护）。例如，在上面的对应中，普遍 **S5** 类型条件呈现出来，不仅如此，量词交换原则的存在 **S5** 类型条件也呈现出来。跟着，我们将通过一种把抽象状态框架转变为指派框架的表示方法，更详细地分析那种纯粹普遍条件。事实上，**CRS** 可以被描述成在 5.2 中引入的所有广义指派模型（$\mathfrak{M}$，V）的逻辑。关于 **CRS** 已知的两个重要事实是，它是可判定的（Németi）及它是非有穷可公理化的（Andréka）。另外，借助全称霍恩（universal Horn）条件，我们的表示方法也将证明它拥有一阶定义，进而可以推导出克雷格（Craig）内插([Marx. 1994])。但在 **CRS** 的顶部，人们可以继续增加公理直至达到复杂性的悬崖。

对动态谓词逻辑的这个图景可以运用标准模态技术进行模型论方面的探究([van Benthem. 1985；Goldblatt. 1987；Venema. 1992；De Rijke. 1993])。特别是，正如前面观察到的那样，诸如抽象模型之间的“双仿”这样的基本模态概念推广了标准指派模型之上对应的模型论概念。这里仍然有一些有趣的分歧。例如，双仿和完全变元指派相关，但它对应的模型论概念“部分同构”和对象的有穷序列相关。这反映了标准谓词逻辑的另一个元性质：没有变元具有特殊身份。在现有的抽象语义中，这不再是一个优先选项。借助于现有的可能依赖性，变元的确获得了“个体性”（参阅［van Lambalgen. 1991；Meyer Viol. 1995］)。其他相关模态主题包括跨越整个图景的公理化技巧和判定方法（参阅［Marx. 1994；Mikulas. 1995］)。

评论 1　（两个一阶语言）　不要混淆“一阶语言”在这里的两种用法！一者作为指派改变的“动态模态语言”，位于对象层次。另一者作为我们陈述框架条件的“工作语言”，用于元层次。特别地，一个人可以是对象层次的模态极小主义者，同时又是元层次的标准逻辑学家。

这里的整体情况就像在箭号逻辑当中那样（[van Benthem. 1991；1996；Venema. 1994；Marx，et al. 1996]），具有相同的语义要点。最终，我们不只是想

重新分析谓词逻辑，而更愿意探索新的语义学（以及由它所支持的逻辑）由于它内在的直观魅力而具有的表达能力。

5.6 重新思考语言

这种模态类比特别地意味着，一阶逻辑仅仅反映抽象状态模型的表达资源的一部分。事实上，在这些模型之上具有明显的一阶（元）语言，这个语言的变元运行在状态之上（再一次：请不要把它和我们最重要的模态一阶对象语言混淆起来）。这就是人们在通常意义上“翻译”多模态语言时所指向的那个语言（[van Benthem. 1983]），而且它还包含许多没有模态对应的断定。一个例子就是状态之上*不受限制*（unrestricted）的存在量词 $\exists\alpha$。作为对比，模态对象量词 $\exists x$ 引入受限制的（restricted）状态量词，其形式为 $\exists\beta(R_x\ \alpha\beta\wedge$(完整的一阶状态语言的这个“模态片断”恰好由引入双仿不变这样的量词模式决定。最新的技术细节可以在［Andréka，et al. 1994］中找到)。“随机指派跳转”似乎是没有标记任何变元的孤立量词符号 $\exists$ 的自然意义。相似地，人们可以考虑状态的一种*全局谓词*（global predicates），它们不可以归约为关于它们在某个有穷变元集上的对象值的断定。所有这些合起来都只不过是刚开始提到的一个宽泛主题的一个实例。标准谓词逻辑下的一个更一般的语义通常都会暗示一些在“经典系统”里不可见的新概念。我们列出这样的一些扩展方向：

更强的模态

增加模态算子，诸如“普遍模态”，或者关于状态转换的内在结构的更为复杂的算子(“自从”，“直到”)。

动态算子

从作为原子程序的个体变元出发，增加程序构造。例如，*路径原则*（Path Principles）意味着增加序列复合和合取交叉。带有这两个算子的命题动态逻辑依然是可以判定的：从而我们的极小基础逻辑也复如是。

多元量词

一个最为有趣的表达力扩展就是到多元量词的扩展。在标准谓词逻辑中，一个多元组记号 $\exists xy\cdot\phi$ 只不过是对于 $\exists x\cdot\exists y\phi$ 或 $\exists y\cdot\exists x\cdot\phi$ 的缩写。但是这里，它却变成了自成一类的概念。在广义指派模型上，$\exists xy\cdot\phi$ 说的是，存在某个和现有指派在 $\{x, y\}$ 之外保持一致的指派使 ϕ 成立。相应转换包含了一种相比于单一转换关系 R_x 和 R_y 的共时性信息。这不能归约为后两者的任一迭代版

本——它们都要求"中间状态"的存在。更一般地，抽象状态模型允许陈述下列条件的量词$\exists x_1 \cdots \exists x_k \phi$的自然定义：在$\phi$成立时某个$R_{(x_1 \cdots x_k)}$-可达状态的存在。在标准逻辑中，这个断定等价于它的任意线性化版本$\exists x_1 \cdots \exists x_k \phi$。但由于我们模型当中的"可能间隙"，它却不可以如此归约。多元量化具有语言学方面的趣味（参阅［Keenan & Westenståhl. 1994］），但在此我们只谈论多元量化本身。从而在形式化自然推理时，人们现在可以把变元序列处理为要么"独立的"要么"不独立的"。另外，增加后一种表达资源将使得基本谓词逻辑 **CRS** 拥有可判定性（参阅［Mikulas. 1995］）。当然，关于增加词汇如何影响我们图景当中的逻辑的元性质还有一个更一般的问题。增加太多表达力可能使我们重新回到标准一阶逻辑（［Marx. 1994；Mikulas. 1995］提供了操纵"箭号逻辑"中的词汇表达力的一些个案研究）。多元语言扩展在出现明确的代入的情况下也有意义。例如，后者需要序列复合和"共时合取"（以处理形式为$[t_1/x_1, \cdots, t_k/x_k]$而且其多元表现不可归约的多重代入）。

我们的分析风格可以扩展到其他语义参数。譬如，不仅可以改变塔斯基语义当中的指派，而且可以改变解释函数（［van Benthem & Cepparello. 1993；Cepparello. 1995］）。下面给出一个适度而自然的扩展。

部分状态框架

动态语义中提出来的一个新的建模方法（［Beaver. 1995；van den Berg. 1995；Vermeulen. 1994］）采用了部分指派。这些部分指派说明了在改变x的旧值的"再指派"R_x和首次给予x一个值的"新指派"R_x^+之间的直观差别。这两种行为分别对应于一阶量词$\exists x$和$\exists^+ x$。在部分状态框架中，R_x将保持传递性和欧几里得性，但却不自返（x值并非总是得到定义）。我们只有这个更弱的原则$\exists xT \wedge \phi \rightarrow \exists x \phi$。作为比较，$R_x^+$是非对称的，并且还满足譬如$\forall \alpha\beta$（$R_x^+ \alpha\beta \rightarrow \neg \exists \gamma R_x^+ \beta\gamma$）这样的性质。这两个变元更新关系之间的联系在于有效量词原则$\exists xT \leftrightarrow \neg \exists^+ xT$。这些广义框架当中一个重要的新概念就是部分状态的扩展。它也有一个自然对应的存在模态：

$$\mathfrak{M}, \alpha \models \phi \quad \text{当且仅当} \exists \beta \supseteq \alpha: \mathfrak{M}, \beta \models \phi。$$

人们用它也可以定义诸如$\Diamond \exists x \phi$这样的对$\exists^+ x \phi$的代入。对标准部分指派框架的完全模态逻辑加以公理化也该是有意思的。

5.7　应用和反响

现在的这个观点意味着大量的应用。特别地，标准谓词逻辑当中有多少成分

可以用于自然语言，常识推理或者数学证明呢？譬如，谓词逻辑现有的可判定子演算在这里可以提供一个“自然逻辑”吗（参阅［Valencia. 1991］，其中单调性和保守性的关键原则可以在我们的图景中的弱演算中推导出来）？并且，有采纳这些观点的有用的可判定算术系统或者别的数学分支吗？譬如，什么是带有变元指派的所有可能族的自然数理论呢？也许，应用理论的通常谓词逻辑基础对于这个目的是太强了（参阅［van Benthem. 1993A］）。其他的实用问题和一阶语言的标准和广义模型之间的“距离”有关。已经知道 **CRS** 具有有穷模型性（参阅［Andréka，et al. 1994］）。因而，那些在标准满足关系下要求无穷论域的著名公式必定还有有穷广义模型。后者有实际用处吗？

我们的模态方案的要点也可以加以扩展。它不仅应用于改变变元指派的动态性，还应用于更新信息状态。抽象模型可以承载进一步的结构，诸如支持新的动态联结词的状态“复合”（［van Benthem. 1991；Kurtonina. 1995］）。和这里讨论的问题相似的一些问题将在后面出现，它们现在影响着一阶谓词逻辑的命题基础——到目前为止在我们的讨论中这个命题基础还没有被破坏。

作为结论，将在这里陈述我们认为这个工作的哲学意义是什么。如果我们的抽象模型确实是一阶谓词逻辑的自然语义，而不只是一个技术装置的话，那么很多已被接受的观点将受到挑战。在标准教科书中，“谓词逻辑有效性”是一个独一无二的概念，由塔斯基明确规定，并为哥德尔完全性定理证实。另外，它是复杂的，丘奇定理证明它是不可判定的：莱布尼兹的“理智演算”理想也就实现不了。但是从现在的观点来看，“标准谓词逻辑”却历史性地发源于原本只能分道扬镳的几个语义决断。一阶谓词推理的真正的逻辑核心也许是可以判定的——并且真实的意义并不在于一个唯一的“完全性定理”，而在于对于一大堆选项从模型论和证明论两方面进行的混合分析。

这篇论文的余下部分将对上面的架构（特别是 **CRS**）使用来自模态逻辑的技巧进行更为技术的探讨。这些技术会让我们切实感觉到这种架构是如何实际“工作”的。要探讨的问题包括（i）用具体的（广义）塔斯基模型来表示抽象模态状态框架，（ii）通过过滤和展开技术所获得的如此广义语义上的逻辑的可判定性，（iii）弱谓词逻辑的弱和强的内插性质，（iv）代入的扩展语言，（v）不同的依赖性语义之间的能行翻译，还有（vi）采用指派集上的更新的“推广之后再推广的语义”。

5.8 表　　示

一个系统的语义观点要分析它用什么把任何抽象模态框架表示为一族带有标

准变元更新关系 $=_x$ 的指派。下面的提议非常简单，也许等价于某种代数方法。抽象状态是怎样变成指派的呢？显而易见的想法就是，为每一个状态 α 和变元创造“对象”(α, x)，并设定

$$\alpha^*(x):=(\alpha, x)$$

这个假定的确将会把状态转变为指派，并把抽象状态框架表示为带有任意抽象更新关系 R_x 的指派框架（因而后一选项并不真正相异于最普通的选项）。但是如果后一种关系要变为标准更新 $=_x$，那么某种精炼必不可少。

表示状态框架

作为开始，我们假设标准指派框架的所有普遍性质。由此需要的东西将最终汇集在我们的结果陈述当中。令 Z 表示某个变元序列。如下扩展可达关系：

$$\alpha R_{\varnothing}\beta \quad := \quad \alpha = \beta$$

$$\alpha R_{Z\cdot y}\beta \quad := \quad \exists\gamma:\alpha R_Z\gamma \wedge \gamma R_y\beta$$

在这里，我们使用序列而不是集合，因为我们不想假设抑制顺序关系的存在量词交换原则。现在定义

$$(\alpha, x) \sim (\beta, y)\text{，如果 } x = y \text{ 和 } \exists Z\text{：} x \notin Z \text{ 和 } \alpha R_Z\beta$$

利用更新关系 R_Z 的对称性，容易验证 ~ 是一个等价关系。这个观察结果允许我们使用等价类作为值：

$$\alpha^*(x):=(\alpha, x)^{\sim}$$

现在让我们分析用以证明下列关键等价的东西：

表示的恰当性

$$\alpha R_x\beta \quad \text{当且仅当} \quad \alpha^* =_x \beta^*$$

从左到右的方向是直接的。令 y 是任一不同于 x 的变元。设 $Z = \langle x\rangle$。那么，既然 $\alpha R_x\beta$，那么根据上面的定义，$(\alpha,y) \sim (\beta,y)$，从而有 $\alpha^*(y) = \beta^*(y)$。对于从右到左，假设 $\alpha^* =_x \beta^*$。由定义，这意味着 $\forall y \neq x \forall Z\text{：} y \notin Z \wedge \alpha R_z\beta$。我们想从这堆事实得到的东西是 $\alpha R_x\beta$。这里有一个特殊情形。仅有两个变元时，应用到变元 y 上的后一个信息意味着 α,β 是通过 R_x 步骤的某个有穷序列（可能为空）关联起来的。仅仅使用自返性和传递性，我们得到想要的结论。因而，我们发现（正如代数文献当中那样更为经常做出的那样）谓词逻辑的双变元片断是特别简单的：

命题1　有两个变元时，一个抽象状态框架可以表示为一个指派框架当且仅当它的关系 R_x 是等价关系。

一般情形更为复杂。譬如，有三个变元时，我们也许有：

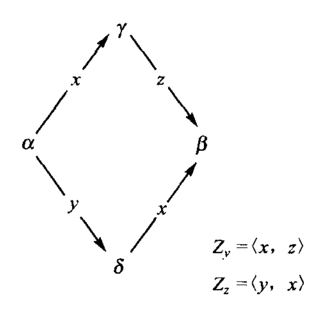


图 5-2

在标准指派模型中，这意味着 α，β 在 y 和 z 上都是一致的，因而对于 y 和 z 的箭号必定是等值转换，并且我们有 $\alpha R_x\beta$。更一般地，下列形式的所有路径原则在标准塔斯基解释下是有效的（注意这样的解释有无穷多个）：

· 如果 $\alpha R_{Z_1}\beta$，…，$\alpha R_{Z_k}\beta$，并且唯一出现在所有 Z_1，…，Z_k 当中的变元是 x，那么 $\alpha R_x\beta$。

· 如果所有连通序列中没有变元出现，那么 $\alpha=\beta$。

命题 2　一个抽象框架可以表示为一个指派框架当且仅当它的关系 R_x 是满足所有路径原则的等价关系。

证明：接着上面的论证。假设 $\forall y\neq x\ \exists Z: y\notin Z\wedge\alpha R_Z\beta$。令 y 为任意不同于 x 的特定变元，并选择一条连通路径 Z_y。对于任一出现在这条路径上、不同于 x 的变元 u（这样的变元个数是有穷的），选择某条 u 不在其上出现的连通路径 Z_u。那么 x 是这个交集当中仅有的变元，Z_y 的路径原则和 Z_u 的路径原则就会推出 $\alpha R_x\beta$。■

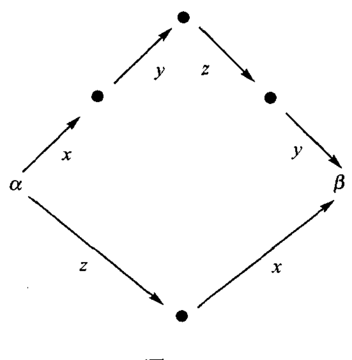


图 5-3

下面三点可以阐明这个命题。①关系 R_x 的传递性来自路径原则。②当这些路径上所有出现变元集的交集为空时，需要自返性。③人们应该小心。例如，这个原则并不是说两个显示出来的 R_y-转换必定是同一的：

接着，第二路径原则也意味着我们的表示是一一的。

事实3　在上面的情形中，从状态 α 到指派 α^* 的映射是单射。

证明：（我们至少需要两个变元 x，y。）假设 $\alpha^*=\beta^*$。那么特别地，我们就有 $\alpha^*=_x\beta^*$，$\alpha^*=_y\beta^*$。根据上面的观察，这意味着 $\alpha R_x\beta$ 和 $\alpha R_y\beta$。但由第二路径原则，可得 $\alpha=\beta$。 ■

从逻辑的观点来分析这种简单的表示——特别是，这至关重要的路径原则族——我们可以明白下列东西：

· 可表示抽象框架类可以用都是全称霍恩形式的一阶句子集加以定义。

· 这个定义利用了无穷多框架条件。

前一个性质具有可喜的后果，包括谓词逻辑在这个框架类上有效性的内插性（根据模态逻辑的一般结果；5.10）。第二个性质则暗示了某种程度的复杂性（参阅 Andréka 的非有穷可公理化结果）。最后，容易看到只有很少一部分路径原则对应于谓词逻辑语言中的模态公式。至此我们完成了对于 **CRS** 的分析。

评论2（代替序列的集合）　在完全标准的情形中，拥有两个量词交换公理时，我们就足以定义关系 $\alpha R_X\beta$，其中 X 是一个变元集，并且假定某个连通转换序列为 X 中的变元所索引。那么路径原则就归约为

$$\text{如果 } \alpha R_X\beta \text{ 并且 } \alpha R_Y\beta\text{，那么 } \alpha R_{X\cap Y}\beta$$

表示状态模型

我们的表示方法可以扩展到那些解释结构原子公式的模型 $\mathfrak{M}$ 上。这些模型由抽象框架 $(S,\{R_x\}_{x\in VAR})$ 外加一个解释状态上的原子的解释函数 I（一个"模态赋值"）构成——解释谓词逻辑对象语言也需要这样的解释函数。定义被表示框架上的下列标准解释函数（为了方便，仅仅给出一个谓词字母 Q）：

$$I^*(Q)=\{((\alpha,x)^{\sim},(\alpha,y)^{\sim})\mid I(\alpha,Qxy)\}$$

我们需要证明下面的恰当性断定：

声明2　对于所有谓词逻辑公式 ϕ，$\mathfrak{M},\alpha\models\phi$ 当且仅当 $\mathfrak{M}^*,\alpha^*\models\phi$。

不幸的是，我们不会完全成功。下面的结果就是到目前为止我们所得到的。

证明：［尝试］这个断定对于布尔情形是可以自动获得的，由上面的证明可知对于量词也成立。可是原子情形提出了困难。从左到右，容易证明。如果 $\mathfrak{M}$，

$\alpha \models Qxy$，那么 I（α, Qxy）成立，从而由定义就有 I^*（Q）对于（α, x）$^\sim$，（α, y）$^\sim$（也就是 α^*（x），α^*（y））成立。但是从右到左时，我们就遇到了障碍。令 I^*（Q）在 $\mathfrak{M}^*$ 中对于 α^*（x），α^*（y）（也就是（α, x）（α, y））从而存在 γ 满足（α, x）~（γ, x）和（α, y）~（γ, y）并使得 I（γ, Qxy）。由 ~ 的定义，就存在两个有穷序列 Z_x（不包含 x）和 Z_y（不包含 y）满足 $\alpha R_{Z_x}\gamma$ 和 $\alpha R_{Z_y}\gamma$。现在，我们需证明的是 I（α, Qxy）。在此，更早一些的原子不变原则 $Py \to \forall xPy$ 和 $\neg Py \to \forall x \neg Py$ 显然应该有所帮助。但它们都不够强。我们需要一个表述为 $Qxy \to [Z_x \cap Z_y] Qxy$ 的更为复杂的*路径原则*。可是这超出了我们的模态谓词逻辑语言的范围——因为它牵涉到了“程序相交”这个进一步的运算根本上是什么东西这一层。 ■

克服这个困难的一个方法就是把我们的表示方法扩展到一个更丰富的谓词逻辑语言。下面给出两个大相径庭的选项。[Westerståhl. 1995] 提出了迄今为止最为优雅的解决方案，它结合了我们现在的表示方法和下面 5.9 的想法。人们可以把这些表示论证扩展到那些带有反映前面的代入原则的转换关系 $A_{x,y}$ 的抽象框架中去。我们这里是预备性地谈谈这个扩展（5.11 有一些相关细节）。

选项 1 状态的逐点（pointwise）等式

下列有用的关系已经在上面的论证中隐含地出现了：

$$\alpha R^x \beta \quad \text{当且仅当} \quad \alpha(x) = \beta(x)$$

这意味着我们对于强化状态模型(S, $\{R_x\}_{x \in VAR}$, $\{R^x\}_{x \in VAR}$, I) 的使用。新关系 R^x 作为等价关系，比旧关系 R_x 更容易处理。由下列等价式，可以使用新关系定义旧关系：

$$\alpha R_x \beta \leftrightarrow \bigwedge_{y \neq x} \alpha R^y \beta$$

借助这个定义，所有*路径原则*都可以简单地推导出来。把对象当作对于新关系 R^x 的等价类，由此表示变得更容易。但是这样做也有缺陷。上面的等价式对于一般的一阶语言来说是*无穷的*（infinitary）。并且，新关系的存在模态《x》尽管有趣，但是从谓词逻辑的观点来看却不再那么自然。因为 $\phi = \phi(x, y)$，《x》ϕ 变得像是一个存在闭包（“对于所有其他参数的一些值”）。

选项 2 多元量词

我们的框架（参阅 5.6）的另一个自然扩展采用了涉及有穷变元集 X 的状态之间的无差别关系：

$$\alpha R_X \beta \quad \text{当且仅当对于所有 } X \text{ 以外的变元 } y,\ \alpha(y) = \beta(y)$$

相应的“多元”一阶量词 $\exists X\phi$ 不再等价于序列形式 $\exists x_1 \cdots \exists x_k \phi$。在此情

形，我们通过设定（α, x）~（β, x）当且仅当存在一个不包含 x 的有穷集 Y 满足 $\alpha R_Y\beta$，就可以使用旧的表示方法。另外，更早一些的路径原则可以替换为下列原则：

- $\alpha R_X\beta$ 和 $\alpha R_Y\beta$ 推出 $\alpha R_{X\cap Y}\beta$
- $\alpha R_X\beta$ 和 $\beta R_Y\gamma$ 推出 $\alpha R_{X\cup Y}\gamma$

相应的多元谓词逻辑的一个典型规律是 $\phi\to\forall X\phi$（如果 Z 中没有 ϕ 的自由变元出现）。

5.9 可判定性

这一节提出了对于 **CRS**（没有代入）的有穷模型性和可判定的一个新证明——使用模态过滤和展开再加上表示。

广义指派模型的过滤

考虑谓词逻辑的广义模型（$\mathfrak{M}$, V），其中 V 是“可用指派”的范围。这里有两个相关的额外约束。“原子局部性”是说那些在原子公式 ϕ 的所有自由变元 $FV(\phi)$ 上一致的指派 $\alpha, \beta\in V$ 必定给与 ϕ 以相同的真值。“局部性”是说对于所有公式满足这一性质。接下来，我们固定某个公式 ϕ 及相应的变元集 VAR_ϕ（自由或约束）和子公式集 SUB_ϕ。所有东西都限制在这样的有穷语形集合上。首先，我们定义广义指派模型之上的一个多-**S5** 有穷过滤。

定义 1　对于 $\alpha, \beta\in V$，如果 α, β 对于 SUB_ϕ 中的所有公式给予相同的真值，设定 $\alpha\sim\beta$。（$\mathfrak{M}$, V）的 ϕ-过滤是克里普克模型 $FILT_\phi(\mathfrak{M}, V)=(S, \{R_x\}_{x\in VAR}, V)$，以如下方式获得。状态域：$S$ 由所有 ~-等价类 α 构成。可达关系：如果 α, β 对于所有相关公式 $\exists_x\psi$ 和不包含 x 的所有相关原子公式给予相同真值，那么 $\alpha^\sim R_x\beta^\sim$。赋值：对于相关原子 ψ，$V(\alpha^\sim, \psi)=1$ 当且仅当 ψ 在（$\mathfrak{M}$, V）中 α 处为真。

引理 1（过滤引理）　对于所有相关公式 ψ 和所有指派 α，

$$(\mathfrak{M}, V), \alpha\models\psi \text{ 当且仅当 } FILT_\phi(\mathfrak{M}, V), \alpha^\sim\models\psi$$

证明： 施归纳于 ψ。原子情形：由定义。布尔情形：使用例行程序。存在量词。由广义模型的真值定义，（$\mathfrak{M}$, V），$\alpha\models\exists x\psi$ 意味着存在某个 $\beta\in V$ 满足 $\alpha R_X\beta$ 和（$\mathfrak{M}$, V），$\beta^\sim\models\psi$。从而（由归纳假设）$FILT_\phi$（$\mathfrak{M}$, V），$\beta^\sim\models\psi$，并且 $\alpha^\sim R_x\beta^\sim$（从指派到它们的等价类的映射是同态的）。因此，$FILT_\phi(\mathfrak{M}, V)$，$\alpha^\sim\models\exists x\psi$。相反地，$FILT_\phi(\mathfrak{M}, V)$，$\alpha^\sim\models\exists x\psi$ 意味着满足 $\alpha^\sim R_x\beta^\sim$ 和 $FILT_\phi$

$(\mathfrak{M}, V)$，$\beta^{\sim} \models \exists\psi$ 的 $\beta^{\sim}$ 存在。那么，由归纳假设，$(\mathfrak{M}, V)$，$\beta \models \psi$，可得 $(\mathfrak{M}, V)$，$\beta \models \exists x\psi$。由此，根据关系 R_x 的定义，就有 $(\mathfrak{M}, V)$，$\alpha \models \exists x\psi$。■

过滤也可以对于满足（对于所有相关公式的）局部性的广义模型起作用，并可获得满足那个性质的一个有穷模型。当两个等价类在变元 z 不在其中自由出现的所有公式上一致的时候，人们可以安排这两个等价类是 R_z-可达的。

展开克里普克模型

上面（被过滤的）克里普克模型是抽象的。它们可能缺乏广义指派模型的某些关键性质。值得一提的是，以前的"*路径原则*"也许会失效（譬如，在不同的状态之间有两个不同的连接 R_x、R_y）。我们可以通过路径展开来改善这种行为，以得到具体表示的一个基础。

定义 2 一个有根克里普克模型（$\mathfrak{M}$, s）的展开 $UNW(\mathfrak{M})$ 由所有有穷序列（s, x_1, …, s_{k-1}, x_{k-1}, s_k）构成，其中所有 s_i 是 $\mathfrak{M}$ 当中的世界，并且总有 $s_i\, Rx_i\, s_{i+1}$。关系 R^z ①是所有在 $\mathfrak{M}$ 中满足 $last(X)\ R_z\ w$ 的有序对 $(X, X^{\frown}\langle z, w\rangle)$ 的关系集的自返传递闭包。最后，序列 X 的赋值 V 等同于 $\mathfrak{M}$ 中的 $last(X)$ 的赋值。

引理 2（展开引理） 对于所有公式 ψ，和所有序列 X，

$$UNW(\mathfrak{M}),\ X \models \psi \text{ 当且仅当 } \mathfrak{M},\ last(X) \models \psi$$

证明： 把 X 发送到 $last(X)$ 的函数是一个双仿。■

这里唯一不算老套的事实是，映射 $last$ 是关于展开当中的关系 R_z 的同态（只要我们的框架条件是全称霍恩形式，这个论证部分就会起作用）。现在，可以做出进一步的观察。

推论 1 在有穷克里普克模型当中满足的公式也在展开了的有穷克里普克模型当中满足。

证明： 这是著名的模态有穷深度引理的多-**S5** 版本。从根开始为一个公式定值仅仅涉及跨越不同的关系 R_z 的有穷深度转换——这一点可以透过多-**S5** 的范式可以看到。■

在 ϕ 的模态深度上的这个"分离点"保持了*原子局部性*：作为赋值上的一个约束，这个性质呈现在它的抽象克里普克版本中——尽管不必定保持完全局部性。最后，我们注意到展开克里普克模型也满足所有*路径原则*。

① 原文误为 R_{xi}——译者注。

表示展开了的克里普克模型

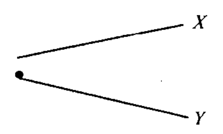
展开了的多-**S5** 模型可以表示成广义指派模型（这是 5.8 中的表示方法的一个更具体的版本）。这个想法很好解释。为根上的相关变元取不同对象的任意一个指派（x_i，d_i）（$1 \leqslant i \leqslant k$）。接着再取一个更长的向上序列 X。如果指派 $ass(X)$ 已被定义，那么选择一些新对象，并且仅对从 X 到 $X^{\frown}\langle z, w\rangle$ 的步骤改变 z 处的值。这是良定义的。

定义 3　一个展开了的克里普克模型的对象表示 $OBJ(\mathfrak{M})$ 已经描述如上。它的可容许指派是那些在那个过程中产生的指派。它对于谓词 Q 的解释函数 $I(Q)$ 汇集了所有由 $ass(X)$ 贡献的多元组 d，其中 $ass(X)$ 满足下列性质：某个原子 Qz 在 X 上 $\mathfrak{M}$ 中为真。

引理 3（表示引理）　对于所有公式 ψ，所有序列 X，

$$\mathfrak{M}, X \models \psi \quad \text{当且仅当} \quad OBJ(\mathfrak{M}), ass(X) \models \psi$$

证明： 从 X 到 ass(X) 的映射是一个双仿。原子情形。如果 $\mathfrak{M}$，$X \models Qz$，那么由 $I(Q)$ 的定义，$OBJ(\mathfrak{M})$，$ass(X) \models Qz$。接下来，如果 $OBJ(\mathfrak{M})$，$ass(X) \models Qz$，那么由相同的定义，对于某个有其 $ass(Y)$ 和 $ass(X)$ 在所有变元 $z \in Z$ 一致的序列 Y，$\mathfrak{M}$，$Y \models Qz$。从而，由构造，X 和 Y 相等或者通过一个带有一个 Z 外之 u 的关系链连通起来。原子局部性，也就是，所有公式 $Qz \to \forall u\, Qz$ 在 $\mathfrak{M}$ 中为真，那么就有 $\mathfrak{M}$，$X \models Qz$（相关原子的唯一性由我们的对象的“自由”指派所保证）。Z 字形情形。对上面构造的探究表明，如果 $X\ R_z\ Y$，那么 $ass(X) =_z ass(Y)$——并且反过来也如此。从左到右，容易证明。从右到左，假设 XR_zY 不成立。那么，在最一般的情形当中，它们必定位于某个树情形中。



其中在表示出来的极小连通路径上，不同于 z 的变元 u 的某个值已经变化。因为我们的表示始终在分支里向上和向一旁地选择不同的对象，这种差异在对子 $ass(X)$、$ass(Y)$ 当中将依然出现：从而这个对子缺乏关系 $=_z$。■

我们现在可以应用这些结果而获得：

定理 1　在广义指派语义当中的有效性是可判定的。

证明： 结合前面的事实，一个公式 ϕ 在广义指派模型当中可满足当且仅当它拥有一个满足其尺度不超过 $2^{|sub_\phi|}$ 的原子局部性的有穷抽象克里普克模型。后

一性质是可以判定的。 ■

定理 2 广义指派语义有穷模型性。

证明： 根据上面的分离性质，只需要证明它有有穷广义模型。 ■

在［Andréka, et al. 1994］中，这个推理也被用于获得标准模型上的谓词逻辑的大尺度“有界片断”的可判定性。那篇文章探讨了下列具有启发性的等式当中的关联：

完全谓词语言：广义依赖性语义 = 有界量词片断：标准语义

5.10 内　插

我们将要表明谓词逻辑的一个典型的元性质是怎样在我们的模态图景中获得成功的。模态内插定理有多种表现形式。克雷格内插的通常版本仅仅和共享命题字母（弱内插）有关：

如果 $\phi \models \psi$，那么在 ϕ，ψ（包含 T）的共享命题词汇上存在某个模态公式 α 使得 $\phi \models \alpha \models \psi$

强内插则还要求，内插公式 α 仅仅包含那些为 ϕ 和 ψ 所共享的模态算子。这两个版本对于基本多模态逻辑都成立。这里给出证明梗概（参阅［Andréka, et al. 1994］）。

证明：［弱内插］

仅仅考虑共享命题字母。令 $cons_{\phi\psi}(\phi)$ 为共享命题字母上的 ϕ 在这个语言中的有效模态后承集。我们证明

$$cons_{\phi\psi}(\phi) \models \psi$$

那么由紧致性，内插公式就可以从 $cons_{\phi\psi}(\phi)$ 得到。因而，令 $\mathfrak{M}$，x 为满足 $cons_{\phi\psi}(\phi)$ 的任意 L_ψ 模型。由标准模型论的一个论证，我们找到一个 L_ϕ 模型 $\mathfrak{N}$，y，它和满足 ϕ 的模型 $\mathfrak{M}$，x 在共享语言 $L_{\phi\psi}$ 中满足相同的模态理论。现在，从这些模型移动到 ω-饱和初等扩张 $\mathfrak{M}^+$，x 和 $\mathfrak{N}^+$，y①。状态 x，y 仍然在后面两个模型当中共享同一 $L_{\phi\psi}$ 理论——并且这个共享关系 $\equiv$ 还是那样的状态之间的 $L_{\phi\psi}$-双仿。现在考虑下列模型 $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$。它的状态是对子 (u, v)，其中 u 在 $\mathfrak{M}^+$ 的论域中而 v 在 $\mathfrak{N}^+$ 的论域中，并有 $u \equiv v$。它的关系 R_i 是直积当中的通常关系：R_i (u, v) (u', v') 当且仅当 $R_i uu'$ 和 $R_i vv'$。这里，两个明显的投影是从 $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ 到分别由 x，y 生成的 $\mathfrak{M}^+$ 和 $\mathfrak{N}^+$ 子模型之上的 L_ψ-和 L_ϕ-p-态射。对于公共语言 $L_{\phi\psi}$

① 原文误为 ψ——译者注。

中的命题字母，我们可以在这些对子之上定义没有歧义的赋值（既然双仿≡使得它们保持不变）。对于 L_ϕ-L_ψ 和 L_ψ-L_ϕ 当中的命题字母，我们通过沿着这些投影复制，也可以得到恰当的解释。其结果是完整语言 $L_\phi \cup L_\psi$ 的一个模型，而这个模型拥有一个和 $\mathfrak{M}^+$，x 之间的 L_ψ-双仿，以及一个和 $\mathfrak{N}^+$，y 之间的 L_ϕ-双仿。那么我们可以论证如下。ϕ 在 $\mathfrak{N}$，y 中成立（由构造），从而在 $\mathfrak{N}^+$，y 中成立（由 L_ϕ-初等扩张），并且在 $\mathfrak{MN}$，$\langle x, y\rangle$ 中成立（由 L_ϕ-双仿）。既然 $\phi \models \psi$（这里是使用我们的关键假设的地方），ψ 必定在 $\mathfrak{MN}$，$\langle x, y\rangle$ 中为真，从而也在 $\mathfrak{M}^+$，x 中成立（L_ψ-双仿）及在 $\mathfrak{N}$，x 中成立（L_ψ-初等子模型）。 ■

对于拥有由全称霍恩条件定义的特征框架类的任意框架类来说，这个证明依然有效，因为这些条件为框架的子模型和直积所保持。上面论证中的根本模型 $\mathfrak{MN}$ 是一个直积的子模型（它是一个范畴“回退”：参阅［Marx. 1995］以了解进一步的范畴论背景）。注意这个情形不可能是太过普通的情形，因为我们知道内插对于模态逻辑来说是一个稀罕的性质（［Maksimova. 1979］）。

证明：［强内插］

为了证明这个更强的性质，我们可以仅仅假设上面的双仿≡关于那些对应模态 $\langle i\rangle$ 在 ϕ 和 ψ 都出现的可达关系 R_i 满足 Z 字形条件。但由于我们需要完全的 L_ψ-和 L_ϕ-双仿以分别连接 $\mathfrak{MN}$ 和 $\mathfrak{M}^+$，x 及 $\mathfrak{MN}$ 和 $\mathfrak{N}^+$，y，我们不得不修改积模型。这里给出梗概。特别地，新模型需要足够的后继以证实对于 L_ϕ-L_ψ 和 L_ψ-L_ϕ 中的模态的所有可达关系的 Z 字形条件。为此目的，人们可以添加 $\mathfrak{M}^+$ 和 $\mathfrak{N}^+$ 的不相交拷贝，并且对于 L_ϕ-L_ψ 中的所有模态 $\langle i\rangle$，如果 vR_iv'接近 $\mathfrak{M}^+$ 拷贝，便构造明显的连接 $(u, v)R_iv'$，——在 L_ψ-L_ϕ 中接近 $\mathfrak{N}^+$ 拷贝的情形给出相似构造。对于这个扩张框架，到 $\mathfrak{M}^+$，$\mathfrak{N}^+$ 的明显投影再次是恰当种类的双仿，由此最后的论证也就可以像前面那样展开。这个方法可以用于证明极小多模态逻辑的强内插性质。

然而，再加上一些框架条件，哪怕是一些全称霍恩子句条件，事情也可能变得复杂许多。譬如，带有公理 $\langle 1\rangle\phi \rightarrow \langle 2\rangle\phi$ 的模态逻辑有弱内插，但是显然没有强内插。加上简单霍恩子句条件，上面的证明也可以起作用。特别地，对于其中所有 R_i 为等价关系的多-**S5**，前面的构造可以在给出两个额外假定的情况下起作用。在原来关于积的那一部分，人们必须对于 L_ϕ-L_ψ 和 L_ψ-L_ϕ 中的所有 $\langle i\rangle$ 在 vR_iv'的情况下增加所有连接 $(u, v)R_i(u', v')$ ——同时那部分和 $\mathfrak{M}^+$，$\mathfrak{N}^+$ 的那两个拷贝之间之前已有的连接要被设计为对称的。由此而来的模型适合多-**S5**，并且上面的投影也自动成为合适的 p-态射。 ■

（印刷中添加：Maarten Mark 最近已经获得这些观察的重要推广）

我们总结我们的结果如下：

定理 3 极小谓词逻辑和 **CRS** 拥有强内插。

证明： 极小谓词逻辑只不过是我们的极小多模态逻辑。对于 **CRS**，还需要一个进一步的、也许让人惊奇的观察（参阅［Németi. 1991］，定理 8）。

事实 3 **CRS** 的完全模态逻辑就是多-**S5**。

证明： 在一个方向上，所有 **S5**-规律显然为规律*路径原则*所证实。但是反过来，任一多-**S5** 的模型都可以*被展开*为自然满足所有*路径原则*的模型。这需要仔细地按照序列展开以确保，世界对于所有关系 R_i 共享循环，同时除此而外，所有真后继步骤对于每一个这样的关系是唯一的。更确切地说，新世界变成世界的有穷序列 $\langle \cdots, w, i, v, \cdots \rangle$，它的直接后继步骤选择 w 的某个 R_i-后继 v 并唯一地标记这个转换。在这些序列上，新关系 R_i 被定义为所有多元组 $(X, \langle X, i, y \rangle)$ 的集合的自返传递闭包。由此可知，两个序列 X，Y 仅仅通过某个有穷转换序列（可能采用不同的指标）相关，当且仅当 Y 能够通过先丢掉连续的 X-尾巴再增加新的尾巴从 X 达到（此类连接中有一个唯一的最短连接。更长的连接可以通过增加中间序列来得到）。这个观察意味着 **CRS** 的*路径原则*。如果存在一条 X 和 Y 之间、没有关系 R_i 的路径，那么极小连通路径与 R_i 无关。对于任意给定的一个有穷的连接重复这个过程，对于其余的模态必定存在一个纯粹的极小连接。

由此事实，**CRS** 的强内插由多-**S5** 的强内插可得。 ■

这个论证和 5.9 的表示方法相似。在模型上，它把 **CRS** 公理化为多-**S5** 加上原子局部性。它也表明事实上在状态框架上所有路径原则都没有模态定义。在增加关于代入的可达关系及一个完整谓词逻辑语言当中的其他词汇的情况下，**CRS** 的公理化描述和元理论将变得更为复杂（参阅［Németi. 1991；1993；Mikulas. 1995］）。标准谓词逻辑没有*强内插*。有效后承 $\exists xPx \models \exists yPy$ 没有共享变元的内插公式。关于标准谓词逻辑的内插性质的细节，以及它的有穷变元片断和柱状代数逼近，参阅［Sain. 1990；Marx. 1995］。相关的反面结果和上面的正面结果是相容的。在模态公式到一阶状态语言的翻译之下，前面的结果就像是标准内插定理，然而是关于共享模态的*可达关系*而言的。

5.11 再论代入

这一节将给出关于代入和指派的一些观察结果。

一个"纯粹代入演算"中的有效原则

它们包括下面的这样一些原则，其中假设关系 $A_{x,y}$是全函数：

$$x:=y;\ u:=v \leftrightarrow u:=v; x:=y \qquad x:=y; x:=v \leftrightarrow x:=v$$

$$x:=y; u:=x \leftrightarrow x:=y;\ u:=y \qquad x:=x \leftrightarrow id$$

扩展前面关于抽象状态框架的表示方法

对于表示抽象框架（S, $\{A_{x,y}\}_{x,y\in VAR}$），人们可以使用满足 $A_{x,y}\alpha\alpha$ 的不动点 α，或者前面关于等价关系的方法：

$$(\alpha, x) \sim (\beta, x):\ \exists y \neq x \exists z:\ \alpha A_{y,z}\beta$$

$$(\alpha, x) \sim (\beta, y):\ \alpha A_{y,x}\beta$$

并取其自返传递闭包。路径原则再一次出现这个关键等价的分析中：

$$\alpha A_{y,z}\beta \quad \text{当且仅当} \quad \beta^* = \alpha^{*x}_{\alpha^*(y)}$$

当这个表示方法和更早的表示方法结合起来时，在模态状态框架（S, $\{R_x\}_{x\in VAR}$, $\{A_{x,y}\}_{x,y\in VAR}$）上，需要对于其他的等价式作出调整：

$$\alpha R_x \beta \quad \text{当且仅当} \quad \alpha^* =_x \beta^*$$

这就涉及前面几个在代入和量词之间的模态交互原则。函数 $A_{x,y}$并不非常复杂。譬如，在 **CRS** 中，一个像 $[y/x]\exists z\phi \leftrightarrow \exists z[y/x]\phi$（以差异为模）的“存在原则”可以作为准普遍类型来处理（参阅［Marx. 1995］）。在标准模型上，(1) 的原则把代入的有穷序列紧缩为对于标准同步代入 $x:=u$（其中 x_i 各不相同，没有 u_i 在这些 x_i 中出现）的范式。

强化语言

这些模型再一次提示我们引入更为丰富的语言。显而易见，关系 $A_{x,y}$不对称，从而使得沿着这些关系回溯是有意义的。这就需要一个在两个方向上解释代入的“时间逻辑”：

$\mathfrak{M}, \alpha \models F_{y/x}\phi$　当且仅当　$\exists\beta$: $\alpha A_{x,y}\beta$ 且 $\mathfrak{M}, \beta \models \phi$　　未来

$\mathfrak{M}, \alpha \models P_{y/x}\phi$　当且仅当　$\exists\beta$: $\beta A_{x,y}\alpha$ 且 $\mathfrak{M}, \beta \models \phi$　　过去

作为一个示例，取关于程序正确性的霍尔（Hoare）类型指派公理：

$$\{[t/x]\phi\}\, x:= t\, \{\phi\}$$

在我们的时间逻辑中，这是一个基本换位公理（H：“过去一直”）：

$$\phi \rightarrow H_{t/x} F_{t/x}\phi$$

人们也可以使用向后模态表达标准同一陈述：

$$x = y \leftrightarrow P_{y/x}T$$

向后替换模态结合了同一和通常的量化：

$$P_{y/x}\phi(x,y) \leftrightarrow x = y \,\&\, \exists z\phi(z,y)$$

由于这个附加的表达力，公理化这个向后向前替换演算的一个版本，即便在标准逻辑中也该是有趣的。正如在5.6和5.8中对多元量词所建议的那样，这个替换演算也可加以扩展用以处理多重代入。其中需要应用相同的一些要点。

5.12　翻　　译

模态语言也可以翻译为标准状态模型之上的一阶语言。这反映了把不同模型和语言关联起来的依赖性语义之上的一个宽泛的看法。事实上，有两个主要方法通过局部化一个可判定的“内核”来“驯化”经典一阶逻辑。一者采用非标准“有界”语言片断上的标准语义，另一者采用标准一阶语言上的非标准广义语义。前者更具语形性质，后者则更有“语义”的味道（最后，正如在逻辑中经常所见，这种差别只是相对的。譬如，人们也可以把关于上面的模态一阶模型的“语义”模态话语翻译到二种类的（two-sorted）——用以直接指称“个体”和“状态”——一阶逻辑受限语形片断中去。相反也可如此，……等等）。这里有一种很大程度上未加探讨的数学二重性潜伏在背景当中——我们可以通过一些来自［Andréka, et al. 1994］的简单观察予以说明，而该文涉及单种类（one-sorted）翻译。

从有界片断到广义模型

考虑任意k-变元语言$L\{x_1, \cdots, x_k\}$。令R为一新k元谓词。我们定义从k-变元公式到有界一阶语言的一个翻译tr_g：

全局相对化

$tr_g(\phi)$来自于对ϕ中所有量词相对化到原子$Rx_1\cdots x_k$。

接下来，我们定义模型上的一个相应运算。令$\mathfrak{M}$为对于任意$L\{x_1, \cdots, x_k\}$的广义指派模型（现在$L\{x_1, \cdots, x_k\}$还没有新谓词符号R）。

受限标准模型

标准模型$\mathfrak{M}_{rest}$是在看作标准模型的$\mathfrak{M}$的基础上，扩展以新谓词的下列解释：$R(d_1, \cdots, d_k)$当且仅当指派$x_i := d_i$（$1 \leqslant i \leqslant k$）在$\mathfrak{M}$当中可用。

这个构造的目的在于证明下列事实。

命题3　对于$\mathfrak{M}$中的所有可用指派α，以及所有公式ϕ，

$$\mathfrak{M}, \alpha \models \phi \quad 当且仅当 \quad \mathfrak{M}_{rest}, \alpha \models tr_g(\phi)$$

因此，人们可以能行地把所有广义指派模型上的（也即在**CRS**中的）普遍有效性归约为有界公式的标准有效性。

推论 2　$\models_{\mathrm{CRS}}\phi$　当且仅当　$\models_{\mathrm{standard}} Rx_1\cdots x_k \to tr_g(\phi)$。

对于这个分析还有更多要说的东西。通过对可容许指派施加约束可以产生广义指派模型的一些特殊类。只要这样的一些类的附加条件可以陈述为有恰当范围的一阶公式，那么它们的一阶理论也将是可判定的。这特别地可以应用到所谓“局部公平的”广义指派模型中去，在这样的模型当中，在一个可容许指派当中的值的每一个轮换（permutation）或者等同都会获得另一个可容许指派（**CRS** 的完全代入版本需要这些）。到此为止，我们对于从有界片断到广义语义这样的反向翻译知之甚少。

翻译有助于比较关于依赖性的不同模型。回想一下 5.2 中对广义量词所作的分析。后者来自于对一阶逻辑给出的一个像“全局翻译” tr_g 但又有细微差别的“局部翻译” tr_l。对于子公式 $\exists x_i\psi$，人们可以仅仅把它相对化到一个原子 R_x，其中的 x 列出了局部语境 ψ 的所有自由变元。这个差异解释了所有怪异行为。譬如，tr_g 使得模态分配律成为一个有效的有界原则，然而 tr_l 则不能：

$$\forall y\ (\forall x\ (Ax \to Bxy) \to (\exists x\ Ax \to \exists x\ Bxy))$$

$$tr_g\quad R_x y \to \forall y(Rxy \to (\forall x(Rxy \to (Ax \to Bxy)))$$

$$\to (\exists x\ (Rxy \wedge Ax) \to \exists x(Rxy \to Bxy)))$$

$$tr_l\quad \forall y(Ry \to (\forall x\ (Rxy \to (Ax \to Bxy)) \to (\exists x\ (Rx \wedge Ax) \to \exists x\ (Rxy \wedge Bxy)))$$

5.13　更高级依赖性模型

为了得到更丰富的语言，我们可以把广义指派语义带到更远的地方。我们要讨论一个为［van den Berg. 1995］对于复数的解释所启发的逻辑系统。

从单数状态到复数状态

关于集体词和复数的语义文献使用了把变元映射到对象集合的指派。因而，状态得以从类型（$v\to e$）上升到类型（$v\to(e\to t)$）。但在下一步骤，人们可以把类型为（$v\to(e\to t)$）的状态等同于标准指派集。借助于个体变元的值之间的可能依赖性（用以解释语言学中的指代），这使得我们可以考虑到更为细致的差异。用集合论的话说，从一个重复幂（2^{DOM}）^{VAR}，我们可以得到 $2^{(DOM^{VAR})}$。一般而言，后者具有更大的尺寸——这反映了我们为被指派对象之间的依赖性信息编码时具有更大的自由度。因而，上面的广义指派模型得以从一个完全不同的角度重现。在状态论域之间有一些自然的关联。下面的映射把复数指派 A 发送到个体指派集 $S(A)$：

$$S(A)\ =\ \{f \mid 对于所有\ x, f(x)\ 在\ A(x)\ 中\}$$

另外一个映射把个体指派集 S 发送到复数指派 $A(S)$：

$$A(S) = \lambda x \cdot \{f(x) \mid S\text{ 中的所有 }f\}$$

映射 S 发送的是指派的特殊“完全”集。与映射 A 不同，它是1-1 的。这两个层次的差别取决于在它们之上得到解释的形式语言。和复数的一个标准谓词逻辑一起，所有东西都没有变化。对于拥有“个体化”$\delta x \cdot \phi$ 及“参与”$\pi x \cdot \phi$ 这样的新算子的一个语言来说，这就是［van den Berg. 1995］中的等值定理的意义。例如，

$\mathfrak{M}, S \models \delta x \cdot \phi$ 当且仅当对于某个由集合 S 中 x 值等于一个特定个体值 d 的所有函数构成的集合 S'，$\mathfrak{M}, S' \models \phi$。

关于依赖性的更丰富逻辑

“广义指派模型”以传统方式解释一阶语言如下：

$$\mathfrak{M}, S, \alpha \models \phi\ (\text{单数状态 }\alpha\text{ 在“复数语境”}S\text{ 中证实 }\phi)$$

但是我们也可以以如下方式解释：

$$\mathfrak{M}, S \models \phi\ (\text{复数状态 }S\text{ 自己证实公式 }\phi)$$

其中公式 ϕ 可以利用集体状态的更丰富结构而包含新的逻辑算子。现在我们至少有两类存在量化，它们反映了状态上的两种自然转换关系：

$\exists_{coll} x \cdot \phi$ 在 S 处为真当且仅当 ϕ 在某个满足 $S =^x S'$ 的 S' 处为真，也即 S，S'拥有除变元 x 的值而外相同的指派。

$\exists_{ind} x \cdot \phi$ 在 S 处为真当且仅当 ϕ 在某个满足 $S =_x S'$ 的 S' 处为真，也即 S，S'拥有相同的指派但 S'中的所有 x-值为被设定为一个对象。

由此而来的模态逻辑包含了个体和集合量化之间的一个相互作用理论的信息。借助于反映上面两类可达关系，比如说（对于所有变元 x）R_{coll}，x 和 R_{ind}，x 的结构性质及它们之间的关联的那些公理，我们也可以通过模态框架对应来探究它。

例 （复数框架对应）

- 所有 $R_{coll,x}$都是等价关系。那么，每个量词 $\exists_{coll} x$ 满足 S5
- 关系 $R_{ind,x}$不是等价关系。它们是传递的，但不自返也不对称。因而，我们有 $\exists_{ind} x \cdot \exists_{ind} x \cdot \phi \rightarrow \exists_{ind} x \cdot \phi$，但没有，譬如，$\phi \rightarrow \exists_{ind} x \cdot \phi$（因为 ϕ 可能作为一个集体论断而真，但对于 x 的任意个体值为假），或者 $\exists_{ind} x \cdot \forall_{ind} x \cdot \phi \rightarrow \phi$。即便如此，$R_{ind}$，$x$ 还满足进一步的类似于 S5 性质，譬如：

$$\exists_{ind} x \cdot \phi \rightarrow \exists_{ind} x \cdot \exists_{ind} x \cdot \phi$$

$$\exists_{ind} x \cdot \forall_{ind} x \cdot \phi \rightarrow \forall_{ind} x \cdot \phi$$

• 在 $R_{coll,x}$ 和 $R_{ind,x}$ 之间也有相互作用。每一 $R_{ind,x}$ 被包含在 $R_{coll,x}$ 中，由此 $\exists_{ind}x\cdot\phi\rightarrow\exists_{coll}x\cdot\phi$（对于个体的真是集体真的一个边界情形）。当然，反方向不成立。其次，$R_{ind,x}$ 前面的 $R_{coll,x}$ 归约为一个 $R_{ind,x}$ 步骤，反之亦然：

$$\exists_{coll}x\cdot\exists_{ind}x\cdot\phi\leftrightarrow\exists_{ind}x\cdot\phi$$

$$\exists_{ind}x\cdot\exists_{coll}x\cdot\phi\leftrightarrow\exists_{coll}x\cdot\phi$$

对于普遍量词也是如此：后面出现的量词总是更重要。

• 带有不同变元指标的关系之间也有相互作用。首先，容易看到我们有下列轮换原则：

$$\exists_{coll}x\cdot\exists_{coll}y\cdot\phi\leftrightarrow\exists_{coll}y\cdot\exists_{coll}x\cdot\phi$$

$$\exists_{ind}x\cdot\exists_{ind}y\cdot\phi\leftrightarrow\exists_{ind}y\cdot\exists_{ind}x\cdot\phi$$

$$\exists_{coll}x\cdot\exists_{ind}y\cdot\phi\leftrightarrow\exists_{ind}y\cdot\exists_{coll}x\cdot\phi$$

我们也可得到丘奇-罗塞（Church-Rosser）独立性质，它反映了所有不同的 $R_{ind,x}$，$R_{ind,y}$，$R_{coll,x}$，$R_{coll,y}$ 的语义交汇。这给了我们如下一些原则：

$$\exists_{coll}x\cdot\forall_{ind}y\cdot\phi\rightarrow\forall_{ind}y\cdot\exists_{coll}x\cdot\phi$$

$$\exists_{ind}x\cdot\forall_{ind}y\cdot\phi\rightarrow\forall_{ind}y\cdot\exists_{ind}x\cdot\phi$$

上面已把一个更一般的问题彰显出来。指派集 S 包含了变元之间几种“依赖性”的信息。这里的直觉也许不止一个。“依赖性”可能意味着函数依赖（如果 S 中的指派在 x 上一致，那么它们也在 y 上一致），也可能意味着值域当中其他种类的“相互关系”。譬如，令 $S[x\mid y:=d]$ 为 S 中 y-值等于 d 的所有指派的 x-值的集合。那么，由于 d 在个体对象域当中运行，人们也许要求所有值 $S[x\mid y:=d]$ 不尽相同。不同的依赖关系也可以有不同的数学性质，并且暗示不同的逻辑形式体系。

附录：一些来源

这篇文章中的提议并不新鲜。它只是把新近文献中大量有趣的相关发展背后的共同模式给揭示了出来。

动态逻辑

我们的模态语义反映了标准动态逻辑（[Pratt. 1976；Harel. 1984]）——也反映了像“作为指派的代人”这样的一些细节。它还特别地反映了目前对于自然语言中的指代的一些动态方案，诸如“动态谓词逻辑”（[Groenendijk & Stokhof. 1991；Vermeulen. 1994]）——它们通过把存在量词 $\exists x$ 看作对 x 的一个“随机指派”，改变了变元指派。迄今为止，动态谓词逻辑已经采用标准集合论语义，从而也继承了后者的不可判定性。但是这仅仅是它的初始表现的一个保守特征而

已。一个更为抽象的状态观点在［Janssen. 1983］中已经可以看到——出现在该文处理程序语言的蒙太格类型语义的地方。

概率逻辑

在以下这一点，我们的核心语义也比较接近于在［van Lambalgen. 1991］中提出来的概率量词的语义：为一阶公式定值时，一个“独立关系”限制对于新个体的选择。［Alechina & van Benthem. 1993］把这一点引进了带有“结构化论域”的更一般形式，只是没有概率方面的考虑——但是（由于他们采用个体序列而不是指派作为状态）带来了一些技术复杂性。［Alechina. 1995］对于依赖性模型进行了持续研究，其中比较了基于状态和基于对象这两种依赖性观点。

代数逻辑

从技术上说，我们的提议和安德烈卡与内梅提提出来的谓词逻辑的广义语义有关，而后者基于他们关于柱状代数的早期工作（参阅他们在“正在运行的逻辑”这个会议上的那些漂亮讲稿；［Marx, et al. 1996］）。从模态观点来看，我们在此考虑的东西是实质上是柱状代数中的“原子结构”。这个观点已经得到深度发展并且广泛地应用到维尼玛关于多模态逻辑的 1992 年博士论文当中，其中的“柱状模态代数”就是我们这里的技术范式（参阅［Marx & Venema. 1995］）。

在所有这些东西之外，我们必须要提到一个更为激进的内在动机，以及新选项的那个图景本身就有其内在价值这一论点。它还需要发展——而不只是为了对于如何理解一个未受挑战的理论正统提供一些意外的启示。在讲这个故事的过程中，我们也发现大量的新技术结果，它们表明这种语义分析是可行而且有趣的。

参考文献

Alechina N, van Benthem J. 1993. Modal quantification over structured domains. Report ML-93-02, ILLC Amsterdam. // de Rijke M, ed. 1997. *Advances in Intensional Logic*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers: 1 ~ 27.

Alechina N. 1995. *Modal Quantifiers*. PhD thesis. ILLC, University of Amsterdam

Andréka H, van Benthem J, Németi I. 1994. Back and forth between modal logic and classical logic. Manuscript. Mathematical Institute, Hungarian Academy of Sciences, Budapest and ILLC, University of Amsterdam. Appeared in *Bulletin of the Interest Group in Pure and Applied Logic*, London & Saarbrücken. 1998. Final version, 1998. 'Modal languages and bounded fragments of predicate logic', *Journal of Philosophical Logic*, 27: 217 ~ 274

Andréka H. 1991. *Complexity of Equations Valid in Algebras of Relations*. D. Sc. thesis. Mathemati-

cal Institute Budapest: Hungarian Academy of Sciences. 1997. Appeared as two parts in Annals *of Pure and Applied Logic*, 89: 149 ~ 209 (Part I: Strong Non-Finitizability), 211 ~ 229 (Part II: Finite Axiomatizations)

Beaver D. 1995. *The Kinematics of Presupposition.* PhD thesis. ILLC, University of Amsterdam

Blok W J. 1980. The lattice of modal logics: an algebraic investigation. *Journal of Symbolic Logic*, 45: 221 ~ 236

Bull R A, Segerberg K. 1984. //Gabbay D. Guenthner F, eds. *Handbook of Philosophical Logic*, Vol 2. Dordrecht: D. Reidel.

Cepparello G. 1995. *Studies in Dynamic Logic.* PhD thesis, University of Pisa and ILLC, Ulniversity of Amsterdam

de Rijke M. 1993. *Extending Modal Logic.* PhD thesis. ILLC, University of Amsterdam

Dosen K, Schroeder-Heister P, eds. 1993. *Substructural Logics.* Oxford: Clarendon Press

Enderton H. 1972. *A Mathematical Introduction to Logic.* New York: Academic Press

Fernando T. 1992. Transition systems and dynamic semantics. Tech Report CS-R9217, Centre for Mathematics and Computer Science, Amsterdam

Fine K. 1985. *Reasoning With Arbitrary Objects.* Oxford: Blackwell

Goldblatt R. 1987. *Logics of Time and Computation*, CSLI Lecture Notes. Stanford: CSLI Publications and Chicago University Press

Groenendijk J, Stokhof M. 1991. Dynamic predicate logic. *Linguistics and Philosophy*, 14: 39 ~ 100

Groeneveld W. 1995. *Logical Investigations into Dynamic Semantics.* PhD Thesis. ILLC, University of Amsterdam

Harel D. 1984. Dynamic Logic. // Gabbay D, Guenthner F, eds. *Handbook of Philosophical Logic.* Vol II. Dordrecht: Reidel: 497 ~ 604

Henkin L, Monk D, Tarski A. 1985. *Cylindric Algebra*, Part II. Amsterdam: North-Holland

Hodges W. 1993. A defense of the doctrine of distribution. Manuscript. London: Queen Mary's College.

Hollenberg M, Vermeulen C. 1994. Counting variables in a dynamic setting. *Journal of Logic and computation*, 6: 725 ~ 744

Janssen T. 1983. *Foundations and Applications of Montague Grammar.* PhD thesis. Institute of Mathematics, University of Amsterdam

Keenan E, Westerståhl D. 1994. Quantifiers. // van Benthem J, ter Meulen A, eds. 1997. *Handbook of Logic and Language.* Amsterdam: Elsevier Science Publishers

Kurtonina N. 1995. *Frames and Labels.* PhD thesis. Onderzoeksinstituut voor Taal en Spraak UiL-OTS, University of Utrecht, and ILLC, University of Amsterdam

Maksimova L. 1979. Interpolation theorems in modal logics and amalgamated varieties of topo-Boolean algebras, *Algebra i Logika*, 18

Marx M, Masuch M, Pólos L, eds. 1996. *Arrow Logic and Multi-Modal Logics.* Stanford: CSLI Publi-

cations

Marx M, Venema Y. 1996. *Multi-Dimensional Modal Logic*. Kluwer Academic Press

Marx M. 1995. *Algebraic Relativization and Arrow Logic*. PhD thesis. Centre for the Study of Management, Faculty of Social Sciences and ILLC, University of Amsterdam

Meyer Viol W. 1995. *Instantial Logic*. PhD thesis. Centre for Mathematics and Computer Science, Amsterdam. Onderzoeksinstituut voor Taal en Spraak, Rijksuniversiteit Utrecht

Mikulas S. 1995. *Taming Logics*. PhD thesis. ILLC, University of Amsterdam

Németi I. 1985. The equational theory of cylindric relativized set algebras is decidable. Preprint No 63: 85, Mathematical Institute, Hungarian Academy of Sciences, Budapest

Németi I. 1991. Algebraizations of quantifier logics: An introductory overview. Mathematical Institute, Hungarian Academy of Sciences, Budapest

Németi I. 1993. *Decidability of Weakened Versions of First-Order Logic*. Lecture Notes, Workshop on Algebraization of Logic, Fifth European Summer School in Logic, Language, and Information, Lisbon

Pratt V. 1976. Semantical considerations on Floyd-Hoare logic. // *Proceedings 18th IEEE Symposium on the Foundations of Computer Science*: 326 ~ 337

Sain I. 1990. Beth's and Craig's properties via epimorphisms and interpolation properties in algebras. // Bergman C, Maddux R, Pigozzi D, eds. *Algebraic Logic and Universal Algebra in Computer Science*, Lecture Notes in Computer Science 425, Berlin: Springer Verlag: 209 ~ 226

Thompson R. 1981. *Transformational Structure of Algebraic Logics*. PhD thesis. Department of Mathematics, University of California, Berkeley

Valencia V S. 1991. *Studies on Natural Logic and Categorical Grammar*. PhD thesis. ILLC, University of Amsterdam

van Benthem J, Bergstra J. 1993. Logic of transition systems. *Journal of Logic, Language and Information*, 3: 247 ~ 283

van Benthem J, Cepparello G. 1993. Tarskian variations: dynamic parameters in classical semantics. Tech Report CS-R9419, Amsterdam: Centre for Mathematics and Computer Science

van Benthem J, ter Meulen A, eds. 1997. *Handbook of Logic and Language*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers

van Benthem J. 1983. *The Logic of Time*. Reprinted with revisions, 1991. Dordrecht: Reidel

van Benthem J. 1986. *Essays in Logical Semantics*. Studies in Linguistics and Philosophy. Vol. 29. Dordrecht: Reidel

van Benthem J. 1991. *Language in Action: Categories, Lambdas and Dynamic Logic*. Studies in Logic. Vol. 130. Amsterdam: North-Holland

van Benthem J. 1992. Logic as Programming. *Fundamenta Informaticae*, 17: 285 ~ 317

van Benthem J. 1993A. Contents versus wrappings: the sources of semantic complexity. // Marx M, Pólos L, 1996. eds. *Arrow Logic and Multi-Modal Logic*, Stanford: CSLI Publications: 203 ~ 219

van Benthem J. 1993B. Programming operations that are safe for bisimulation. Invited lecture Logic Colloquium Clermont-Ferrand 1994. // Final version 1998. *Studia Logica*, 60: 311 ~ 330.

van Benthem J. 1994. Dynamic Arrow Logic. // van Eijck J, Visser A, eds. *Logic and Information Flow*. Cambridge (Mass): The MIT Press: 15 ~ 29

van Benthem J. 1996. *Exploring Logical Dynamics*. Stanford: CSLI Publications

van den Berg M. 1991. Dynamic generalized quantifiers // van der Does J, van Eijck J. eds. *Generalized Quantifiers: Theory and Applications*, Dutch Graduate Network for Logic, Language and Information: 223 ~ 244

van den Berg M. 1995. *The Internal Structure of Discourse*. PhD thesis. ILLC, University of Amsterdam

van der Does J, van Eijck J. 1991. *Generalized Quantifiers: Theory and Applications*. Dutch Graduate Network for Logic, Language and Information, Amsterdam. Final version, 1996. *Quantifiers, Logic and Language*, CSLI Lecture Notes 54, Stanford: CSLI Publications

van Eijck J, Visser A, eds. 1994. *Logic and Information Flow*. Cambridge (Mass): The MIT Press

van Lambalgen M. 1991. Natural deduction for generalized quantifiers. // van der Does J, van Eijck J, eds. *Generalized Quantifiers: Theory and Applications*. Dutch Ph. D. Network for Logic, Language and Information, Amsterdam. Final version, 1996. *Quantifiers, Logic and Language*, CSLI Lecture Notes 54, Stanford: CSLI Publications: 143 ~ 154

Venema Y. 1992. *Many-Dimensional Modal Logic*. PhD thesis. ILLC, University of Amsterdam

Venema Y. 1994. Substitution and quantification as diamonds. Logic Group Preprint Series No. 106 Department of Philosophy, Utrecht University. Appeared as A modal logic of substitution and quantification. // Csirmaz L, Gabbay D, de Rijke M, eds. 1995. *Logic Colloquium* '92, Stanford: CSLI Publications: 293 ~ 309

Venema Y. 1995. Cylindric modal logic. *Journal of Symbolic Logic*, 60: 591 ~ 623

Venema Y. 1996. A crash course in arrow logic. // Marx M, Masuch M, Pólos L, eds. 1996. *Arrow Logic and Multi-Modal Logics*: 3 ~ 34

Vermeulen K. 1994. *Exploring the Dynamic Environment*. PhD thesis. Onderzoeksinstituut voor Taal en Spraak UiL-OTS, Rijksuniversiteit Utrecht

Visser A. 1993. Actions under presuppositions. // van der Does J, van Eijck , eds. *Generalized Quantifiers: Theory and Applications*. Philosophical Institute, Rijksuniversiteit Utrecht: 196 ~ 233

Westerståhl D. 1995. On some more or less modal sublogics of predicate logic. Manuscript. Philosophical Institute, University of Stockholm

6 使互模拟安全的程序构造*

袭江杰/译　余俊伟/校

6.1　模态逻辑与动态逻辑中的互模拟

在当前计算的数学理论中，加标转换系统间的“互模拟”被看做为进程间等价的自然度量。本质上，一个*加标转换系统*是一集状态带上一族表示状态间转换的二元关系，形如：

$$\langle S, \{R_a \mid a \in A\}\rangle$$

各状态上也可能已有一些一元谓词成立（比如“成功”、“死锁”）。基本的进程等价定义如下（也可参看［Park. 1981］）：

定义 1　两个加标转换系统间的*互模拟*是它们的状态集上的关系 C，它满足“原子一致”及 Z 字形条件以使进程间能“相互追踪”：

（i）若 sCs'，那么 s、s'满足相同的原子命题

（ii）若 sCs'且 $s\ R_a t$，则有 t'使得 $s'\ R_a t'$且 $tC\ t'$；反之亦然

这样，一个“进程”可以视为一族对互模拟封闭的加标转换系统。在模态逻辑中较早就有互模拟的概念（请参看［van Benthem. 1976］）。对用来描述加标转换系统——把它看作为多模态关系模型，它有通常的布尔运算，并且对每个原子行动 $a \in A$，有相应的模态词 $\langle a\rangle$ ——的模态语言，互模拟是个关键的语义不变概念。所有的模态公式都是*互模拟不变的*——对任意模型 $\mathfrak{M}$、$\mathfrak{M}'$，对任意 $s \in \mathfrak{M}$、$s' \in \mathfrak{M}'$，若 $\mathfrak{M}$、$\mathfrak{M}'$之间有互模拟关系 C，使得 sCs'，那么对任一模态公式 ϕ，

$$\mathfrak{M}, s \models \phi \quad 当且仅当\ \mathfrak{M}', s' \models \phi$$

---

* Program Constructions that are Safe for Bisimulation. *Studia Logica*, 1998, 60: 311 ~330. 本文的一个早期版本曾经在 1994 年 7 月 21 ~30 日的克莱蒙 - 费朗逻辑讨论会上宣读。

对这一命题的证明，互模拟定义中条件（i），原子一致，提供了证明的归纳基础；而条件（ii），向后-向前条件，则正是归纳步骤中的模态运算情形所需要的。我们还可以反过来考察，了解到这种"互模拟不变"还恰是模态公式的语义特征。为了表达相应之模型论保持结果，需要将模态语言看作相应的描述关系模型之一阶语言的一个片段（借助"标准翻译"，详细请参看 [van Benthem. 1984]）。我们有下面的结果：

定理 1　描述加标转换系统的一阶公式 $\phi(x)$ 互模拟不变当且仅当它是模态可定义的。

这一不变定理最早在 [van Benthem. 1976] 中给出，在 [van Benthem. 1991] 中有它的一个更简洁更一般的证明，其中使用了 ω-饱和模型的概念（参看 [Chang & Keisler. 1973]）。■

当我们从对基本模态逻辑的研究转移到对命题动态逻辑（[Harel. 1984]）的讨论时，这种分析的风格被保持了下来。命题动态逻辑也通过正则程序表达式 π，包括测试，和与之相应的模态词 $\langle\pi\rangle$，来描述加标转换系统上复杂的转换关系（由复合"程序"导出）。这时，命题动态公式 ϕ 再次对模型间互模拟 C 不变——只是也以新的方式表现。这时，在原来证明的基础上，我们还须说明正则程序构造也保持通常的前向后向条款。实际上，自原子关系起，每个二元关系 $[\![\pi]\!]$ 确实都如此。更确切地，这可由对程序、公式的联合归纳证得：

命题　若 C 为模型 $\mathfrak{M}$、$\mathfrak{M}'$间的互模拟，满足 sCs'，那么

(i) s、s'满足相同的命题动态公式；

(ii) 若 $s\ [\![\pi]\!]^{\mathfrak{M}}\ t$，那么有 t'使得 $s'\ [\![\pi]\!]^{\mathfrak{M}'} t'\ \&\ tC\ t'$。

由上面的结果，我们可以导出程序运算上的不变概念（出于可读性的考虑，下面我们要稍稍滥用一下符号）：

定义 2　称一个程序运算 $O(R_1, \cdots, R_n)$ 对互模拟安全，若对任两模型间的关系 C，C 相对于关系 $R_1, \cdots, R_n$ 是互模拟，那么 C 也相对于关系 $O(R_1, \cdots, R_n)$ 为互模拟。

独立于前面的模态分析，对互模拟安全这一概念可以拿来作可容许基本程序运算的有意思的一般语义标准。不难验证，象关系的复合；选择∪（即布尔并）这些正则运算都是对互模拟安全的。另一个例子是对应于模态公式 ϕ 的标准的测试关系 $(\phi)?$。这些例子反映了上面命题中直接归纳证明可行的关键之所在。因为后文中要涉及，我们也提及一个较不为人熟悉的否定运算的安全性，该运算不常见，但在近来所谓的"动态语义"的文献中被多次提到（参看 [van Benthem. 1996]）：

$$\sim(R) = \{(x,y) \mid x = y \text{ 并且无 } z \text{ 使得 } xRz\} \quad \text{“反域”}$$

我们自然可问：

> *是否有类似模态不变的保持定理，它们刻画了对互模拟安全的那些程序运算？*

更特别地，我们或许还可以问，对互模拟安全的语义条件是否恰使我们得到正则程序运算？单从计算的角度看，这些正则程序运算一直尤为突出。再一次，为使问题更精确一些，我们考虑相应的描述加标转换系统的标准一阶语言——只是现在，还对每个转换关系增加了任意的相应的二元关系符号。我们称一个程序运算是一阶的，若有带两个自由变元的一阶公式 $\theta(x, y)$ 定义它。前面提到过的所有运算都是这种意义上一阶的：

$(R_1; R_2)$	$\exists z\ (R_1xz \wedge R_2zy)$
$(R_1 \cup R_2)$	$R_1xy \vee R_2xy$
$\sim(R)$	$x = y \wedge \neg \exists zRxz$
$(P)?$	$x = y \wedge Px$

下面的定理，对互模拟安全的程序运算完全的语形[①]刻画，是本文的主要结果。

定理 2 一个一阶关系运算 $O(R_1, \cdots, R_n)$ 对互模拟安全当且仅当它能由我们模型中的原子关系 R_axy、原子测试 $(q)?$，这里 q 为原子命题，使用三个运算；和 $\sim$ 及 $\cup$ 构造得到。

定理的证明有点儿复杂，因此我们索性将之推后，在 6.3 中再给出。它使我们发掘出一个引理——该引理是模态逻辑模型论中的一个结果——“连续”（continuous）模态公式的保持性定理，它本身也颇有意思，因此，我们在 6.2 中单独对它做一点讨论。

6.2 连续模态公式

我们称一个模态公式 $\phi(p)$ 在命题变元 p 处连续，若下面的等价式在每一个模型上都成立（这里稍稍滥用了符号）：

$$\phi(\cup_{i \in I} P_i) \leftrightarrow \vee_{i \in I} \phi(P_i), \text{对每个子集族} \{P_i \mid i \in I\}$$

连续公式的例子有 $p \wedge q$、$\langle a \rangle p \wedge \langle b \rangle \neg q$、$p \vee \langle a \rangle p$；而 $\neg p$、$[a]p$ 则都不是。我们希望能找到连续这个概念语形方面的刻画。我们已有一些结果。比如，连续

① 原文为语义，疑为笔误——译者注。

性蕴涵了一个著名的语义性质——单调性，它对应着这样的语形条件：ϕ 可仅使用命题字母 p 的正出现来定义。对于一阶谓词逻辑，此即为林登定理。该定理实际上在基本的模态逻辑上也成立，可参看［Andréka, et al. 1995］)。当然我们期待此处有某种更严格的语法限制，而下面的结果就提供了：

定理3　公式 $\phi(p)$ 在 p 处连续当且仅当 它逻辑等价于下面“存在型”公式的某个析取式：$\alpha_0 \wedge p$、$\alpha_0 \wedge \langle \alpha_1 \rangle (\alpha_1 \wedge p)$、$\alpha_0 \wedge \langle \alpha_1 \rangle (\alpha_1 \wedge \langle \alpha_2 \rangle (\alpha_2 \wedge p))$ 等，这里所有 α_i 中都不出现 p。

实际上，对标准谓词逻辑，很容易就能得到类似的对连续性的语形刻画（可参看［van Benthem. 1986］)，不过在我们现在定理的证明，情况要复杂一点，不能直接借用那时的思路。

证明：其中一个方向，我们容易验证所有形如上述的公式都对相应的命题变元 p 连续。另一方向，如通常发生的那样，要困难一点。我们要借助下面的断言来获得它。

声明1　若 ϕ 为连续公式，那么 ϕ 蕴涵如下无穷析取式，该析取式由如上所描述的且蕴涵 ϕ 的模态存在型所组成。

若该断言成立，那么由紧致性，ϕ 蕴涵其中有穷个公式的析取，又因为这个析取式中的每个“存在型”析取支都蕴涵了 ϕ，这样，ϕ 就与该析取式逻辑等价。因此，我们只需证明该断言成立即可（实际上，这也是整个证明的困难之所在)。■

ϕ 为连续公式，设 $\mathfrak{M}$，$w \models \phi$，那么由 ϕ 向下连续，及 $V(p)$ 可以看作为单元集的并，我们有 $\mathfrak{M}'$，$w \models \phi$，其中 p 仅在一个世界成立（注意，$V(p)$ 决不能为空；否则，由连续性定义，$\phi(\varnothing)$ 蕴涵空析取式，而空析取式即为恒假式，这样就与 $\mathfrak{M}, w \models \phi$ 矛盾)。我们可以另取一个赋值 V'，使 $V'(p)$ 为单元集，并且 $\mathfrak{M}'$，$w \models \phi$。不失一般地，我们不妨就设 $\mathfrak{M}'$为以 w 根的生成模型（因为 ϕ 是模态公式，因此这在真值上不会不同)。在 $\mathfrak{M}'$中，设 p 在 w_n 上真，从根 w 到 w_n 的有穷长路径设为 $w = w_0 R_1 w_1 \cdots R_n w_n$，我们记 $\Phi_i = \{\psi \mid \psi$ 中不出现 p，并且 ψ 为在 w_i 真的模态公式$\}$，因为有通常的一阶翻译，因此，我们可以把这些模态公式同时看作为一阶公式。下面的后承关系在一阶逻辑中成立：

子声明　$\Phi_0(x_0), R_1 x_0 x_1, \Phi_1(x_1), \cdots, R_n x_{n-1} x_n, \Phi_n(x_n), Px_n \models \phi$。

若子断言成立，那么再由紧致性，这些 Φ_i 中有穷个公式就可使后承关系成立——然后经直接的谓词逻辑等价变换，我们就可得到所求之蕴涵 ϕ 的“存在型”公式。对所有的使 $\mathfrak{M}, w \models \phi$ 成立的模型 $\mathfrak{M}$ 都如此找到一“存在型”公式，然后再证明在每一处，ϕ 局部蕴涵某一这样的“存在型”公式，进而我们就可推

得 ϕ 全局蕴涵它们的无穷析取式了。

子断言的证明：任取 $\mathfrak{N}$ 为 $\Phi_0(x_0)$，$R_1\,x_0\,x_1$，$\Phi_1(x_1)$，$\cdots R_n\,x_{n-1}\,x_n$，$\Phi_n(x_n)$，Px_n 的模型，设分别赋给 x_j 的元素为 ν_j，$j=0\cdots n$，这样 $\nu_0\cdots\nu_n$ 为一条路径，以 ν（$=\nu_0$）为起点，以 v_n 为终点。类似于模态公式对互模拟不变之保持性定理的一个证明中所处理的那样（请参看［van Benthem. 1991］），我们可以不失一般性地假设：

（i）$\mathfrak{M}'$与 $\mathfrak{N}$ 都是 w 饱和模型；

（因为我们仅处理一阶公式）

（ii）$\mathfrak{M}'$与 $\mathfrak{N}$ 都是不传递的树，这可以通过某“解开互模拟”而得。

（因为我们仅处理模态公式）

我们可以画出这两个模型的示意图（见图 6-1），每个模型带有一个 $n+1$ 长的独特的路径，因为其他部分都是从这个独特子树分叉出去的不相交的子树，并且不影响我们的分析，因此粗略表示之：

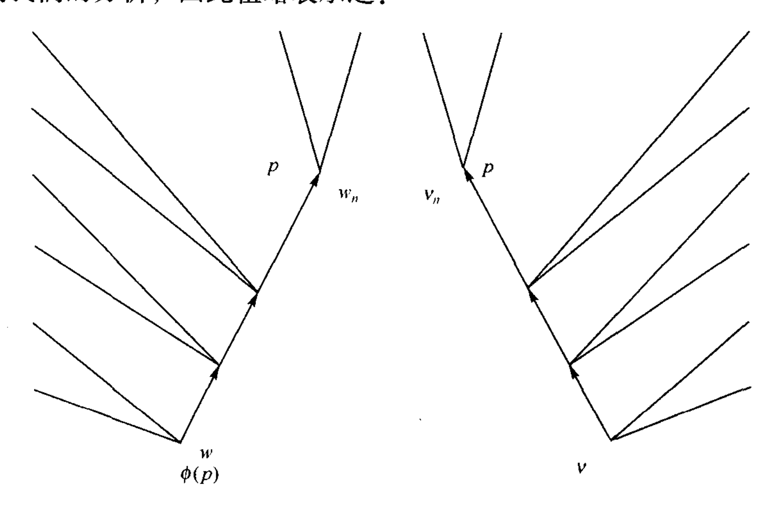


图 6-1

进而，$\mathfrak{M}'$、$\mathfrak{N}$ 的状态间的如下规定：

$$x \equiv u \quad \text{当且仅当} \quad \mathfrak{M}', x \text{ 与 } \mathfrak{N}, u \text{ 使 } L \text{ 模态公式同真假}$$

定义了 $\mathfrak{M}'$、$\mathfrak{N}$ 间的一个 L 互模拟关系。这可以由饱和模型上通常的 Z 字形论证表明——如在模态不变定理的证明中的那样。特别地，由 Φ_i 的定义，我们可知，这一规定匹配了上面这两个特别的路径上相应的点。现在，我们希望它们的这种互模拟关系还能扩展为（$L+P$）互模拟关系，这里 P 为与原子命题 p 对应的一元谓词。若如此，那么通过（$L+P$）互模拟，由 $\phi(p)$ 在 w 上真就可得其

在 v 上也真。为此，我们对加标转换系统的图做一点几何上合理的重组，以使对前面给定路径上的点，与其有互模拟关系的点唯一（特别地，w_n 仅与 v_n 对应），同时，左右两边各模型的子树也只留下相匹配的部分。

不失一般地，我们不妨假设在两棵树上，只在同层次的点间建立有互模拟关系（实际上，把不在同一层次上的点间的互模拟关系删去不会改变互模拟性）。我们重组的主要步骤是，从 w_1，v_1 开始，沿着这（两条）特别的支向上，直到路径上的点都处理完成后重组结束。就如以往对可能世界语义的讨论，画一点图总是有助于我们直观地了解处理的过程：

（1a）我们以匹配 w_1，v_1 开始。如下图 6-2 所示，设 w_1 与 $\mathfrak{N}$ 中在同一层的另一点有互模拟关系：

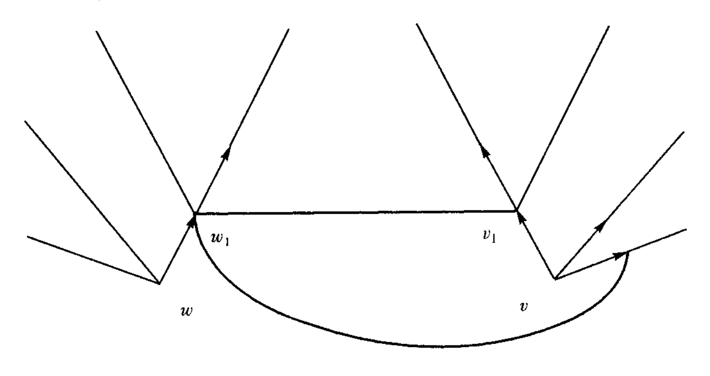


图 6-2

然后就如下来拆开树：在左边复制子树 T 及 w_1，并将之与根 w 相连，将 w_1 右边的原先的配对与它的复制 w'_1 相配（图中向上相关的关系后继亦是如此处理）。改造的结果如图 6-3：

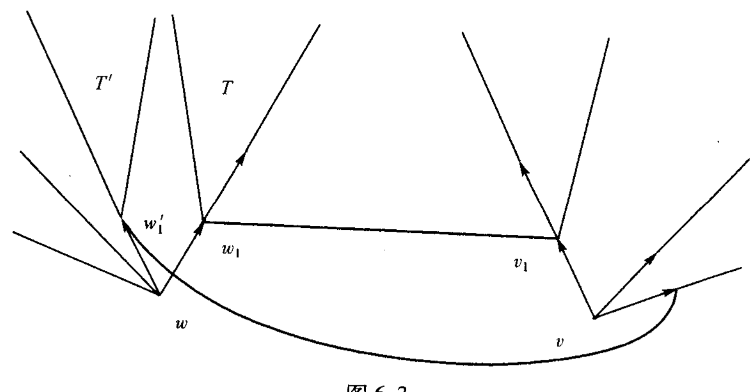


图 6-3

易验证，左边扩展后的模型与右边的 $\mathfrak{N}$ 仍有 L 互模拟关系，并且，它与原来的 $\mathfrak{M}$ 也是 L 互模拟的，因为互模拟可传递。但是，要注意到新的问题出来了——因为在扩展的模型中增加了 w_n 的副本，在其上 p 也真，这是我们不希望看到的。幸运的是，我们可以再次利用连续性向下的部分，使 p 只在其中一处真，而不改变 $\phi(p)$ 在 w 处的真值。这样，又由于 T' 与 T 同构，我们依然可以设 p 在 w_n 真。

（1b）类似地，如图 6-4 中[①] v_1 与 $w_1{}'$间的关系也能被消去，自然还是要涉及增加副本，但是，不必再为精简 p 真世界而作特别地处理了。

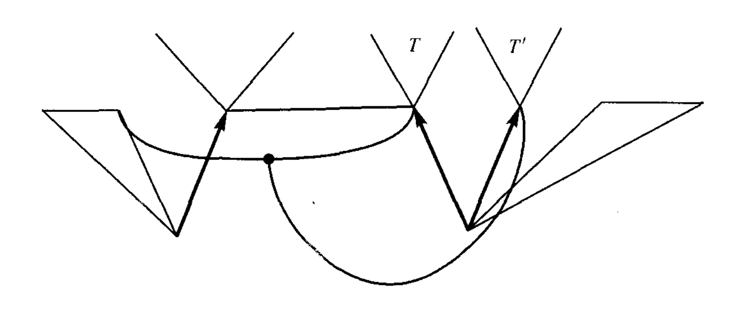


图 6-4

（2）上面两个步骤的作用是使 w_1 只与 v_1 有关系，反之亦然。——然后，我们在路径向上重复这两个步骤，直到处理完 w_n 与 v_n，使它们唯一相互有关系。

现在，令 $\mathfrak{M}^*$ 为左边最终扩展得到的模型（如前所述，在该模型中 p 只在 w_n 真），令 $\mathfrak{N}^*$ 为右边相应之扩展模型，p 也只在 v_n 真。我们记 $\mathfrak{N}^+$ 为初步处理后得到的扩展模型，注意，在 $\mathfrak{N}^+$ 上 p 可能在好几处真。依我们的处理方法可知，$\mathfrak{N}^*$ 与 $\mathfrak{M}^*(L+P)$[②] 互模拟，其中 w 与 v 有互模拟关系。现在终于到达了我们论证的最后部分，如下所示，我们这样在模型间传递 $\phi(p)$ 的值：

· $\phi(p)$ 仍在 $\mathfrak{M}^*$ 的 w 上真（由构造方法保证）；

· 又 $\mathfrak{N}^*$ 与 $\mathfrak{M}^*(L+P)$ 互模拟，则由 $\phi(p)$ 在 w 上真得它也在 v 上真；

· 再由向上的单调性（连续性的这一面到现在才得以应用）得，$\phi(p)$ 在 $\mathfrak{N}^+$ 的 v 上也真；

· 最后，再次由（$L+P$）互模拟，我们得 $\phi(p)$ 在 $\mathfrak{N}$ 的 v 上真，这正是我们想要的。 ■

① 疑原图有误——译者注。

② 原文为 $\mathfrak{M}$，有误——译者注。

6.3　安全定理的证明

上面我们得到了连续性的语形刻画，下面就可借之证明我们的主要结果。分几步述之。

已给的运算都对互模拟安全

（1）据我们早先的分析，前面提及的几个运算都对互模拟安全。这里以两例示此说不虚。一是复合，设 C 为 $\mathfrak{M}_1$、$\mathfrak{M}_2$ 间的互模拟，在 $\mathfrak{M}_1$ 中 $xR;Sy$，且 xCu，u 自然在 $\mathfrak{M}_2$ 中。那么在 $\mathfrak{M}_1$ 中有 z 使得 xRz 并且 zSy，然后，由 C 对 R 为互模拟，因此有 v 在 $\mathfrak{M}_2$ 中使得 uRv 并且 zCv；又 C 对 S 为互模拟，同理有 w 在 $\mathfrak{M}_2$ 中使得 vSw 并且 yCw，w 即 u 在 $\mathfrak{M}_2$ 中的一个 $R;S$ 后继。互模拟的后向条件也同样可验得，因此 C 对 $R;S$ 还为互模拟，即；对 C 安全。第二个是反域，设在 $\mathfrak{M}_1$ 中 $x\sim(R)y$：即 $x=y$ 且 x 无 R 后继；设在 $\mathfrak{M}_2$ 中 xCu。若 u 在 $\mathfrak{M}_2$ 中有 R 后继，则由 C 对 R 为互模拟得 x 在 $\mathfrak{M}_1$ 中也有 R 后继，矛盾，因此 $u\sim(R)u$。

安全在扩展过程中保持

（2）接下来，我们设 $\theta(x,y)$ 为语言 L 中对互模拟安全的一阶运算。需要注意到，对互模拟不变是与语言有关的概念：关键的是，互模拟是否对于原子的二元关系往返了，并且其状态匹配是否反映了相关的一元谓词。下面，我们在语言 L 中增添一个新的一元谓词 P。

声明 2　公式 $\exists y(\theta(x,y)\wedge Py)$ 对 $(L+P)$ 互模拟不变。

证明：由 $(L+P)$ 互模拟仍然是 L 互模拟及 θ 对 L 互模拟安全即可得所求。

■

（3）据前面提到的模态公式的特征[①]我们知，$\exists y(\theta(x,y)\wedge Py)$ 必对应于某个模态公式 $\phi(p)$，而且由 $\exists y(\theta(x,y)\wedge Py)$ 之形式也见 $\phi(p)$ 在 p 连续。但是，这样，根据前面关于连续性的结果，我们就得 $\phi(p)$ 等价于下面形式公式的析取式：

$$\alpha_0\wedge\langle a_1\rangle(\alpha_1\wedge\cdots\wedge\langle a_n\rangle(\alpha_n\wedge p)\cdots)$$

其中各 α_i 中不出现变元 p。

现在，我们可直接验证得到下面的命题：

声明 3　θ 可由下面形式关系的并定义：

① 即“模态语言恰为相应一阶语言的互模拟不变片段”——译者注。

$$(\alpha_0)?;\ a_1;\ (\alpha_1)?;\ \cdots;\ a_n;\ (\alpha_n)?$$

（4）最后，我们还可以去掉那些看起来复杂的模态测试运算：

声明4 所有复杂的模态测试运算$(\phi)?$都能归约为由原子关系及简单测试，只用正则运算；与～构造得到的形式。

证明：我们可以利用下面的等价将测试运算向内层推来得到断定：

$(\phi \wedge \psi)? = (\phi)?;(\psi)?$ $(\neg \phi)? = \sim(\phi)?$ $(\langle a\rangle\phi)? = \sim\sim(\alpha;(\phi)?)$ ■

6.4 变异及扩展

6.4.1 安全定理的其他证法

模态安全定理最早出现在4年前的一个预印本中（[van Benthem. 1993B]）。其间，霍伦勃（M. Hollenberg）给出过上面证明的一个简化的版本（请参看[Hollenberg. 1997]）。我们关于连续模态公式$\phi(p)$的保持定理证明中的关键步骤是，比较两个带有特定路径的模型，直到某个p世界。这两个模型是通过连续的改变模型得到的（其中包括反复使用紧致性定理、模态树分拆方法、及“w复制”）。但是，实际上，只使用所谓的“2-分拆”这样一种标准的树分拆方法就已经足够了。也就是，这种分拆方法仅给每个原来的节点以两个副本。同时，我们也仅需以语形复杂度下降的次序维护给定路径上点间的模态等价（在根处，我们需要使模态度等于ϕ的模态度的公式在两根上同真假——但是，随着向路径的高处移，所需顾及的公式的模态度也逐渐下降，直到降为零）。因而，可以修改上面的论证，只用及有穷的模态埃伦芬赫特博弈，而不必使用紧致性定理。正是以这种方式，霍伦勃得到有穷模型上的模态安全定理——他的证明因循了[Rosen. 1995]中构造性的博弈方法。我们还要提一下，也是罗森（Rosen）最早给出了最初模态不变定理自然的“有穷模型版本”。

显然，安全定理推广了模态不变定理，其中每个不变的公式唯一对应到一个对互模拟安全的测试程序。正是从这种思路出发，[Hollenberg. 1996]得到一个关于任意有穷元的一阶关系运算的更一般的保持性结果，它将不变与安全结合了起来，得到的结果是一个用于描述程序运算的表达力极强的模态一阶语言。

6.4.2 无穷版本

上面的分析，我们都被限制在一阶可定义的程序运算中进行。但是，许多有用的程序构造都涉及无穷运算，它们通常在$L_{\infty\omega}$可定义，这里$L_{\infty\omega}$是在一阶逻辑

上加上无穷析取而得。无穷运算的例子有克里尼迭代运算，一般递归不动点运算 $\mu p \cdot \phi(p)$，这里要求 ϕ 在 p 单调（由无穷析取“展开”，这种不动点总是有确切的解）。可以修改前面几节中的方法以在某种程度上适用这里的情形。下面，我们给出一个概要的思路。

定理 4　在互模拟下不变的 $L_{\infty\omega}$ 公式恰为经由任意析取、合取得到的无穷模态公式。

证明： 我们这里沿用［van Benthem & Bergstra. 1995］中证明无穷语言 $L_{\omega_1 \omega}$ 不变定理所使用的方法——这样可以避免使用紧致性定理及饱和概念。易见（以显然的方式定义的）无穷模态公式都是互模拟不变的。因此我们只需要来看反方向。设对 $L_{\infty\omega}$ 公式 $\phi(x)$ 无等价的模态公式，我们需要构造两个模型 $\mathfrak{M}$、$\mathfrak{N}$，它们之间具有互模拟 E，而且有如下关联：aEb 并且 $\mathfrak{M} \models \phi(a)$，$\mathfrak{N} \models \neg\phi(b)$。而这将拒斥互模拟不变。一种方法是用所谓的良三元组 A、Σ、Δ 来构造我们的反例，这里 A 表示互模拟，Σ、Δ 分别表示模型 $\mathfrak{M}$ 与 $\mathfrak{N}$。在正式讨论之前，我们先介绍一些辅助的定义。

（i）变元集 X 上的扩展的模态公式是指这样的 $L_{\infty\omega}$ 公式，它们由一元原子公式 Px（这里要求 $x \in X$），经布尔运算（有穷无穷皆可）及存在模态量词 $\exists y(Rxy \wedge [y/u]\psi)$（这里 x、u 都须在 X 中）构造得到（实际上，我们可以找到这些公式的更明了的范式，但我们不需要这一点）。若 $|X| = 1$，它们即为通常的无穷模态公式；

（ii）为了便于讨论，我们假设内推至原子，只剩下 $\wedge$，$\vee$，$\forall$，$\exists$；

（iii）令 $\mu = \max(\aleph_0, |TC(\neg\phi)|)$，这里 $TC(\neg\phi)$ 为 $\neg\phi$ 的传递闭包（除了其他的以外），它包含 $\neg\phi$ 的所有无穷子公式；

（iv）选取两个不交的新常量集 C、D，它们的基数均为 μ^+（它自然是一个正则基数），这样，所有的公式将为 $\neg\phi$ 的子公式的 C 或 D 代入实例。X 上扩展的模态公式集的基数仍然为 μ^+（因为每个 $L_{\infty\omega}$ 公式只有有穷个自由变元）。

（v）称公式集 Σ、Δ 对 A 模态不可分，若无（基数小于 μ^+ 的）变元集 X 上的扩展的模态公式 α 使得，$\Sigma \models \alpha(c)$ 并且 $\Delta \models \neg\alpha(d)$ ——对 C 与 D 的子集 c、d，其中相对应的对 c/x、d/x 在 A 中有原子 $cE\,d$。

（vi）称 A、Σ、Δ 为良三元组，若它们满足：每个集的基数小于 μ^+；A 由互模拟原子 $cE\,d$ 组成；Σ、Δ 由常量分别取于 C、D 的公式组成；并且 Σ、Δ 对 A 模态不可分。所有的良三元组组成了一个集合。

下面，我们给出关于良三元组的一些闭性质。其中第一个是我们在用无穷“一致性质”来描述模型的一致图时所熟悉的（详细请参看［Keisler. 1971］）。

下面的作法非常类似于那种思路，因而我们这里省略了具体的论证。设 A、Σ、Δ 为一个良三元组。

· 将Σ中无穷合取公式的合取支放入Σ，仍然得到良三元组，对Δ同样处理也如此（这种处理不影响不可分性，也仍然使增加公式后的Σ、Δ的基数小于μ^+）。

· 对Σ中的全称公式ϕ，取C中已在Σ出现的常量作ϕ的代入实例，将这些实例放入Σ，仍然得到良三元组，对Δ同样处理也如此。

· 对Σ中的每一析取无穷公式ϕ，至少有ϕ的一个析取支，放入Σ仍然得到良三元组，对Δ同样处理也如此（如果每一个析取支在扩展的三元组中都导致可分，那么ϕ本身在原来的三元组就会导致可分。这里，我们需要使用扩展的模态公式，因为涉及的常量可能不同。同时，对于各个析取支选取不交的变元集也须留意）。

· 对Σ中的量化存在公式ϕ，可取C中不在Σ与A中出现过的新常量c作ϕ的代入实例，将该实例放入Σ，仍然得到良三元组，对Δ同样处理也如此（注意这种新常量不会引发可分，因为不在A中出现过，因此在A中还无它参与互模拟的记录）。

下面的要求保证了使E作为互模拟的原子条件及Z字形条件成立：

· 若$cEd \in A$ & $Pc \in \Sigma$，那么A、Σ、$\Delta \cup \{Pd\}$还是良三元组（若模态公式α分离Σ与$\Delta \cup \{Pd\}$，那么$Px \wedge \alpha$就已分离Σ、Δ）。反之对Δ亦然。

· 若$cEd \in A$ & $Rcc' \in \Sigma$，那么有不在A、Σ、Δ中出现过的$d' \in D$使得，$A \cup \{c'Ed'\}$、Σ、$\Delta \cup \{Rdd'\}$仍为良三元组。反之对Δ亦然（若模态公式α分离Σ与$\Delta \cup \{Rdd'\}$，那么$\Diamond_x \alpha$也已分离原来的Σ、Δ）。

最后，我们来完成模型的构造。我们以“公平的安排”枚举出所有要处理的“要求”。每个要求都为C-公式或者D-公式，它们需要在$\mathfrak{M}(\mathfrak{N})$上被验证成立，或经适当的互模拟关系及$R$后继在相对应的模型上被匹配。（通过简单的基数计算）我们知道要求总数为μ^+——因此我们可以这样枚举它们：T_α（$\alpha < \mu^+$），使得每个要求出现在μ^+中无上界，即其下标的序列与μ^+共尾。现在，我们要从下面的三元组出发，对应构造一个良三元组的序列，

$$\{cEd\}, \{\phi(c)\}, \{\neg \phi(d)\}$$

我们的初始三元组自然是良的，因为若$\{\phi(c)\}$、$\{\neg \phi(d)\}$对$\{cEd\}$模态可分，那么可得ϕ模态可定义，与我们的假设矛盾。我们取所有前面三元组的对应指标/坐标之并，并通过上面的闭性质，根据安排的任务（如果相关的话）加入一些公式。记最后得到的三元组为A^*、Σ^*、Δ^*，它仍然为良的。这样就得到

我们的模型 $\mathfrak{M}$、$\mathfrak{N}$（它们的论域分别由在Σ^*、Δ^*中出现的 C、D 常元组成，论域中世界间的关系分别符合Σ^*、Δ^*的描述）及它们间的关系 E，即 A^*。易归纳证得下面成立：

· C-公式在Σ^*中 当且仅当 它在 $\mathfrak{M}$ 上真；D-公式在Δ^*中当且仅当 它在 $\mathfrak{N}$ 上真

· E 为 $\mathfrak{M}$、$\mathfrak{N}$ 间的互模拟 ■

这是一个繁重的证明。如果将整个证明详细写出来，那将会非常繁复（对于一些附带的结果，可参看文献 [van Benthem. 1997A]）。 [Barwise & van Benthem. 1999] 中给出了这个无穷模态不变定理更为优雅的证明，其中使用了林斯特龙式的论证，其关键之处涉及所谓的 $L_{\infty\omega}$的有界定理。有界定理起到常规证明中紧致性定理的作用（有意思的是，这种分析也自然而然导得内插定理——并且，模态不变定理成为更一般的“互模拟下不变”的一个特例)。特别地，[van Benthem. 1997B] 中给出了我们安全定理的无穷版本：

定理5 在 $L_{\infty\omega}$中可定义的关系运算 $O(R_1, \cdots, R_n)$ 对互模拟安全当且仅当它能由原子关系 $R_a xy$、原子测试 (q)? 仅使用三个运算;、~及∪定义。这里 q 为我们模型中的命题原子，∪可以是无穷并。

在可数无穷语言 $L_{\omega_1\omega}$上也有不变定理与安全定理（请参看 [Keisler. 1971; van Benthem. 1991; van Benthem & Bergstra. 1995]）但是，欲将这样的结果推广到无穷程序构造运算时仍然会遇到实质性的问题。我们可以反思，什么样的语义性质使得正则运算对互模拟安全？认为安全要求划出了恰当程序运算的语义域或许是一种合理的看法。从这个角度来看，无穷并运算也是自然的——但是，当限制于μ 运算或者其他正则运算时则在这个语义域内提出了一个出于不同目的的子层次。它是出于计算复杂性的另外考虑。

还有一种做法是由 G. 雷纳德（Gerard Renardel）(p. c.) 提出的。他的思路是将注意力限制在 $L_{\omega_1\omega}$的某一个恰当的能行片段上，然后视（在技术上也证明）正则运算为在该片段可定义的对互模拟安全的运算，当进一步强调“可计算性”时，则把无穷运算限于能由不动点运算显定义的那部分。这一策略的一个优雅的示例是所谓的模态“μ 演算”，即带有上面所提的一元不动点运算的模态逻辑。[Janin & Walukiewicz. 1996] 中给出过这样一个模态不变定理：一元二阶逻辑中一个公式在互模拟下不变当且仅当它能在 μ 演算中定义。博士论文 [Hollenberg. 1997] 则给出了对应的安全定理。

6.4.3 带状态参数的不变定理与安全定理

对我们的结果作如下的一点改进将在几个应用中有用。

例如，在关于进程逻辑的文献中，加标转换系统通常特别指定一个点 s_0 作为其“根”，意为整个进程的初始状态：

$$(S,\ \{R_a \mid a \in A\},\ s_0)$$

这样，我们需要对“互模拟”的定义做一点修改，增加关于根的条件。前面的结果也可以扩展到这种情况。自然，在推广结果之前，我们需要引入新的概念及做一点调整。首先，我们要在原来的模态语言上增加一个算子 $GOTO_{root}$，它相当于“复位”至根：

$$\mathfrak{M},\ s \models GOTO_{root}\phi \quad 当且仅当 \quad \mathfrak{M},\ s_0 \models \phi$$

一些显然有效的交换原则允许一些范式，支配着这个算子的使用（参考时序逻辑中的“现在”算子）。对前面不变定理的证明稍作修改就能得到该扩展模态语言上相应的结果：

定理 6　描述加标转换系统的一阶语言中的公式 $\phi(x)$ 对“根-根”互模拟不变当且仅当它在增加 $GOTO_{root}$ 的模态语言上模态可定义的。

新的公式或许还能用来使两根有相同的模态型，从而使它们有互模拟关系。下面我们来考虑安全定理，其中的关键之处在于增加下面的二元关系“根复位”，它对“根-根”互模拟安全：

$$\lambda xy \cdot y = s_0$$

该关系自然对应于运算 $GOTO_{root}$。并且早先的论证对它也能成立，这就使 6.2 的连续引理中的关键步骤对“根-根”互模拟依然可行。这样，在作必要修改后，我们得到：

定理 7　一个一阶关系运算 $O(R_1,\ \cdots,\ R_n)$ 对“根-根”互模拟安全当且仅当它能由原子关系 $R_a xy$、根复位及原子测试 $(q)?$ 使用三个运算;、~及∪构造得到。这里 q 为原子命题。

在加标转换系统中，当更远的状态成为特定的参数时，这些结果也可以推广到这样的情形中，而且在我们的互模拟中会导出另外的固定的联系。在这种情形中，像上面为根所做的那样，我们对每个选定的状态 y 引入一个模态算子 $GOTO_y$ 及相应的一个复位关系 RES_y。

6.4.4　进程代数及对互模拟尊重

我们前面的分析都限于加标转换系统的“内在”描述语言，模态命题只考虑单独的状态，以及动态程序仅涉及状态间的转移。但是在进程代数的文献中一般是以“外部”的方式描述从原有的 LTS 构造新 LTS 的运算（参考 [Milner. 1980]）。比如运算“加前缀”，它是在一个进程 Y 增加一个新的根，并

且将它与 Y 的根通过一个 a-箭头连起来，从而从 Y 得到新进程 $X = aY$；又如“选择”，它通过下述方法从 Y，Z 得到一个进程/程序 $X = Y + Z$：增加一个新的根，并令它（X）有从 Y，Z 的根的原来的所有转换。更复杂的 LTS 构造有一个层次，象乘积、不同形式的并行融合及以递归方式定义的运算。在这些情况下都仍可谈论安全问题。对进程-代数运算 O 的一个普遍约束是所谓的“对互模拟尊重”。称运算 O 对互模拟尊重，若由 Y 与 Y'，Z 与 Z'，…有互模拟关系可得 $O(Y, Z, \cdots)$ 与 $O(Y', Z', \cdots)$ 有互模拟关系。实际上，这里还有更强的直观在起作用：

“讨论所给的任一列互模拟都能被以统一的方式转化为关于 LTS 运算值的互模拟。”

我们在这里可以推广早先的分析，依赖于对“统一”的理解，提出不同层次的安全概念。对安全的语形刻画总会引入各种不同的进程-代数运算的定义（在［van Benthem. 1993A］对这种“逻辑空间”有更深入的讨论，其中包括了关于外延的 LTS 运算的一种模态逻辑）。我们这里只介绍一个局部的结果。对于加前缀与选择的代数运算，我们或许可以将进程视为状态（代表它们的整个“生成子模型”），在纯 LTS 框架内分析它们。这时，对一个新的代数运算 $x = O(y, z, \cdots)$ 的定义涉及一个规定：对于每个原子行为 R_a，这个新的根 x 将有哪些后继出现。例如，我们有

加前缀	$R_a xu := u = y$	
	$R_b xu := \bot$	对所有 $b \neq a$；
选择	$R_a xu := R_a yu \vee R_a zu$	对所有原子动作 a。

我们称以 $R_a xu := \delta_a(u, y, z, \cdots)$ 形式一阶可定义的运算为*初等的运算*。因此，加前缀与选择这两个简单的进程运算都是初等的，实际上它们还都

对互模拟尊重

“当只是增加两个新根间的关系时，自变元上的每个互模拟自动成为一个值域上的模拟。”

并不是所有的运算都如此，对给定这个新的根，其自变元根的所有后继的交（而不是并）就不尊重互模拟。现在，（带参数）安全定理刻画了这种形式的代数运算。

定理 8 对互模拟尊重的初等进程运算恰为能以 $R_a xu := \delta_a(y, u)$ 形式定义的运算。其中 $\delta_a(s, u)$ 为一个安全运算的语形描述，允许以 y（替代其中第一个自变元 s），u 为自变元的跳转关系。

证明：对⇐方向，易见这些形式定义了严格安全（从而对互模拟尊重）的运算；而⇒方向，我们还需要一个技术性的结果，它的直观意思是给定某个固定

的 x，被 u 所满足的一元谓词在互模拟下有一个明显的“Z 字形行为”：

断言 定义模式 δ 定义一个严格安全的运算当且仅当关系 $\lambda su \cdot \delta(u, y, z, \cdots)$（即“跳转到新根的一个后继”）在我们原来的意义上对互模拟安全，其还保持原来的参数形式，对相关的自变元根 y，z，…，它含有特定的状态。 ■

现在我们又可以借助前面的安全定理，以其带参数的形式，来详尽描述各个操作。此外，因为上面介绍的关系不依赖于其第一个参数，我们也可以把所得的定义模式 $\delta(s, u)$ 中的第一个变元替代为任意的参数（比如 y），这样就可得到所求的定义形式。 ■

易见加前缀运算与选择运算确实都符合上面的描述：

$$u = y \qquad [y/s]RES_y$$

$$R_a yu \vee R_a zu \qquad [y/s]((RES_y;a) \cup (RES_z;a))$$

而对于操作“交”，则由于其定义需用到一个不可归约的合取，因此不属于这一范围。

相对于涵盖范围更广的进程-代数运算分类，上面简单的语形描述还只是第一步。特别地，那种分类还可能涉及从原有的状态构造新的状态，这时往往要应用有序对或者序列。如此一来，更复杂的新的转换关系，如并行融合等，也可以定义了。作为对本文及未发表的后作［van Benthem. 1993A；1993B］的响应，［Hollenberg. 1995A；1997］中提出了一系列值得注意的扩充与改进。他推广了以上安全和尊重互模拟概念及它们相应的模态可定义性到一阶语言上，这种一阶语言处理对象组，对象组的长度可达所谓的“乘积结构”上某个固定的值。而且，他也证明了非常一般的分类定理。同时，这种推广的定义能覆盖所有的 ACP 进程-代数运算——此外，霍伦勃文章的处理方法及结果本身就有其模态和模型论意趣。

6.4.5 不变、安全及逻辑性

对互模拟安全蕴涵了直观之“逻辑性”的、诸如个体域“对置换不变”这样一些为众所知的语义约束条件。实际上，本文的分析方式暗示了一种从更一般的观点来看各逻辑运算，如在由几类等同的概念（互模拟、潜同构，同构，……）建立的语义框架内考虑可计算性。［van Benthem. 1996］的第 5 章中把逻辑常量视为进程运算，并对之做了一般地讨论。其中的一个成果是发现了对互模拟安全处在这样视角下的语义不变谱系中的一端。

致谢

我首先要感谢在阿姆斯特丹与斯坦福召开的各种逻辑讨论会的与会者，他们对本文所讨论的主题颇有兴趣。我也要感谢 ASL 1994 年克莱蒙 - 费朗逻辑讨论会的与会者——特别是该次会议卓越的组织者，理查德（Denis Richard）与托马斯克（Jacek Tomasik）。后来，在布拉格的 ESSLLI 暑期学校我的“动态逻辑”班上的几位学员也给了我帮助与鼓舞。更技术的方面，莫斯（Larry Moss）与巴威思（Jon Barwise）使我了解到模态与动态逻辑的无穷扩张的许多关键事实。最后，我要提到，从乌特兹的两位非常有创造力的同事那里我学到了许多，他们是维施尔（Albert Visser）和霍伦勃（Marco Hollenberg）——他的即将出版的博士论文将所有上述思想发展得更深也更广了——这一点在当前最新的 6.4 中是非常显然的。

参考文献

Barwise J, van Benthem J. 1999. Interpolation, preservation, and pebble games. *Journal of Symbolic Logic* 64, 881 ~ 903

Chang C C, Keisler H J. 1973. *Model Theory.* Amsterdam: North-Holland

Harel D. 1984. Dynamic Logic. // Gabbay D, Guenthner F, eds. *Handbook of Philosophical Logic.* Vol. II. Dordrecht: Reidel

Hollenberg M. 1995A. Bisimulation respecting first-order operations. Logic Group Preprint Series 156. Department of Philosophy, University of Utrecht

Hollenberg M. 1995B. Bisimulation safety over finite models. Manuscript. Department of Philosophy, University of Utrecht

Hollenberg M. 1996. Generalized safety for bisimulation // Dekker P, Stokhof M, eds. *Proceedings Tenth Amsterdam Colloquium.* ILLC, University of Amsterdam

Hollenberg M. 1997. *Modal Logic and Process Algebra.* PhD thesis. Philosophical Institute, Rijksuniversiteit Utrecht

Janin D, Walukiewicz I. 1996. On the expressive completeness of the propositional μ-calculus with respect to monadic second-order logic. Department of Mathematics and Informatics, University of Bordeaux & Department of Computer Science, Aarhus University. Official version in *Proceedings CONCUR' 96*: Concurrency Theory, 7th International Conference

Keisler H J. 1971. *Model Theory for Infinitary Languages.* Amsterdam: North-Holland

Milner R. 1980. *A Calculus of Communicating Systems.* Berlin: Springer

Park D. 1981. Concurrency and automata on infinite sequences. // *Proceedings 5th GI Conference.* Berlin: Springer: 167 ~ 183

Rosen E. 1995. Modal logic over finite structures. Tech Report ML-95-08. ILLC, University of Am-

sterdam. Official version, 1997. *Journal of Logic, Language and Information*, 6: 427 ~ 439

van Benthem J, Bergstra J. 1995. Logic of transition systems. *Journal of Logic, Language and Information*, 3: 247 ~ 283

van Benthem J. 1976. *Modal Correspondence Theory.* PhD thesis. Mathematical Institute, University of Amsterdam

van Benthem J. 1984. Correspondence theory. // Gabbay D, Guenthner F, eds. *Handbook of Philosophical Logic.* Vol. II. Dordrecht: Reidel: 167 ~ 247

van Benthem J. 1986. *Essays in Logical Semantics.* Studies in Linguistics and Philosophy, Vol. 29. Dordrecht: Reidel

van Benthem J. 1991. *Language in Action. Categorie, Lambdas and Dynamic Logic.* Studies in Logic, Vol. 130. Amsterdam: North-Holland

van Benthem J. 1993A. A modal perspective on process operations. Manuscript. ILLC, University of Amsterdam

van Benthem J. 1993B. Programming operations that are safe for bisimulation. Tech Report 93 ~ 179. Center for Study of Language and Information, Stanford University. Final version 1998. *Studia Logica*, 60: 311 ~ 330

van Benthem J. 1996. *Exploring Logical Dynamics.* Stanford: CSLI Publications

van Benthem J. 1995. Logic and the flow of information. // Prawitz D, Skyrms B, Westerståhl D, eds. *Proceedings 9th International Congress of Logic, Methodology, and Philosophy of Science. Uppsala* 1993, Amsterdam: Elsevier Science Publishers: 693 ~ 724

van Benthem J. 1997A. Dynamic bits and pieces. Tech Report LP-97-01. ILLC, University of Amsterdam

van Benthem J. 1997B. Modality, bisimulation and interpolation in infinitely logic. // Final version, 1999. *Annals of Pure and Applied Logic*, 96: 29 ~ 41



第3部分

模态逻辑和信息



除了进程的观点，另一主要的对模态逻辑的当代解释在信息和知识方面。依据这种观点，可能世界是实际情形的可能状态：例如，纸牌博弈中不同的可能分派。玩家关于事实和其他人的信息已经以一种整体的方式体现在世界间的可及关系模式中了。这个领域就是关于知识的认知逻辑、关于信念的信念逻辑、条件句逻辑和表示主体的所谓的“命题态度”的逻辑系统。这些逻辑的现代形式的一个典型特征是*多-主体性*。逻辑不再是关于孤独的推理者和思考者，而是关于互动的主体，随着时间的流逝他们在交谈、对话和进行一般的互动。这体现在一些关于群体知识的概念中，例如“共同”知识或“分布式”知识，或其他形式的共享知识。但是这个领域的研究受到了前面提到的进程逻辑的影响，实际上，它也经历了所谓的“动态转向”，把认知行为放在了逻辑系统的核心位置。可以说，信息的现代模态逻辑是*动态的*，也是*社会的*。例如，我们不仅要描述知识是什么，而且要描述知识是如何获得的和修正的。感兴趣的读者可以参考我的论文“认知逻辑与认识论之研究现状”［van Benthem. 2006］，这篇文章对这一主题是如何影响哲学认识论的做了进一步的解释。这一部分选取的论文则主要关注逻辑的技术层面。

第一篇论文“‘人的存在并非是孤立的’：逻辑与交流”是2002年在法国的明斯特举行的欧洲逻辑讨论会上的一个邀请发言。它阐述了认知逻辑的“动态化”形式如何实现。它提出了动态认知逻辑的基本想法：信息更新是在认知模型及其可及关系中系统的变化，一个匹配的基于互模拟的模型论，通过归约公理证明完全性的关键技巧——这些技巧在20世纪90年代被普拉热（Plaza），赫布兰第（Gerbrandy），巴塔赫（Baltag），莫斯（Moss），斯莱兹克（Solecki），和范迪特玛施（van Ditmarsch）等人提出并发展。这一研究纲领经常与“荷兰学派”联系在一起（这里的“荷兰”是一个广义术语，包括罗马尼亚人、美国人和一些中国同事）许多早期的技术领域重新回到舞台上来，例如运用模态不动点逻辑。有的读者曾经说，这篇文章正确的题目应当是一首三条狗-夜晚的流行歌曲“你知道一是一个孤独的数字”（他们说得没错）。对于那些对更多问题感兴趣的读者，也许可以参考［van Benthem, van Eijck & Kooi. 2006］，那里有迄今为止最为复杂的系统。

最近，这一动态认知纲领已经被推广到为其他重要的现象提供新的模态解释。特别是，在第二篇论文中“信念修正的动态逻辑”中，我用它来处理信念修正（认知行为的另一重要主题）。顺便说一句，这篇论文是为2005年爱丁堡的欧洲逻辑、语言和信息暑期学院的一个会议所撰写的。它说明了如何为信念修正

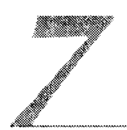
策略提供完全的公理化，这里，信息修正可以看做是改变认知-信念模型的似乎合理性关系的指令，文章利用所谓的条件信念来解决臭名昭著的“迭代问题”。论文展示了如何使用我们在前面部分中提到的模态对应技巧来分析一般的*AGM*-形式的公设。这里的数学背景是更为一般的关系变化，而且，动态逻辑描述了模型的系统变化。

最后的一篇论文是与刘奋荣合作的，写于2005年，表明动态转向影响理性主体的每个方面，不仅仅是他们的认知和信念的态度，而且他们对世界的价值评价，从而影响他们的目标-趋向的行为。“偏好升级的动态逻辑”，发表在《应用的非经典逻辑杂志》（Journal of Applied Non-Classical Logic）上，表明了我们可以采用与模拟信息更新和信念修正同样的方式模拟改变偏好的事件。这一系统与理性主体如何根据新信息安排他们的行为活动，改变他们的目标和在世界中的物理变化，非常接近。

参考文献

van Benthem J. 2006. Epistemic Logic and Epistemology. *Philosophical Studies*, 128: 49 ~ 76

van Benthem J, van Eijck J, Kooi B. 2006. Logics of Communication and Change. *Information and Computation*, 204: 1620 ~ 1662



"人的存在并非是孤立的"：逻辑与交流*

郭美云，崔建英/译　郭佳宏/校

7.1　社会生活中的逻辑

7.1.1　提问和回答

我们来看一个最简单的交流行动：两个主体之间的问与答。比如，在公元 180 年，我打算去营救沦为格斗士的前任将军迈克西马斯。在一条热闹的古罗马街道上遇到你，我问：

Q 这条路是通往罗马圆形大剧场的路吗？

作为一个见多识广且乐善好施的罗马人，你诚实回答道：

A 是的。

这是我们生活中司空见惯的事，并没有什么特别的。但是，通过交流我认识到这条路是通往罗马圆形大剧场的。并且，通过它我传递给你的信息是：我不知道这条路是否通往罗马圆形大剧场，并且我认为你可能知道答案。在你什么都没说之前，这些信息已经开始传递。接下来，通过回答，你不仅告诉了我一个地形上的事实，而且你知道我知道了这个事实，我知道你知道我知道了这个事实，如此等等。这种交互反省任意有穷深度的知识称作*公共知识*。它不仅包括了事实的信息，而且包括对别人所知道的迭代信息。

这些关于我们互知信息的*认知暗示*不仅只是交流的副作用，它们还会影响进一步的具体行动。对于我这个好事的荷兰游客，如果某些旁观者发现了我知道这条路通往迈克西马斯所在地，这可能会导致他们跑去给国王康马多斯报信。然

* One is a Lonely Number: on the Logic of Communication // Chatzidakis Z, Koepke P, Pohlers W eds. *Logic Colloquium'02*. ASL & A. K. Peters, Wellesley MA, 2006: 96 ~ 129.

而，当我知道他们知道我知道这个信息时，就可能导致我去阻止他们那样做。因此，认知暗示是普遍存在和重要的现象，而且我们人类很善于处理它们！特别地，我们也善于把握群体知识之间的细微差别。每个人私下知道你的伴侣不忠是令人不愉快的事，但是，当你遇上一群人并且你知道他们都知道他们知道你的伴侣不忠这件事时，你的羞辱感就会爆发。

我所描述的是一类询问问题，这仅仅是冰山一角，还有其他很多类型。如果你是我的学生，你就不会认为我课堂上的提问表明我不知道答案。因为我的目的可能是显示你的无知，甚至不需要传递这样的信息：我认为你知道答案。人们已经从很多角度研究此类现象。语言哲学家发展了言语行动理论，语言学家研究询问的语义，计算机科学家研究交流的机制，博弈论专家则研究信号博弈。这些方面都是重要的——但逻辑仍有它的立足之地。本文旨在表明逻辑分析在交流中占有重要位置。逻辑模型有助于提出并解决一些过去尚未被认识到的基本问题。

7.1.2 泥孩难题

信息流动的微妙之处往往体现在一些智力游戏中。一个常见的例子是泥孩难题：

> 三个孩子在外面玩过之后，其中有两个孩子额头上有泥。他们可以彼此看到对方，却看不到自己，因此，他们都不清楚自己的状态。这时他们的父亲过来了，说：“你们中至少有一个人额头有泥。”并接着问：“你们谁知道自己额头上有泥？”假设孩子们都如实回答，随着这样问答的重复，将会发生什么呢？



第一轮询问时，他们中没有人知道自己额头是否有泥。明白这一点后，第二轮询问时额头有泥的孩子将会同时知道自己额头有泥，因为他们中的任何一个孩子都可以做出如下论证：

> “如果我额头是干净的，那么我看到的那个额头有泥的孩子看到的都是额头干净的，从而立即发现自己是额头有泥的。但是他并未发现。因此，我一定是脏的！”

对额头有泥的两个孩子来说，这种分析是对称的，所以第二轮询问时他们都发现自己额头有泥。第三个孩子则在另两个孩子宣告之后才知道自己额头是干净的。通过改变事例中额头有泥和无泥孩子的个数，容易推广这个智力游戏。只要在互联网上简单搜索一下就可以发现这个问题有很多变种不断出现。

智力游戏有着不同寻常的力量，因为除了简单的问与答，它们凸显了交流的微妙特征。比如，考虑这条看似有理的*学习原理*——“我们在公开场合听到的信息将成为公共知识”。对简单事实的宣告，这是成立的，例如，正如塔西佗[①]所记载的那样，早在联合国国际维和人员出现之前，德国皇家卫队就已经走在罗马的街道上了。但是，一般而言这个原理并不是有效的！在泥孩难题第一轮询问中，两个额头有泥的孩子都如实回答“不知道”。但宣告的结果并没有使无知成为公共知识，而使自身成为假命题，因为第二轮询问中这两个孩子知道自己额头有泥。交流性的行动包括*时间选择*和*信息变化*，并且它们也许以复杂的方式改变真值。正如我们将会看到的那样，逻辑的优点之一就是能帮助我们如实反映这些变化。

7.1.3　公开交流的逻辑模型

我们不难给出问与答场景的逻辑描述。首先，我们需要描述*相关的信息状态*，然后说明它们是如何*更新*的。

问与答　由你我组成的群体 $\{Q, A\}$，它的初始信息模型有两个状态“ϕ”和“$\neg\phi$”。其中，ϕ 表示“这条路是通往罗马圆形大剧场的”。在一个图中我们用点表示状态，用点之间的连线表示主体对于各个状态的不确定关系。图 7-1 表示 Q 不能区分这两个状态：

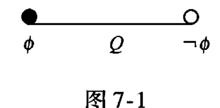


图 7-1

黑点表示的是主体生活的现实世界。图 7-1 中没有关于 A 的不确定连线。这表示这个罗马当地人知道这条路是否通往罗马圆形大剧场。但是，对于 Q 来说，尽管还没获知这个事实，但是他明白在一般情况下 A 是知道的，因此他知道 A 知道。这种关于他人信息的信息是向别人询问的一个极好理由。

其次，A 的回答引发了这个信息模型的*更新*。这样，A 的回答就剔除了 $\neg\phi$，从而把原图变成了下面的单点图：

ϕ●

图中只有一个可能世界，其中命题 ϕ 成立，且对任何人都没有不确定的连线。这表明此时 ϕ 是我俩的公共知识，从图中内行的人将会认识到信息流的变化。信息状态是多主体模态逻辑 **S5** 模型，且交流存在于改变这些模型的行动中。下文中，我们使用“知道”这一概念仅仅意味着“根据主体的信息”。

① 塔西佗，普布留斯·科内利乌斯：古罗马元老院议员，历史学家——译者注。

泥孩难题 下面是泥孩难题中信息更新的图式表达。通过给每个孩子指派 D（脏）或 C（干净），从而形成了世界的状态：共 8 个。身处其中任何一个状态，孩子都有一个不确定性。他知道关于别人的脸的情况，但是不能区分他自己的 D/C 值不同的状态（如图 7-2）；

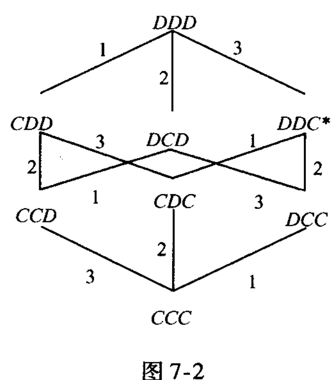


图 7-2

更新开始于父亲的宣告对于世界 CCC 的剔除（如图 7-3）；

当没人知道自己的状况时，上图底部的世界也就消失了（如图 7-4）；

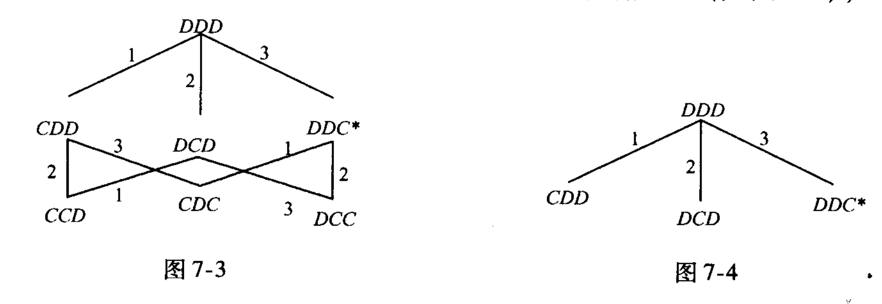


图 7-3　　　　图 7-4

最后的更新结果将是：

$$DDC^*$$

7.1.4 一般的交流

通过剔除与公开陈述矛盾的那些可能世界来完成更新的方法是相当简单的。一般地说，人类交流是非常复杂的，不仅包括知道，而且还包括诸如相信或怀疑等命题态度，还包括逻辑上比诚实宣告更有挑战性的交流现象，诸如隐藏和欺骗等。目前主要有两个研究方向：一个是进一步深入分析公开交流，这是一件相当精细的事，也是本文的主题；另一个方向是为那些更复杂的交流行动建构模型，比如给出一个不让旁人听到的回答或者他人偷听等等。对于信息、言语行动、秘

密等描述，自然语言有着丰富的词汇，这些词汇表明我们对各种交流的认识层次。在 7.9 中我们将简要地讨论一些更复杂的模型。事实上，这看起来也许是一个没有希望的事，因为我们的行为是如此的多变并且开放。幸运的是，这里存在一些简单的现实背景来突出其主要方面，这就是人们从事于其中的博弈，本文最后将会谈到博弈。

这项研究的一些重要参考文献是 [Fagin, et al. 1995; van der Meyden. 1998; Gerbrandy. 1999; Baltag, et al. 2003]。[van Ditmarsch. 2000] 也很值得一读，它对于著名的室内博弈“Cluedo”中的各种微妙的信息传递作了精确的分析。本文建立在上述参考文献和近年来本人尚未出版的很多结果的基础之上。下面的大多数结果已经在 1999 年后的一些公开会议上介绍过，2000 年在第 11 次伯明翰 ESSLLI 暑期学校做了“更新的喜悦”的基调演讲。自 1992 年以来，本文的 ILLC 报告版本可以在线获得。

7.2　更新逻辑基础

公开信息更新逻辑大多能够由现有的逻辑系统组合而成。我们首先看一下基本的认知逻辑和动态逻辑，然后讨论它们的组合。

7.2.1　认知逻辑

语言 1　讨论主体的知识，在认知逻辑中有下面明确的概念：

$K_j\phi$　　主体 j 知道 ϕ

有了这个符号，我们也能用它分析更多的模式：

$\neg K_j \neg \phi$　（或 $\Diamond_j \phi$）	主体 j 认为 ϕ 是可能的
$K_j\phi \vee K_j \neg \phi$	主体 j 知道 ϕ 是否成立
$K_j \neg K_i \phi$	主体 j 知道主体 i 不知道 ϕ

例如，在问一个“通常情况下的”的问题时，Q 传递的信息是他不知道 ϕ 是否成立：

$$\neg K_Q \phi \wedge \neg K_Q \neg \phi$$

并且他认为 A 也许知道：

$$\Diamond_Q (K_Q \phi \vee K_A \neg \phi)$$

A 肯定回答后，传递的信息是她知道 ϕ，她让 Q 知道 ϕ，Q 知道 A 知道 ϕ，如此等等，直至任意有穷深度的迭加，这样就产生了*公共知识*，表示如下：

$$C_{\{Q,A\}}\phi$$

模型　认知语言的模型形如：$\mathfrak{M} = (S, \{\sim_j \mid j \in G\}, V)$

（a）S 是可能世界的集合；

（b）V 是对命题变元的赋值函数；

（c）对每个主体 $j \in G$，都有一个等价关系 $\sim_j$ 连接 s 到所有她不能区分的可能世界。

我们可以把这些模型 $\mathfrak{M}$ 看做是信息状态的收集。

语义 1

$\mathfrak{M}, s \models K_j\phi$　　当且仅当　任意的 t，若 $t \sim_j s$，则 $\mathfrak{M}, t \models \phi$

$\mathfrak{M}, s \models \Diamond_j\phi$　　当且仅当　存在 t，$t \sim_j s$，且 $\mathfrak{M}, t \models \phi$

另外，还有几个比较有用的“群体知识”算子：

普遍知识　$E_G\phi$

对于 $j \in G$，$E_G\phi$ 是所有 $K_j\phi$ 公式的合取

公共知识　$C_G\phi$

$C_G\phi$ 在 s 上真，即是说群体 G 中的任一成员从 s 出发，对于在任意有限步内（例如，$\sim_1$，$\sim_2$，$\sim_1$，$\sim_3$）通达的所有可能世界来说，ϕ 在其中都真。

隐含知识　$I_G\phi$

$I_G\phi$ 在 s 上真，即是说对于通过所有 $\sim_j$ 关系的交和 s 通达的所有可能世界来说，ϕ 在其中都为真，其中 $j \in G$。

逻辑 1　信息模型中，有效的公式可以用来描述互动主体对于知识和无知的自动推理。下面是信息模型上的一些主要有效式：

$K_j(\phi \to \psi) \to (K_j\phi \to K_j\psi)$	知识分配
$K_j\phi \to \phi$	知识公理
$K_j\phi \to K_jK_j\phi$	正内省
$\neg K_j\phi \to K_j\neg K_j\phi$	负内省

多主体 S5 系统是完全的，它有两个不同的作用：一是描述主体明确的推理，二是描述关于推理的推理。带有公共知识的完全逻辑，还需要下面两个公理：

$C_G\phi \leftrightarrow \phi \wedge E_G C_G\phi$	均衡公理
$(\phi \wedge C_G(\phi \to E_G\phi)) \to C_G\phi$	归纳公理

以上是认知逻辑的标准的可判定的版本。

7.2.2　动态逻辑

一般而言，关于知道的逻辑仅能静态地研究交流。为了描述更新本身，我们必须明确地把行动考虑进来。

语言 2　语言由公式 F 和程序表达式 P 两部分组成，采取 BNF 的形式将这

种双层语言缩写如下：

F:= 命题原子 p，q，r，… | $\neg F$ | $(F \wedge F)$ | $\Diamond_P F$

P:= 基本行动 a，b，c，… | $(P;P)$ | $(P \cup P)$ | P^* | $(F)?$

语义2　这些形式是在多模态模型 $\mathfrak{M} = \langle S, \{R_a \mid a \in A\}, V \rangle$ 上得到解释。直观上，可以把这种模型看做是带有状态和可能的基本转换的进程图。下面用递归的方式来定义两个真值概念：

$\mathfrak{M}, s \models \phi$　　　ϕ 在状态 s 真

$\mathfrak{M}, s_1, s_2 \models \pi$　　　从 s_1 到 s_2 状态转移对应程序 π 的成功执行

下面是归纳项：

$\mathfrak{M}, s$	$\models p$	当且仅当	$s \in V(p)$
$\mathfrak{M}, s$	$\models \neg \psi$	当且仅当	并非 $\mathfrak{M}, s \models \psi$
$\mathfrak{M}, s$	$\models \phi_1 \wedge \phi_2$	当且仅当	$\mathfrak{M}, s \models \phi_1$ 且 $\mathfrak{M}, s \models \phi_2$
$\mathfrak{M}, s$	$\models \Diamond_\pi \phi$	当且仅当	存在 s' 使得 $\mathfrak{M}, s, s' \models \pi$ 且 $\mathfrak{M}, s' \models \phi$
$\mathfrak{M}, s_1, s_2$	$\models a$	当且仅当	$(s_1, s_2) \in R_a$
$\mathfrak{M}, s_1, s_2$	$\models \pi_1; \pi_2$	当且仅当	存在 s_3 使得 $\mathfrak{M}, s_1, s_3 \models \pi_1$ 且 $\mathfrak{M}, s_3, s_2 \models \pi_2$
$\mathfrak{M}, s_1, s_2$	$\models \pi_1 \cup \pi_2$	当且仅当	$\mathfrak{M}, s_1, s_2 \models \pi_1$ 或者 $\mathfrak{M}, s_1, s_2 \models \pi_2$
$\mathfrak{M}, s_1, s_2$	$\models \pi^*$	当且仅当	在 $\mathfrak{M}$ 中存在从 s_1 到 s_2 有限 π 转移序列
$\mathfrak{M}, s_1, s_2$	$\models (\phi)?$	当且仅当	$s_1 = s_2$ 并且 $\mathfrak{M}, s_1 \models \phi$

这样，公式中有通常的布尔运算，同时，要使存在模态公式 $\Diamond_\pi \phi$ 为真，只要行动 π 能被执行达到的状态中有一个使得公式 ϕ 为真。这里的程序是通常算子的正规构建：关系的组合、布尔选择、克里尼迭代和公式测试。标准控制算子可以通过它们来表示，比如：

如果(IF) ε 则(THEN) π_1 否则(ELSE) π_2

当(WHILE) ε 执行(DO) π

逻辑2　动态逻辑表达了所有模态逻辑和正规关系集合代数。动态逻辑的有效完全公式集包括（参见［Kozen, et al. 2000］）：

- 相对任意模态算子 $\Box_\pi$ 的极小模态逻辑中的所有法则
- 相对存在算子的计算规则：

$\Diamond_{\pi_1;\pi_2} \phi$	$\leftrightarrow$	$\Diamond_{\pi_1} \Diamond_{\pi_2} \phi$
$\Diamond_{\pi_1 \cup \pi_2} \phi$	$\leftrightarrow$	$\Diamond_{\pi_1} \phi \vee \Diamond_{\pi_2} \phi$
$\Diamond_{\phi ?} \psi$	$\leftrightarrow$	$\phi \wedge \psi$
$\Diamond_{\pi^*} \phi$	$\leftrightarrow$	$\phi \vee \Diamond_\pi \Diamond_{\pi^*} \phi$

- 归纳公理：$(\phi \wedge \Box_{\pi^*}(\phi \to \Box_\pi \phi)) \to \Box_{\pi^*}\phi$

与基本的认知逻辑一样，公开宣告逻辑也是可判定的。在这个基本语言上的一些扩张依然保持可判定性这一性质，比如构建程序的交（∩）运算——我们后面将会谈到。扩张模态语言在应用中是经常出现的。

7.2.3 动态认知逻辑

分析交流需要一种行动中的知识逻辑，这种逻辑熔合了认知逻辑和动态逻辑。这也许至少可以从两个方面来实现。

抽象的 DEL

我们可以分别合并动态逻辑和认知逻辑的语言及它们的模型中的成分。这就形成了抽象的关于知识和行动的逻辑：参见［Moore. 1985］中的设计，或［van Benthem. 2001］中的不完全的信息博弈。一般的逻辑是认知多主体 **S5** 和动态逻辑的合并。这为研究带有进一步限制的逻辑提供了很好的基础。比如，要求主体交流过程中有完美记忆。这等价于交换公理：

$$K_j \Box_a \phi \to \Box_a K_j \phi$$

对于交流的一般研究，抽象的 *DEL* 也许是最好的工具。

具体的更新逻辑

7.1 提到的公开宣告是动态认知的一个具体事例。公开宣告命题 ϕ，当前的认知模型 $\mathfrak{M}$，s（s 是现实世界）更新到 $\mathfrak{M}|\phi$，s：

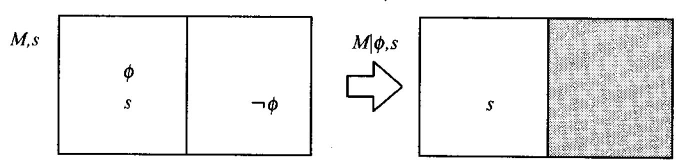


图 7-5　剔除当前不满足 ϕ 的所有世界

这里，论域的状态是认知模型（所有的认知模型或其中的一部分），基本的行动是公开宣告 $A!$，A 是一个认知公式。公开宣告是部分函数：如果 A 真，那么可以对它诚实宣告并产生唯一更新；否则，宣告不能执行。从动态逻辑的角度看，这恰好是抽象进程模型的具体认知实例。这种逻辑具有组合的动态-认知断言：

$$\Box_{A!}\phi \qquad \text{“真实宣告 } A \text{ 后，}\phi\text{ 满足”}$$

这种逻辑系统把认知融入动态逻辑并能反映出更新论域的具体变化。文献［Plaza. 1989；Gerbrandy. 1999］中给出一个完全且可判定的公理系统，包括以下主要公理：

$$\Diamond_{A!}p \quad \leftrightarrow \quad A \wedge p$$
$$\Diamond_{A!}\neg\phi \quad \leftrightarrow \quad A \wedge \neg \Diamond_{A!}\phi$$
$$\Diamond_{A!}\phi \vee \psi \quad \leftrightarrow \quad \Diamond_{A!}\phi \vee \Diamond_{A!}\psi$$
$$\Diamond_{A!}K_i\phi \quad \leftrightarrow \quad A \wedge K_i(A \to \Diamond_{A!}\phi)$$

本质上，$\Diamond_{A!}\phi$ 可以看作 ϕ 对 A 的相对化。以上公理也可以通过模态必然算子来表述，比如上面最后一个公理也可表述为：

$$\Box_{A!}K_i\phi \leftrightarrow A \to K_i\Box_{A!}\phi$$

这个公理和前面提到的完美记忆类似。关于公共知识，只需要用下面二元形式对以前的认知语言适当扩充：

$C_G(A,\phi)$　　ϕ 是 A 定义的子模型上的公共知识。

仅仅使用绝对公共知识不能定义上述公式，但结合动态-认知的组合断言，有归约法则：

$$\Diamond_{A!}C_G\phi \leftrightarrow A \wedge C_G(A, \Diamond_{A!}\phi)$$

[van Benthem, van Eijck & Kooi. 2005] 按照这种思路进行了详细探讨，且对知识和行动作了进一步的组合。特别是，[van Benthem. 1999] 定义了一个更全面的动态认知逻辑。

带有程序构建的 DEL

公开宣告仅仅是一个基本的行动。交谈可能会包括更加复杂的所说话的程序。说一件事后再说一件事等同于程序的组合，在所包括的选择中去选择某人的断定，且“泥孩难题”中还包括一个简单的迭代：

当（WHILE）“你不知道自己额头是否有泥”　执行（DO）“说不知道”

因为动态逻辑中有关选择和组合的归约公理，所以，带有组合和选择程序构建的基本公开更新逻辑与仅带有基本宣布 $A!$ 的更新逻辑是一样的。但是，如果添加对于宣告的迭代，系统将发生改变，甚至会失去可判定性。

7.3 信息模型的基础理论

特殊模型类

一般的多主体 **S5** 模型可能是相当复杂的，但存在一些有特殊意义的子类。例如，“泥孩难题”初始模型是一个完全的三维立方图，其中

$X \sim_j Y$，如果 X 与 Y 的第 j 个的其他协同者相等，即 $(X)_j = (Y)_j$

代数逻辑（[Marx & Venema. 1997]）中研究了立方模型和一阶模型上赋值空间之间的联系。但是，通过“泥孩难题”中更新序列产生的立方子模型的变化，

可以得出认知的一般性原理：

定理 1 每一个多主体 **S5** 模型互模拟于某个完全立方图的子模型。

在纸牌游戏（[van Ditmarsch. 2002]）和一般性博弈（[van Benthem. 2002]）的研究中，还出现了另外一些特殊模型类。

互模拟

认知逻辑和动态逻辑都是标准的模态逻辑，它们都有下面这个进行模型结构比较的方法（参见 [Blackburn, et al. 2001]）：

定义 1 两个模型 $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ 间的*互模拟*是状态 m, n 之间的一种二元关系 $\equiv$。若 $m \equiv n$，则：

(a) m, n 满足同样的命题变元；

(b1) 若 mRm'，则存在世界 n'，nRn' 且 $m' \equiv n'$；

(b2) 若 nRn'，则存在世界 m'，mRm' 且 $m' \equiv n'$。

下面是关于“问-答”问题的一个互模拟实例（图 7-6）：

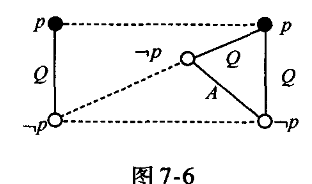


图 7-6

本质上，这是同种信息状态的两种表达方式。互模拟等价一般出现在更新中，假设当前的模型如下，其中现实世界用黑点表示：

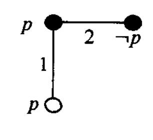


图 7-7

注意图 7-7 的所有三个世界满足不同的认知公式，尽管 1 有不确定关系，但是 1 知道 p，因此 1 可以宣告这一事实，则模型更新为：



图 7-8

上面的模型又可以互模拟收缩为一个单点模型（图7-8）：

p●

一般说来，可以很方便地认为更新步骤自动地穿插互模拟收缩。

有一些基本的结果把互模拟和模态公式的真值联系起来。为方便起见，我们仅考虑有穷模型，当然这可以推广。

不变性和可定义性

考虑一般模型，或者是多主体 **S5** 模型。

引理1（不变性引理）　下面的命题是等价的：

（a）$\mathfrak{M}$，s 和 $\mathfrak{N}$，t 通过一个互模拟相联系；

（b）$\mathfrak{M}$，s 和 $\mathfrak{N}$，t 满足相同的模态公式。

任何模型不但有一个互模拟的*拆开的树模型*，而且有一个最小的*互模拟收缩*，它们满足相同的模态公式。另一个有用的工具是无穷逻辑中类似于模态的斯科特语句（参见［Barwise & Moss. 2003］）：

引理2（状态定义引理）　对于任意模型 $\mathfrak{M}$，s，存在认知公式 β（包括公共知识），使得下列命题等价：

（a）$\mathfrak{N}$，$t\models\beta$；

（b）$\mathfrak{N}$，t 和 $\mathfrak{M}$，s 之间有一个互模拟关系 $\equiv$ 使得 $s\equiv t$。

证明：这里所给出的形式和证明是来自于［van Benthem. 1997；van Benthem. 1998B］。考虑任一有穷多主体 **S5** 模型 $\mathfrak{M}$，s，它属于那些满足相同公式的最大可能世界集形成的区域中。

声明1　存在一个有穷公式集 ϕ_i（$1\leqslant i\leqslant k$），使得

（a）每个世界都满足该公式集中的一个公式；

（b）不存在满足该公式集中两个公式的世界（它们定义了模型的一种划分）；

（c）若两个世界满足同一个公式 ϕ_i，则它们满足所有的认知公式。

为了证明这个声明，任取一个世界 s，对于任意的世界 t，找到 s 和 t 的区分公式 $\delta^{s,t}$ 即满足 s 而不满足 t 的认知公式。所有 $\delta^{s,t}$ 的合取即 ϕ_i 公式，它仅在 s 上及分享 s 的认知理论的那些世界上真。可以假定，ϕ_i 也列出了所有的命题变元的在它们各自划分区域中的真与假。下面来看划分区域间的不确定关系：

\#　如果任何满足 ϕ_i 的世界都 $\sim_a$ 通达一个满足 ϕ_j 的世界，那么所有满足 ϕ_i 的世界同样满足公式 $\Diamond_a\phi_j$

接下来描述相对 $\mathfrak{M}$，s 的公式 $\beta_{\mathfrak{M},s}$：

（a）所有在 s 上真的（否定的）命题变元，加上在 $\mathfrak{M}$，s 上真的唯一的 ϕ_i；

（b）整个群体关于下列公式的公共知识：

（b1）所有 ϕ_i 的析取；

（b2）所有合取 $\phi_i \wedge \phi_j$（$i \neq j$）的否定；

（b3）#中出现的所有蕴涵式 $\phi_i \rightarrow \Diamond_a \phi_j$；

（b4）所有蕴涵式 $\phi_i \rightarrow \Box_a \vee \phi_j$，其中析取覆盖的是前面分句中列出的所有情形。

声明 2　$\mathfrak{M}$，$s \models \beta_{\mathfrak{M},s}$。

声明 3　如果 $\mathfrak{N}$，$t \models \beta_{\mathfrak{M},s}$，那么在 $\mathfrak{N}$，t 和 $\mathfrak{M}$，s 间存在互模拟关系。

为了证明声明 3，令 $\mathfrak{N}$，t 是 $\beta_{\mathfrak{M},s}$ 的任意模型，ϕ_i 把 $\mathfrak{N}$ 划分为不交的区域 Z_i，其中 Z_i 是满足 ϕ_i 的世界集。现在，把 Z_i 和模型 $\mathfrak{M}$ 中满足 ϕ_i 的区域关联起来。特别地，t 和 s 关联。我们验证这种关系是一个互模拟。从前面的注释易知，这里规定的关联满足互模拟的第 1 个条件。对于“Z”型条件：

（a）$\mathfrak{M}$ 中的任何 $\sim_a$-后继步骤通过公式 $\phi_i \rightarrow \Diamond_a \phi_j$ 得以编撰，它在 $\mathfrak{N}$ 中要求有相应的后继产生；

（b）反过来，如果在 $\mathfrak{M}$ 中没有 $\sim_a$-后继关系，由公式 $\phi_i \rightarrow \Box_a \vee \phi_j$ 在 $\mathfrak{N}$ 中成立可知，在 $\mathfrak{N}$ 中也没有相应的多余后继。 ■

不变性引理是说：互模拟恰好适合模态语言。状态定义引理是说：每个语义的状态能通过一个认知公式来刻画。例如，对于两个世界的“问-答”模型，下面的一个认知公式定义了一个由互模拟决定的 ϕ-状态：

$$\phi \wedge C_{\{Q,A\}}((K_A\phi \vee K_A\neg\phi) \wedge \neg K_Q\phi \wedge \neg K_Q\neg\phi)$$

原则上，我们可以在对信息状态的语义说明和根据完整定义公式的语法描述之间进行转换。这不仅仅是技术问题，例如，在像信念修正这样的相关领域中，语法的方法占主导地位，信息状态不是模型而是语法理论。系统地把语法和语义联系起来用于更新领域应该是一个很不错的方法。但是这里我们将只停留在语义方面。

礼貌而安全的运算

上面所讲的这些对认知更新运算 O 也会有限制作用。这些运算应当遵守互模拟：

如果 $\mathfrak{M}$，s 和 $\mathfrak{N}$，t 是互模拟的，那么他们的认知更新运算的值 $O(\mathfrak{M}, s)$ 和 $O(\mathfrak{N}, t)$ 也是互模拟的。

事实1　公开更新遵守互模拟。

证明： 令≡是$\mathfrak{M}$，s 和 $\mathfrak{N}$，t 之间的互模拟，$\mathfrak{M}|\phi$，s 和 $\mathfrak{N}|\phi$，t 是用 ϕ 公开更新后得到的子模型。由互模拟的“Z”条件，对于≡，受限子模型间仍就是一个互模拟。假设某个世界 w 在 $\mathfrak{M}|\phi$，s 中有一个 $\sim_i$ 后继 ν。上述 ν 在其他模型上仍是可得到的：因为 ν 满足 ϕ，所以 ν 仍然在 $\mathfrak{M}$ 中。另外，由互模拟≡的不变引理，ν 在 $\mathfrak{N}|\phi$ 中也满足 ϕ。因此，ν 也在更新模型 $\mathfrak{N}|\phi$，t 中。 ■

前面提及的其他更新运算也遵守互模拟（进程代数中的类似现象参见［Hollenberg. 1998］）。互模拟对于整个动态逻辑都起作用——但是方法上有所变化（［van Benthem. 1996］）。对于 Z 字形公式 ϕ 不变性，我们必须证明程序的所有正则构建都是满足 Z 字形条件：基本关系 R_a 和任意转移关系$[\![\pi]\!]$：

事实2　令≡是模型 $\mathfrak{M}$，$\mathfrak{M}'$间的互模拟，且 s≡s'，则有：

（i）s，s'能证实相同的命题动态逻辑公式

（ii）如果 $s[\![\pi]\!]^{\mathfrak{M}}t$，那么存在 t'使得 $s'[\![\pi]\!]^{\mathfrak{M}'}t'$，且 s'≡t'

定义2　只要≡是两个有 R_1，…，R_n可及关系的模型之间的互模拟关系，那么它也是相对于关系 $O(R_1，…，R_n)$ 的一个互模拟关系，则称这个程序上的运算 $O(R_1，…，R_n)$ 对于*互模拟是安全的*。

上面程序归纳的核心是 *PDL* 三个正规运算；$\cup$ * 相对于互模拟是安全的，相反，程序的交运算则不是安全的：



图7-9　　　　图7-10

相对 a，b，这里明显存在一个互模拟关系，但是对于 $R_a \cap R_b$，互模拟的 Z 字形条件不成立。

讨论过一些技术上细节后，我们再回到“交流”。事实上，泥孩难题凸显了进一步研究的所有议程。我们已经注意到，它的模型在本领域研究的特殊作用，另外，它也提出了许多深层的重要议题，如：

（a）群体内交流的利益；

（b）迭代断定的角色；

（c）推理中更新和推断的相互影响。

接下来我们将研究这些问题。我们先从一个已经提到的问题入手：使用泥孩

难题来驳斥公认的“学习原理”。

7.4 从一个陈述中我们可以学习到什么？

规范言语行为

更新逻辑是言语行为理论的续篇，它起源于哲学，后来被部分地移植到计算机科学（见［Wooldridge. 2002］）。早期关于言语行为的论述，通常由对成功断言、询问或者命令的事前条件和事后条件的形式化规范组成。这些文章中的一些见解是相当有价值的，比如关于断言的断定力度。例如，接下来，和传统保持一致，我们将假定正常的合作者总是诚实地回答问题。即使这样，什么能保证这些规范的正确性呢？又比如，我们前面说，对问题的回答使得这个结果成为公共知识。但是，对于这个简单的“学习原理”，“泥孩难题”是一个反例。逻辑工具能帮助我们弄清这些陷阱并找到问题解决的方法。学习问题是这方面应用的一个很好的例子。

更新下的保真性问题

公开宣告 p，则 p 就变成了公共知识，并且对于其他复合命题也是如此。然而，正如我们第一节中所言，对任意的 ϕ，并非公布 ϕ 都产生公共知识 ϕ！下面我们来看一个反例。

在“问与答”中，假设 A 诚实公布

$$p \wedge \neg K_Q p \qquad \text{“}p\text{,但是你并不知道它。”}$$

这个公布改变了 Q 对 p 的无知，并使得自己的断定为假！在这里，通常术语的使用容易产生歧义：

学习到 ϕ 所指是模糊的：宣告前 ϕ 是真的，还是宣告后 ϕ 成立

这样解释是因为公开宣告后命题的真值也许会发生改变。对于小模型中的留存世界，虽然关于事实的性质没有改变，但是它认知上的性质可能会发生变化。这就提出了一个普遍的逻辑问题——更新下的保真性问题：

哪种形式的认知命题，不管从模型中剔除了其他哪些世界，它在一个世界上总是真的？对群体公开宣告诸如：原子命题 p 和一般的不含认知算子认知命题总是能得到公共知识。然而，对于认知命题和无知命题 $K_i p$ 和 $\neg K_i p$ 却不然。

保真性结果的新种类

这里有一个来自于模态逻辑中的模型论事实（见［Andréka, et al. 1998］）：

定理 2 对于不带有公共知识的认知公式而言，在子模型下具有保真性的公式正是用命题字母 p，$\neg p$，$\wedge$，$\vee$ 和 K_i 算子定义出来的。

和在一阶逻辑中的子模型下保真的全称公式相比较，对于带有公共知识的认

知语言，增加任意公式 $C\phi$ 作为保真形式是一个自然的猜想。然而这是一个开放的问题，因为即使对于有限模型的论域，从一阶模型论到非一阶模态不动点语言看来，这个问题也不是平凡的。

问题1　相对带有公共知识的认知语言而言，哪种公式在子模型下是保真的？

其实，我们只需要公式在“自定义子模型上”保真，而并不是在任意子模型上完全保真：

当我们把模型限制在满足公式 ϕ 的那些世界上时，ϕ 将在所有更新后的模型上满足，或者就是说公式 $\phi\rightarrow(\phi)^{\phi}$ 是有效的。

问题2　什么样的认知公式蕴含它们的自身相对化呢？

当然，在自我实现的意义上，什么样的一阶公式是保真的呢？这种特殊形式的模型论保真似乎是个新问题。

一个不成问题的问题吗？

很多人发现这个问题是让人厌烦的。非保真性好像是多舌引起的一个负面影响，例如，对于“A 说：‘p，但你不知道它’”，他应该说“p”，而不应该说“你不知道 p”。泥孩难题中，非保真性没有这么明显。无论如何，大家都知道，在计算机科学中，进程中的状态总是存在被扰乱的威胁，同样，某个状态上为真的命题在经过一个更新后它的真值也面临是否被改变的问题。这都没有什么好奇怪的。动态逻辑用来研究行动后命题的真值变化。让我们停止讨论：重述任何消息能除掉非保真性吗？一个认知命题 A 确定了当前模型 $\mathfrak{M}$ 上的一个世界集。我们总能找到一个等价的保真定义吗？如果每个世界有一个简单且唯一的事实描述，这是很容易的。纸牌游戏正是如此。即使没有以上的假定，至少局部也有有效的方法：

事实3　在任一模型中，每个公开宣告有一个导致同样更新的保真等价。

证明： 不失一般性，假设我们这里只考虑收缩的互模拟模型，且它们都是连通的，即没有孤立的世界。设 w 是模型 $\mathfrak{M}$ 的当下世界，j 公开宣告 A，更新得到的子模型 $\mathfrak{M}|A$，其论域是 $A^{*}=\{s\in\mathfrak{M}\mid\mathfrak{M},s\models A\}$。如果 A^{*} 与 $\mathfrak{M}$ 的论域相同，那么公开宣告“True”就足够了并且是保真的。现在假设 A^{*} 不同于 $\mathfrak{M}$ 的论域，保真性命题由两部分的析取得到：

$$\Delta\vee\Sigma$$

首先考虑 Δ，由7.3中的引理的证明，它是 $\mathfrak{M}$ 中 A^{*} 是一个认知定义，根据互模拟描述 A^{*} 中的每个世界，然后把它们析取。

对于 Σ，根据上面提到的那个证明，由互模拟写出公式描述 $\mathfrak{M}|A$，具体地，

它由一个一般的认知公式外边加上一个公共知识算子组成，它描述了 $\mathfrak{M}|A$ 中各个状态和它们之间相互连接及各个状态为真的情况，然而，没有关于某个特殊世界的描述出现。

显然，$\Delta\vee\Sigma$ 在 $\mathfrak{M}|A$ 中是公共知识，因为 Σ 是公共知识，但是它也在模型 $\mathfrak{M}$ 中挑出了恰当的世界。首先，A^* 中的任何世界满足 Δ 自身的析取。反过来，假设 $\mathfrak{M}$ 中的任一世界 t 满足 $\Delta\vee\Sigma$。如果 t 满足 Δ 的析取，那么根据模型互模拟的最小性，$t\in A^*$。否则，$\mathfrak{M}$，$t\models\Sigma$。然而由 Σ 的构造，在 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}|A$ 之间必有互模拟。这和此更新是真正更新的假设相矛盾。 ■

当然，这种对断定的表述方式有点难看。此外，它仅仅适用一个固定的模型，不具有一般性。回顾泥孩难题，在知识揭晓之前，也许同一个无知的命题不得不根据群体中人数重复多次。这个命题若有一个统一的保真等价式，后面的宣告在有限固定步后总能导致公共知识。

7.5 群内交流

通过交流能得到的最好结果

"泥孩子"也可能只告诉彼此他们所看到的事实，这样就可以立即得到公共知识——泥在他们头上的分布情况。同样，对于卡片游戏中的选手，交流手中的卡片内容也导致类似的结果。当然，正是因为我们并非对任何事情都是"实事求是地说"，生活才是文明化的。尽管如此，还有一个原则问题：通过最大限度地交流，群中的主体能取得什么结果。考虑两个认知主体，发现自己处在某个模型 $\mathfrak{M}$ 的实际状态 s 上。他们可以交流所知道的事实，这样使得模型变小。假设他们希望最大限度地合作：

通过不断地更新他们所能给予别人最好的正确信息是什么——并且结果会导致什么样的集体信息状态？

例如，从下面模型（见图 7-11）可以得到的最好结果是什么？几何直觉让我们想到图 7-12：



图 7-11　　　　图 7-12

这是正确的！首先，在一个有限模型上相互更新的任何序列最终结束在某个不能再归约的极小论域上。当主体知道的所有事实是公共知识时，即它在每个世界上都为真，就达到了这个状态。并且，极小模型是唯一的，我们称它为初始模型的“交流核”。下面是一个明确的表述，证明见［van Benthem. 2000］。

定理3 每个模型有交流核，即从现实世界出发通过所有不确定关系连接可达的世界集。

证明：方便起见，考虑一个仅有两个主体的模型。多于两个主体的情况可以应用这一方法同样地证明。首先，主体可以达到的特殊世界集如下。不失一般性，如在7.3节中，假设模型中每个世界 t 都满足一个唯一的定义公式 δ_t——或者是通过一个特定的论证所得到的。主体1通过陈述他认为不同于现实世界的所有世界 t 上分别满足的唯一公式 δ_t 的析取 $\vee\delta_t$ 来交流他现在所知道的。初始步把模型变成现实世界及其 $\sim_1$ 可达的世界。这里有一个小的技术性问题，所得模型不必再满足上面的唯一可定义性。该更新也许已经剔出了有别于其他类似选项的世界。然而这很容易通过互模拟收缩来修正。其次，假设2做了有利于自己的同样强的断言，这样模型变成了现实世界及其 $\sim_2$ 可达的世界。这样一来，每个主体知道的都是公共知识。因此，进一步的断言不提供新的有效信息。

接下来，假设主体可达的世界进一步宣告不提供有效结果。那么对于任意的公式 ϕ 以下两个蕴含式成立：$K_1\phi\rightarrow C_{\{1,2\}}\phi$，$K_2\phi\rightarrow C_{\{1,2\}}\phi$，这意味着1，2有相同的可达世界。它们形成了上述核的一个子集。事实上，上述每个世界被保留下来。主体能做的陈述仅仅是在那些世界中都成立的命题，因为这样的命题在他的信息集中。因此，整个核存在于更新的每个模型中，通过归纳，所有的核世界都在更新模型中。 ■

上述证明可以得到一个推论：

事实4 主体仅仅需要两个交流回合就能到达核。

特别是，主体不必重复交流。例如，假设1诚实说 A（在现实世界中他知道的事实），注意这导致的公开更新，他接下来说 B（在新的世界中他知道的事实）。于是，他也许会直接宣称 $A\wedge(B)^A$：这里 $(B)^A$ 是 B 对 A 的相对化（参见7.6节）。

顺便说一句，本节中开始的例子的一个两步的解表述如下，它不是一个存在性的交谈：

Q 叹息道：“我不知道。”

A 叹息道：“我也不知道。”

如果你忘记了这里的细节没有关系，因为在相反的顺序上也起作用。

交流核是现实世界及通过所有不确定关系的交和它相联系的世界组成。在7.2.1中这种方法应用在定义一个群体的隐含知识上，因而，最大化交流把群体隐含知识变成公共知识。这是有意义的，而且是很微妙的。没有人知道的珍宝所在地也许是隐含知识，但是，一旦只剩交流核，那么珍宝所在地可能就成为公共知识了。我们可以比较量词约束和相对化之间的不同。隐含知识 $I_G\phi$ 仅仅在交流核 CC 的世界上得到显示，然而，对公式的赋值来自于对整个模型的每个世界。比较而言，在核上的赋值类似于在模型中对整个相对化命题 $(\phi)^{CC}$ 的赋值。

另外一个技术性问题是关于关系的交，尽管保持逻辑的可判定性，但是在7.4节的意义上，相对于互模拟来说不再安全。把它添加到语言中会导致一个真正更丰富的认知逻辑，对于早期模型论中的一些结果必须重新考虑。

设计的断言

前面的论题真正地体现了兴趣的一个转移。更新逻辑可以用来分析给定的断言，但是，它也能用来设计满足一定规格的断言。下面的难题来自于莫斯科的数学奥林匹克竞赛（参见［van Ditmarsch. 2002］）：

> A，B，C 持有7张牌，其中 A 有3张，B 有3张，C 有1张。三个人都能听到的情况下，A 和 B 如何公开交流使得他们知道牌在三个人手中的分布情况，而 C 却不知道？

这类问题有解，但它的存在性与牌的数量有关。这个问题也可以看做是前面问题的推广。子群体如何既能极大地交流，而又能使其他剩余主体得到的有效信息尽量少呢？一般地，这称作隐藏，但这是很有趣的事情，至少对于政治家和违法爱好者是有意义的。这种设计问题，人们刚刚开始研究。

这里，我们来看一个和计算机科学类似的问题。7.2.3的动态认知逻辑像著名的程序逻辑一样巧妙地处理正确性论断：

> $\phi\to\Box_{A!}\psi$　如果事前条件 ϕ 成立，那么陈述 A 总能产生一个状态使得事后条件 ψ 成立。

这三部分也从可以以不同的方式来看。给定一个断言，正如在问和答中的做法那样，我们可以分析它的事前条件和事后条件。或者，给定一个断言 $A!$，加上事前条件 ϕ，我们可以寻找它们最强的事后条件 ψ。例如，$\phi=True$，并且 A 是原子，容易证明最强的结论是 A 是公共知识。这是程序分析。但是也有程序的合成。给定事前条件 ϕ 和事后条件 ψ，我们能找到一个断言 $A!$ 来确保这个转换。这里的事后条件 ψ 描述的也许是假定主体认识到事实，使用形如 $K_j\alpha$ 和 $\neg K_j\beta$ 的断言。会话规划就是如此，为了使得只是那些合适的人得到恰当的信息，决定要说的内容。

7.6　作为相对化的公开更新

下面要介绍的一个技术插曲（[van Benthem. 1999]）结合经典逻辑已有的结果。

语法和语义的相对化

通过简单的观察不难知道，宣告 A，等同于语义相对化的一个逻辑运算，即从模型 $\mathfrak{M}$，s 变化到可定义的子模型的 $\mathfrak{M}|A$，s。用它来解释目前为止的所有行为的同时也提出了一些新的问题。首先，在这个新模型中，我们能以 $\mathfrak{M}|A, s\models\phi$ 的形式对表达主体知识和无知的公式进行赋值。在经典逻辑中，这同样可以通过描述被断定公式 A 更新后的公式 ϕ 的语法相对化形式来实现：

引理 3（相对化引理）　$\mathfrak{M}|A, s\models\phi$　　当且仅当　　$\mathfrak{M}, s\models(\phi)^A$。

相对化引理是说，我们要么在相对化模型上对断言赋值，要么等价地在原模型上对公式的相对化形式赋值。为方便起见，我们假定相对化定义使得 $(\phi)^A$ 总是蕴涵 A。对于基本认知语言递归定义如下：

$$(p)^A = A\wedge p;\ (\neg\phi)^A = A\wedge(\neg\phi)^A$$

$$(\phi\vee\psi)^A = (\phi)^A\vee(\psi)^A$$

$$(K_i\phi)^A = A\wedge K_i(A\rightarrow(\phi)^A)$$

在上述定义中，对于公开更新，我们直接认可了上述公理。在认知宣告语言中，它是否完全起作用依赖它的力量。例如，对于公共知识，相对化就不那么直接了，因为绝对算子 C_G中没有语法前缀"$A\rightarrow\cdots$"或"$A\wedge\cdots$"做这个工作。然而，我们这里可以看到如何用带有二元受限的公共知识算子来扩张认知逻辑。事实上，动态逻辑在这方面表现得更好。

事实 5　动态逻辑在相对化作用下是封闭的。

证明：为了和这个系统的通常语法保持一致，我们需要双递归定义于公式和程序。对于公式，条件如上，另外需要添加$(\Box_\pi\phi)^A = \Box_{(\pi)^A}(\phi)^A$；

对于程序，递归定义如下：

$$(R;S)^A = (R)^A;(S)^A$$

$$(R\cup S)^A = (R)^A\cup(S)^A$$

$$((\phi)?)^A = (A)?;(\phi)^A?$$

$$(\pi *)^A = ((A)?;\ (\pi)^A)^*$$

此时，公共知识 $C_G\phi$ 可以作为一个动态公式：

$$\Box_{(\cup\{i\ |\ i\in G\})^*}\phi。$$

因此，对于认知逻辑，通过以上事实，借助动态逻辑的一些语法，我们可以得到一个自然的相对化。

相对化的一般逻辑

剖析其动机不难发现，更新逻辑是模型论中的一个运算的一种公理化，即相对化运算。这里没有特别的模态成分。我们也许会在一阶逻辑中寻找相对化$(\phi)^A$的完全逻辑，正如 [Marx & Venema. 1997] 中对代入$\Box_{t/x}\phi$的考察那样。

问题 3 在标准一阶语言中，对于相对化运算的完全的逻辑是什么？

至少我们可以看到公理多于 7.2.3 中列出的。例如，容易证明下面的事实：

$$\text{结合律}\qquad ((A)^B)^C \leftrightarrow A^{((B)^C)}$$

在我们的更新逻辑中，执行两次相对化对应两次连续更新。因此结合律等价于公式$\Box_{A!;B!}\phi \leftrightarrow \Box_{(\Box_{A!}B)!}\phi$的有效性。

为什么这不是前面给出的完全的公理系统呢？这个答案是微妙的。那个公理系统的确能推出每个有效的公式。但是它不是代入封闭的。特别的，上面对于原子命题成立的基本公理$\Diamond_{A!}p = A \wedge p$用任意的公式$\phi$代入却无效。把所有对代入实例是有效式的那些有效模式定义为更新逻辑的代入核。

结合律属于代入核，但是它不是从前面的公理系统中可推出的。

问题 4 我们能公理化公开更新逻辑的完全代入核吗？

在 7.4 的持续性的讨论中也有直观的无效原则。诚实宣告“p，但是你并不知道它。”使得这个断言不再有效。更技术地，即使$p \wedge \Diamond_1 \neg p$满足，它的自身相对化也是一个矛盾：

$$(p \wedge \Diamond_1 \neg p)^{p \wedge \Diamond_1 \neg p} = p \wedge \Diamond_1 \neg p \wedge \Diamond_1 (p \wedge \Diamond_1 \neg p \wedge p)$$

因此，一些断言在宣告后是自我反驳的，并且前面提到的合意原则不属于一般的相对化逻辑：

$$\phi \rightarrow (\phi)^{\phi}\qquad \text{仅对特殊的命题 } \phi \text{ 满足}$$

7.7 中将进一步讨论相对化逻辑，包括迭代宣告和迭代宣告和不动点算子的联系。

离题讨论：更丰富的更新系统

在标准逻辑中，相对化算子经常和其他算子一起出现，比如谓词的翻译——例如，从一个理论到另一个理论的相对化解释概念。同样地，上面的关联也扩充到认知更新的更有技巧的形式（参见 7.9）。例如，当一个群体听到一个问题被提出并得到回答，但是仅仅一个子群得到了精确的答案，我们必须用一个新的算子——关系箭号剔除，而不是世界剔除。更精确地，相对那个子群的所有成员，

移走介于模型的区域间反映不同详细答案的箭号。

箭号剔除包括对当前关系用新的可达关系的代入，例如，当“ϕ?”被提问和回答时，在先前未被通知的子群众，相对主体 i 的不确定关系 $\sim_i$ 被以下关系的并替换：

$$(\phi)?;\sim_i;(\phi)?\ \cup(\neg\phi)?;\sim_i;(\neg\phi)?$$

这是旧关系到新定义关系的一个转换。

另一种方法带有更加复杂的“乘积更新”——它对应那些新的可定义对象构建的理论间的解释，就像我们用有序整数对来解释有理数。更新逻辑的公理将成为这种一般逻辑算子的原理论公理化成分。因此更复杂的更新概念对应标准逻辑更有技巧的理论关系。

最后，相对化提出了一些不同的剔除更新。过去我们总是抛弃旧的信息状态，现在可以保持旧的信息状态且经过相对化命题执行“事实上的更新”。这样，初始状态已经包括了所有可能进一步交流的发展。通过保持旧模型的出现做带有记忆的更新。在我们的逻辑中对维护过去的历史也有单独的考虑，因为不得不处理明确涉及“认知过去”的公开更新，比如：“你所说的我已经知道了。”

下面的 7.9 有更具体的例子。

7.7　重复宣告和有限行为

“一直说”

在泥孩子问题中，重复宣告无知的命题直到它不再是真的。在给定的模型中，这样的命题称为是*自我反驳的*：当这个命题有限次重复宣告后，到达了它在任何状态上都为假的阶段。当然，自我反驳无知的命题会产生对我们有用的结果，即知识。相对这种有限行为也有一个类似的例子：自我实现命题的有限次重复宣布使它们变成公共知识。这出现在 7.4 中关于事实或其他断定的第一步。技术上，这意味着重复宣布 A 的过程得到一个不动点。更精细的情况在［van Benthem. 2002］中已经讨论，即在策略博弈中，选手不断重复理性联合断言，即说人们将仅仅选择那些可能是最佳回应的行动。这些行动可以缩小有效策略集直到一个“最佳区域”，它要么由一个纳什均衡组成，要么那里至少有一些理性的策略。

界限和不动点

两个选手 1，2 理性地重复宣告有下面简单的模态形式，这里我们想当然地认为没有动机：

$$JR:\quad \Diamond_1 B_1 \wedge \Diamond_2 B_2$$

这里的命题变元 B_i 指在当前状态下 i 的行动是对他的对手的行为的一个最佳回应。可以证明任何有限博弈矩阵包含这种环上的世界（对应的认知模型上的世界）：

$$x_1 \models B_1 \sim_2 x_2 \models B_2 \sim_1 x_3 \models B_1 \sim_2 \cdots \sim_1 x_1 \models B_1$$

联合理性 JR 的重复宣布可以不断地减少世界，因为每轮可以除去一个他们共同依赖且满足 B_i 的世界。但是，上述的整个环显然总是保持不变，因为它们形成了一种相互保护的团体。因此，我们有

事实 6 关于有限博弈模型强理性是自我实现的。

上面表明可以用不动点算子来扩张更新逻辑。就像扩张模态逻辑到 μ 演算。最小最大不动点语法定义为 $\mu p \cdot \phi(p)$ 和 $\nu p \cdot \phi(p)$。细节部分见［Parikh. 2002］，更一般的不动点逻辑见［Ebbinghaus & Flum. 1995］。因为其中包括微妙的问题（参见［van Benthem. 2002］），我们做些探究。作为开始，我们有

事实 7 经过重复宣告 JR 得到的稳定集在整个原初始博弈模型中可以由以下最大不动点公式定义：

$$\nu p \cdot (\Diamond_E(B_E \wedge p) \wedge \Diamond_A(B_A \wedge p))$$

动态逻辑中的迭代宣告。在任意模型 $\mathfrak{M}$ 上，我们可以一直宣告任意公式 ϕ，直到得到一个不动点，空集或非空集：

$$\#(\phi, \mathfrak{M})$$

例如，模型 $\mathfrak{M}$ 上的自满足公式 ϕ 变成 $\#(\phi, \mathfrak{M})$ 中的公共知识：

$$\phi \rightarrow (C_G\phi)^{\#(\phi,\mathfrak{M})}$$

这里我们可以得到哪种不动点呢？技术上，连续应用下面集函数，并求有限序数的交集，产生 $\#(\phi, \mathfrak{M})$：

$$F_{\mathfrak{M},\phi}(X) = \{s \in X | \mathfrak{M}|X, s \models \phi\}$$

$$\mathfrak{M}|X \text{ 是 } \mathfrak{M} \text{ 在 } X \text{ 上的限制}$$

这里映射 F 是非单调的，且不适用于不动点的一般理论。原因在于从模型 $\mathfrak{M}$ 到子模型 $\mathfrak{M}|X$ 命题 ϕ 的真值可能会改变。尤其是，我们不能在不变的模型中重新计算场景，因为使用最大不动点公式 $\nu p \cdot \phi(p)$ 的正规语义改变了模态算子的范畴，而不在更小的模型中。因此，我们用不动点和相对化来计算（参见 7.6）。尽管 F 不是单调的，但是迭代宣告是以下类型的不动点方法：

事实 8 迭代宣告的界限可以定义为所谓的膨胀不动点。

证明： 对任意的 ϕ，和一个新的命题变元 p，产生 $(\phi)^p$。这里的 p 未必总是正出现（当相对正的 K 算子时，出现的是 $\neg p$）。前面的认知相对化引理是说

$$\mathfrak{M},\ s\models(\phi)^{p}\text{ 当且仅当 }\mathfrak{M}|X,\ s\models\phi$$

因此，上面定义的 $F_{\mathfrak{M},\phi}(X)=\{s\in X|\mathfrak{M}|X,s\models\phi\}$ 等价于

$$\{s\in\mathfrak{M}|\mathfrak{M},\ s\models(\phi)^{p}\}\ \cap X$$

并且产生了一个膨胀不动点（[van Benthem. 2002]）。■

另一方面，为什么在认知 μ 演算中，*JR* 的迭代宣告能产生一般的最大不动点呢？上面的更新映射 $F_{\mathfrak{M},\phi}(X)$ 对于特殊种类的公式是单调的：

事实9 $F_{\mathfrak{M},\phi}(X)$ 对于存在模态公式是单调的。

原因是这样的模态公式在模型扩张中保真。产生的 F 关于集合的包含关系是单调的：参见7.4的相关的保持性问题。尽管认知 μ 演算是可判定的，然而它的膨胀不动点扩张是不可判定的，这些语法方面的问题涉及关于迭代宣告推理的复杂性。

离题讨论：更新序列的比较

更新逻辑是很微妙的。此处也不例外。选手理性地做不同的重复宣告结果会怎样呢？继 *JR* 之后，[van Benthem. 2002] 考虑了一个更弱的合理性断言 *WR*。这样是否能保证它们极限的包含关系：

$$\#(SR,\mathfrak{M})\subseteq\#(WR,\mathfrak{M})?$$

答案一般是否定的。重复作出更弱的断言可能导致无法比较的后果。例如，公式 ϕ 和它的后承 ψ：

$$\phi=p\wedge(\Diamond\neg p\rightarrow\Diamond q)$$
$$\psi=\phi\vee(\neg p\wedge\neg q)$$

在下面的认知模型中，ϕ 的更新序列在一步后停在世界1，而 ψ 的序列则如下：{1，2，3}，{1，2}，{2}。

$$\underset{p,\ \neg q}{1}\text{———}\underset{\neg p,\ \neg q}{2}\text{———}\underset{\neg p,\ q}{3}$$

但有时可以得到上述包含关系。

事实10 如果在模型 $\mathfrak{M}$ 上有一个存在公式 ϕ，它蕴含 ψ，那么 $\#(\phi,\ \mathfrak{M})\subseteq\#(\psi,\ \mathfrak{M})$。

证明： 因为，如果 $X\subseteq Y$，那么 $F_{\mathfrak{M},\phi}(X)\subseteq F_{\mathfrak{M},\psi}(Y)$，所以，总有 $T_{\phi}^{\alpha}(\mathfrak{M})\subseteq T_{\psi}^{\alpha}(\mathfrak{M})$。因为，如果 $\mathfrak{M}|X,\ s\models\phi$，且 $s\in X$，那么 $s\in Y$，且 $\mathfrak{M}|Y,\ s\models\phi$——由 ϕ 的模态存在形式。另一方面，由蕴含式的有效性，也可以得到 $\mathfrak{M}|Y,\ s\models\psi$。■

另一种类型的不动点

迭代宣告可以通过动态逻辑中的有限迭代 * 来表达（参见 7.2.2）。[Baltag, et al. 2003] 对此进行了研究，研究表明，形如$\Diamond_{(A!)^*}C_GA$ 的公式在模态 μ 演算中是不可定义的。尽管如此，我们知道带有程序迭代的公式$\Box_{(A!)^*}\phi$ 通过最大不动点算子 $\nu p\cdot\phi\wedge\Box_{A!}p$ 是可定义的。但是这些公式在以前的型中不能分析，因为它们包括 p 对 A 的相对化，并非更容易处理 A 相对 p，正如我们在重复宣告的分析中发生的那样。

7.8 推理相对于更新

动态推理

标准认知逻辑是在不发生变化的信息模型上刻画推理。更新动态的最新文献提出了一些更令人振奋的想法（参见 [van Benthem. 1996]）：

如果连续公开宣告前提 P_1，…，P_k 更新任意的信息状态后，最后状态上所有世界都满足 ϕ，那么可以从前提动态地得到结论 ϕ。

因此，在动态认知逻辑中，公式$\Box_{P_1!;\cdots;P_k!}C_G\phi$ 一定是有效的。

对于前提，这不同于经典逻辑：

陈述事件的有序性

从 A，B 和从 B，A 得出的结论未必相同：

证实$\neg Kp$，p（一致），却不能证实 p，$\neg Kp$（不一致）。

发生事件的多样性

$\neg Kp\wedge p$ 和（$\neg Kp\wedge p$） $\wedge$ （$\neg Kp\wedge p$）有不同的更新结果。

增加前提能扰乱结论

$\neg Kp$ 蕴含$\neg Kp$，然而$\neg Kp$，p 并非蕴含$\neg Kp$。

相反，经典逻辑的推理规则显示事件的有序性、多样性和增加前提不会产生以上问题。不过，我们有一个详述。

结构规则和表示法

[van Benthem. 2003] 中三个修改的结构规则对上述定义的动态推理是有效的：

左单调性	$X\Rightarrow A$ 蕴含 B，$X\Rightarrow A$
谨慎单调性	$X\Rightarrow A$ 且 X，$Y\Rightarrow B$ 蕴含 X，A，$Y\Rightarrow B$
左切割	$X\Rightarrow A$ 且 X，A，$Y\Rightarrow B$ 蕴含 X，$Y\Rightarrow B$

进而，具有下面的完全性：

定理4　动态推理的结构性质可以通过左单调性、谨慎单调性和左切割规则完全地公理化。

证明的关键是对一个表示法的证明，即要证明在模态逻辑中每个抽象的有穷树模型可以在互模拟意义上表示为如下形式：

世界 w 固定一类认知模型 $\mathfrak{M}_w$

基本行动 a 固定一个适当的认知宣告(ϕ_a)

这表明公共更新是一个相当普遍的方法，它能以"交谈博弈"的形式对任意进程进行编码。

推理对于更新

这里有一个普遍性的问题。逻辑有两种不同的推理方法：一种是普通推理，涉及蕴含式 $A \to B$；一种是模型变换下的相对化推理，关系到原先的公式 $\Box_{A!}B$。两种推理方法都是重要的，公开更新是这两种方法的综合。

即使这样，一个经验主义的问题依然存在。泥孩子推出了结论，但他们并没有画出更新图。我们头脑中究竟是如何进行的呢？

7.9　更广泛的世界

如7.1所言，更新分析有两个主要方向：一个是通过新的模型和机制扩大研究的广度，一个是增加对已有逻辑的深度理解。本文关注的是后者，希望表明交流中逻辑问题的重要性。通过本节提供给读者错过的问题的一个快速概览。

对过去断言的追踪　一些难题涉及过去的状态，像人们说"你说的话并不使我感到吃惊"（[McCarthy. 2002]）。这说明在过去的状态上他们知道，这里需要一个进一步的更新。为了完成这个更新，我们需要保持过去的更新，而不是仅仅在完成之后就丢弃先前的场景。在这个限制下，像前面一样，这个丰富的框架也许应该包括关于我们所在的交流类型的协议信息。

私密和隐藏　考虑比公开交流更复杂的下一个阶段还包括隐藏信息，不管是善意地去隐藏，还是因为部分地可观察。下面是一个来自于[van Benthem. 1998A]的简单例子：

> 我们都持有一个密封的信封。两封信的内容分别是邀请参加一个逻辑演讲和参加阿姆斯特丹狂欢夜，这是公共知识。但是我们并不知道每个信封里的具体内容。现在，我打开信封，并阅读信中的内容，但是没

有让你看到我信的内容。你的信封没有打开，哪些信息因为我的行动改变了呢？我现在已经知道自己信封的内容。然而你也认识到了某些变化，即你知道我知道。这也是公共知识。如此等等。这背后的一般原理是什么呢？

初始信息状态如图 7-13：

我
L N
你

图 7-13

直觉上的更新仅仅剔除了我的不确定关系—然而两个可能世界依然存在，因为仍旧需要它们来为你对基本事实的持续无知构建模型：

直观的更新模型如图 7-14：

L N
你

图 7-14

在纸牌游戏中，当选手公开地把牌给其他选手看时，而不是所有选手，这样的更新也经常发生。然而，纸牌更新也能扩充模型的大小。假设我打开自己的信封，但是你不能辨别我是否读了纸牌没有，事实上我看了。在这种情况下，直观的更新模型是

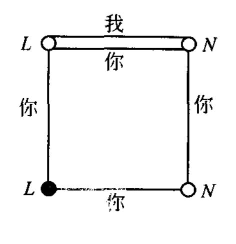


图 7-15

文献［Gerbrandy. 1999；Moss，et al. 1998；van Ditmarsch. 2000］提出了关于这种类型的更新方法。一般思想如下。复杂交流包括两部分：当前的信息模型 $\mathfrak{M}$，行动模型 $\mathfrak{A}$，行动产生于能使它们成功执行的事前条件。例如，诚实公开宣告 $A!$，在 $\mathfrak{A}$ 满足的情况下才能发生，一般的更新模型是这两个模型的积 $\mathfrak{M}\times\mathfrak{A}$，它的状态（$s$，$a$）标明了在 s 发生的行动，若 a 的事前条件在 $\mathfrak{M}$，s 上可满足。这也许彻底地改变了旧模型 $\mathfrak{M}$。这是基本的认知条件。新的状态上的不确定关系：

$$(s,a)\sim_i(t,b) \quad \text{当且仅当} \quad s\sim_i t \text{ 且 } a\sim_i b$$

第一个例子中，行动是“读演讲的信（读 L）”和“读狂欢夜的信（读 N）”，考虑真正的事前条件并找出新的不确定关系得到新的更新模型

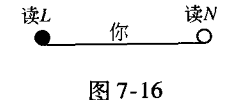


图 7-16

第二个例子包括行动“什么都不做（do nothing）”，它的事前条件是“$\top$”。在这里我可以区分前两个行动，你却不能。乘积更新模型有四个状态的：(L，读 L)，(L，什么都不做)，(N，读 N)，(N，什么都不做）——通过乘积更新得到主体的不确定关系恰好与前面的直观图一致。

显然，在乘积更新模型中认知命题的真值可以被彻底地改变。动态认知逻辑很让人兴奋，它包含在一个适当的语言中，组合在模型 $\mathfrak{M}$ 中真的认知公式和关于 A 表达的认知信息。本文对公开更新的很多关注将会在更复杂的关系更新的研究出现。这是一个有趣的例子，它是关于一般更新问题的。[van Benthem. 2005] 中列出了很多更新逻辑中新的开问题。

更新论域的进化

公开宣告和更新不一样，乘积更新能扩张初始输入模型 $\mathfrak{M}$ 的大小。下面是一个信息模型扩张的简单例子。

例 1　假设对群体 {1，2} 公开宣告事实 P，但 2 不确信这是 P 的宣告，或者恰好有个恒等行动 Id 可以在任何情况下发生。在这种情况下，带有 P 和 $\neg P$ 的两个世界的模型变成了具有 3 个世界的模型：$(P,\text{“}P!\text{”}),(P,Id),(\neg P,Id)$。

这种模型扩张的典型事例发生在博弈中。选手开始于一个初始状态模型 $\mathfrak{M}$，比如发纸牌，行动模型 $\mathfrak{A}$ 包括选手所有可能的行动——这些行动在选手的轮次上可获得时还带有事前条件的限制。博弈树由树模型上节点的所有可能的进化组成。这样的结构可以更精确地定义如下：

定义 3　给定初始状态模型 $\mathfrak{M}$ 和行动模型 $\mathfrak{A}$，那么*更新进化模型* $TREE(\mathfrak{M},\mathfrak{A})$ 是一个无穷认知模型，它是由所有连续的积更新层的不相交拷贝组成的

$$\mathfrak{M},\mathfrak{M}\times\mathfrak{A},(\mathfrak{M}\times\mathfrak{A})\times\mathfrak{A},\cdots$$

关于主体的能力，[van Benthem. 2001] 给出了一个充要条件：什么条件下不完全信息的任意扩展博弈能用 $TREE(\mathfrak{M},\mathfrak{A})$ 的形式来表达。其次，正如我们看到的，$TREE(\mathfrak{M},\mathfrak{A})$ 的水平线宽度是不断增加的。通过乘积更新的扩充是值得注意的，尤其在有复杂交流行动的室内博弈如“Cluedo”中（[van Ditmarsch. 2000]），但是这里的无穷大看起来是伪造的——因为在很多博弈中，

在博弈中间信息的复杂度增加，但是在接近博弈终点时又会减少。这种反作用力就是认知的互模拟收缩。

例 2（互模拟下的稳定性） 考虑带有两个世界 P 和 $\neg P$ 的模型，它们之间有 1 不确定关系，没有 2 不确定关系，现实世界是 P：

1
P $\neg P$ $\mathfrak{M}$

图 7-17

现在诚实宣布 P，且主体 1 可以听到，但是主体 2 认为宣告的也许是“*True*”，这个情境的行动模型如下：

2
（事前条件：P） $P!$ Id $\mathfrak{A}$ （事前条件：T）

图 7-18

TREE($\mathfrak{M}$，$\mathfrak{A}$) 的其他两个层如下：

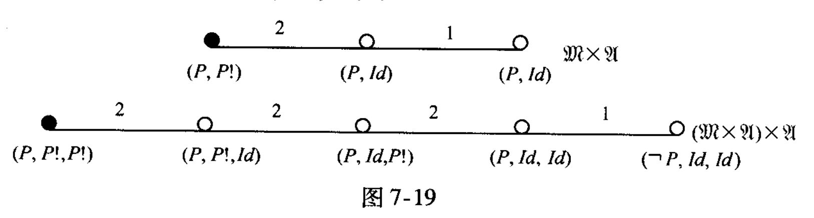


图 7-19

最后两个层之间有一个认知互模拟，上面靠左的三个世界和 $\mathfrak{M}\times\mathfrak{A}$ 中的（P，$P!$）相关联。因此，$(\mathfrak{M}\times\mathfrak{A})\times\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{M}\times\mathfrak{A}$ 互模拟，且在更新进化中潜无穷次的迭代以互模拟为模保持有限。

本文的最初版本提出了一个“有限进化猜想”，是说：从给定的有限模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{A}$，模型 *TREE*（$\mathfrak{M}$，$\mathfrak{A}$）以互模拟为模总是有限的。这蕴含着树中的一些层一定是互模拟的。比如说在深度为 k 和 l（$l>k$）的层——接下来，无穷“振荡”出现。但是，文［Sadzik. 2004］否定了它，那里证明这个猜想在某些双主体的 **S5** 模型中是不成立的。然而，这个猜想对很多特殊情况的模型都是成立的。例如，当模型 $\mathfrak{A}$ 中的认知可达关系相对所有的主体对于包含形成线性序时。［Sadzik. 2004］用 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{A}$ 上的有限小卵石博弈来确定 *TREE*($\mathfrak{M}$，$\mathfrak{A}$) 以互模拟为模有限时的条件。这个事实成立当且仅当这个博弈中“回应的选手”有赢的策略。以互模拟为模的有限更新进化的计算复杂性问题一直没有得到解决。因此，也许有大量的交流情境类满足有限进化猜想——例如，类似于室内博弈的那些情境。

7.10 普遍交流

复杂性和多样性

乘积更新中，通过一次或迭代更新能表达出多种交流，并给出主要框图。在考虑生活中交流时，自然会包括误导、撒谎、欺骗等。理论上，也可以用乘积更新来表达误导、撒谎和欺骗，但是那里仍然有很多精细的结构需要理解。该领域更有技术挑战的是隐藏机制，比如网络中的安全机制。

交流的复杂性和多样性的另一个原因是人的局限性，比如有限记忆或有限的关注范围。理想主体可以执行认知更新，但事实上主体也是理性受限的。由于主体的多样性，描述更一般的交流需要发展更多更精细的逻辑，参见［van Benthem & Liu. 2004］。

博弈和社会软件

不但有分析，而且有综合。交流包括针对目的有规划的言论。博弈广泛适用于分析交流，它包括偏好和策略（参见［Baltag. 2001；van Benthem. 1999 ~ 2002；van Benthem. 2002］）。最近称为社会软件的一个实例是：设计一个满足认知描述的方法，比如某人知道了什么（参见［Parikh. 2002；Pauly. 2001］）。下面考虑一个更具体的社会软件（和硬件）的例子：电子邮件。当你向朋友宣告一个事实，并发送副本内容给他，从效果上看这是公开宣告。但是，如果你按隐蔽副本按钮，新的信息状态需要乘积更新，这也许增加复杂性。处理邮件和它提供的交流选项是一个逻辑上并非平凡的任务。

交流通道

经过广泛的展望之后，我们回到现实中一个具体的例子，这个例子基于一道智力测验题。1998 年荷兰国家研究机构 NWO(［Nationale Wetenschapsquiz. 1998］)的“全国科学竞赛”中有这样一个题目：

> 有6个人，每人拥有一个秘密。任何两个人通过电话可以交流秘密。要使每个人知道所有的秘密，他们需要电话交流的最小次数是多少？

备选答案是：7，8，9。正确答案是8。可以证明 N 个人电话交流的最佳次数是 $2N-4$。这个结果并不难懂，但是证明的难度却令人吃惊。4 个人能共享秘密的最佳算法是通过4 次电话交流：

1 与 2，3 与 4，1 和 3，2 和 4。

在 N 个人中任意选出4 人。

首先让其余的 N-4 个人和这 4 个人中的某个通话，接下来，让开始选出的 4 个人通话共享秘密，最后这 N-4 个人再与原来同他们通过话的那个人通话。

通话的总次数为 $2N$-4。这个例子提出了一个普遍性的问题。当我们使语义参数，即交流网络进一步明确时，更新逻辑有什么变化呢？我们列举的公开宣告事例预设了某个公开传播的系统。这里谈到的难题假定的是两两之间的电话联系，而不是电话会议。可以考虑去寻找一些把想要的输出和网络性质连接起来的结果。例如，容易证明：

要想取得关于秘密的普遍知识，当且仅当，网络是连通的：任意两个人之间有电话交流序列连通。

还有很多有趣的现象。假设在不同的小山顶上分别驻有 3 个将军带领的部队，他们计划联合攻击山下的敌人。他们只能通过两个之间电话联系。为了成功实现联合攻击，必须把三方中某方的信息 p 变成公共知识。他们能得到公共信息 p 吗？问题的答案有赖于特定的情境或协议。然而，这真正包括更新逻辑框架到时态框架的扩张（[Fagin, et al. 1995; van Benthem. 2003]）——也包括带有通道的结构化群体。

如果将军们仅仅秘密交流，即使交流包括他们通话的所有信息，也不能得到公共知识，正如大家所熟悉的两个将军在不可靠交流下的问题。直观地说，即总有人对最后发生的交流不确定。精确一点说，对于这种不确定的乘积更新，至少会保留一个主体的从现实世界到 $\neg p$ 世界的不确定链，从而阻止公共知识的生成。但是，如果和 B 通话共享信息的将军 A 告诉 B 他将和 C 通话，并告知他俩之间的所有谈话，包括这个和他通话的承诺，结果又如何呢？这就像意见分歧成员间的调解人。这样能产生公共知识吗？这有赖于主体是否相信承诺会被履行。如果他们相信，那么，行动和观察将产生一个特定的场景，在那里乘积更新将直接传递公共知识。

这里只是非正式的介绍，我们不做进一步的探讨。这种介绍，仅仅是为了说明更新逻辑自然也适合描述交流的其他问题，比如通道的可及性和可靠性等。

7.11 逻辑与交流

传统上，逻辑是研究推理的。如果我想要解决某个问题，就坐在椅子上，闭目思考。当然，也可以走出去向别人询问，但这有点像欺骗。我们曾经在格罗宁根大学举办过一个讨论班，研读牛顿的《数学原理》和《光学》两大著作。《数学原理》很好：纯粹是推理，并且不损坏被认可的已知事实。但是，《光学》对我们却是一个打击，因为它非常没有原则！它的基本公理甚至包括了一些没有理

性的事实，为了验证它，你不得不在一个晴天出去，观察光线落在棱镜和胶片上是什么样子。对于牛顿来说，我们观察得到的东西和推理得到的东西一样确定。对日常生活也是如此：向自然界或其他具有丰富知识背景的事物（比如人）询问，同样可以产生确定的信息。本文一个最带有普遍性的观点就是认为逻辑同样可以对此说上很多话。我们可以把这看做是逻辑议程的扩展，事实也是这样做的。最终，对原来的核心问题也有影响。比方说，当把对交流的分析作为研究一阶逻辑的核心任务之一时，我们最希望它具有什么样的元性质呢?

对此，不再详细阐述，因为本文已经占用读者太多的时间。并且无论如何，纯粹交流的时代已经过时了。既然你已经告诉我通向古罗马圆形剧场的道路，应很久以前我的战士的请求，现在是我该利用这个知识实施行动的时候了。

对原版本的补充说明

本文写于2002年，用于当时在阿姆斯特丹大学的一个 *ILLC* 学术报告。其间，问题有了很多新的发展：更新论域的研究更加深入(Sadzik. 2004)，这里提到的部分问题已经被解决（参见［van Benthem. 2005］)，应用归约的方法对带有公共知识的动态认知逻辑的统一公理化([van Benthem，van Eijck & Kooi. 2005])，以及时序逻辑和博弈论的广泛引入（［van Benthem. 2005］)。关于动态认知逻辑的著作也即将出版，参见［van Ditmarsch et al. 2007］。

参考文献

Andréka H, van Benthem J, Németi I. 1998. Modal logics and bounded fragments of predicate logic. *Journal of Philosophical Logic*, 27: 217 ~ 274

Baltag A, Moss L, Solecki S. 2003. Updated version of 'The logic of public announcements, common knowledge and private suspicions', *Proceedings TARK* 1998. Department of Cognitive Science, Indiana University, Bloomington and Department of Computing, Oxford University

Baltag A. 2001. Logics for insecure communication. // *Proceedings TARK VIII.* Los Altos: Morgan Kaufmann Publishers: 111 ~ 121

Barwise J, Moss L. 1997. *Vicious Circles.* Stanford: CSLI Publications

Blackburn P, de Rijke M, Venema Y. 2001. *Modal Logic.* Cambridge: Cambridge University Press

Ebbinghaus H-D, Flum J. 1995. *Finite Model Theory.* Berlin: Springer

Fagin R, Halpern, J, Moses Y, Vardi M. 1995. *Reasoning About Knowledge.* Cambridge (Mass): The MIT Press

Gerbrandy J. 1999. *Bisimulations on Planet Kripke.* PhD thesis. ILLC, University of Amsterdam

Halpern J, Vardi M. 1989. The complexity of reasoning about knowledge and time. *Journal of Computer and Systems Sciences*, 38: 195 ~ 237

Hollenberg M. 1998. *Logic and Bisimulation.* PhD thesis series, Vol. XIV. Zeno Institute of Philosophy, University of Utrecht

Kozen D, Harel D, Tiuryn J. 2000. *Dynamic Logic.* Cambridge (Mass): The MIT Press

Marx M, Venema Y. 1997. *Multi-Dimensional Modal Logic.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

McCarthy J. 2002. Two puzzles about knowledge, Department of computer science, Stanford University

Moore B. 1985. A formal theory of knowledge and action. Tech Report. Menlo Park: SRI International

Moss L, Solecki S, Baltag A. 1998. The logic of public announcements, common knowledge and private suspicions. *Proceedings TARK* 1998. Los Altos: Morgan Kaufmann Publishers: 43 ~ 56

Nationale Wetenschapsquiz, NWO The Netherlands. 1998. Gossip Puzzle. http: //www. nwo. nl/

Parikh R. 2002. Social software. *Synthese*, 132: 187 ~ 211

Pauly M. 2001. *Logic for Social Software.* PhD thesis. ILLC, University of Amsterdam

Plaza J. 1989. Logics of public announcements. // *Proceedings 4th International Symposium on Methodologies for Intelligent Systems.*

Sadzik T. 2004. Dynamic epistemic update system. Manuscript. Department of economics, Stanford University

Stirling C. 1999. Bisimulation, modal logic, and model checking games. *Logic Journal of the IGPL*, 7: 103 ~ 124

van Benthem J, Liu F. 2004. Diversity of agents in games, *Philosophia Scientia*, 8: 163 ~ 178

van Benthem J, van Eijck J, Kooi B. 2005. A logic for communication and change. Tech Report. ILLC & CWI Amsterdam, Philosophy Department, Groningen. Official version, 2006. Logics of communication and change. *Information and Computation*, 204: 1620 ~ 1662

van Benthem J. 1996. *Exploring Logical Dynamics.* Stanford: CSLI Publications

van Benthem J. 1997. Dynamic bits and pieces. Tech Report LP-97-01. ILLC, University of Amsterdam

van Benthem J. 1998A. Annual report Spinoza Award project "Logic in action". ILLC, University of Amsterdam

van Benthem J. 1998B. Dynamic odds and ends. Tech Report ML-98-08. ILLC, University of Amsterdam

van Benthem J. 1999A. Radical epistemic dynamic logic. Note for course "logic in games". ILLC, University of Amsterdam

van Benthem J. 1999B. Update as relativization. Manuscript. ILLC, University of Amsterdam

van Benthem J. 1999-onwards. *Logic in Games.* Lecture notes. ILLC, University of Amsterdam. 1999 – 2002. Printed versions as well as downloadable from http: //staff. science. uva. nl/ ~ johan

van Benthem J. 2000. Update delights. Invited lecture, *ESSLLI Summer School*, Birmingham. Manuscript. ILLC, University of Amsterdam

van Benthem J. 2001. Games in dynamic epistemic logic. *Bulletin of Economic Research*, 53: 219 ~ 248

van Benthem J. 2002. Rational dynamics. Invited lecture. LOGAMAS Workshop, Department of Computer Science, University of Liverpool; ILLC, University of Amsterdam. Intermediate version in Vannucci S, ed. 2003. *Logic, Game Theory, and Social Choice*. Vol. III. University of Siena, Department of Political Economy, 19 ~ 23. Final version, 2007. Rational dynamics, *International Game Theory Review*: 9, 13 ~ 45, 377 ~ 409

van Benthem J. 2003. Logic and the dynamics of information. *Minds and Machines*, 13: 503 ~ 519

van Benthem J. 2003. Structural properties of dynamic reasoning. // Peregrin J, ed. *The Dynamic Turn*. Amsterdam: Kluwer Academic Publishers: 15 ~ 31

van Benthem J. 2005. Update and revision in games. Paper for *APA-ASL Joint Meeting*, San Francisco. Continuation of "A mini-guide to logic in action", 2004. *Philosophical Researches*. Supplement. Chinese Academy of Sciences, Beijing: 21 ~ 30

van Benthem J. 2006. Open problems in update logic. // D. Gabbay, S. Goncharov & M. Zakharyashev, eds. *Mathematical Problems from Applied Logic I*, Springer: 137 ~ 192

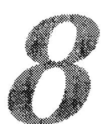
van der Meyden R. 1998. Common knowledge and update in finite environments. *Information and Computation*, 140: 115 ~ 157

van Ditmarsch H, van der Hoek W, Kooi B. 2007. *Dynamic Epistemic Logic*. Berlin: Springer

van Ditmarsch H. 2000. *Knowledge Games*. PhD thesis. ILLC, University of Amsterdam

van Ditmarsch H. 2002. Keeping secrets with public communication. Tech Report, Department of Computer Science, University of Otago

Wooldridge M. 2002. *An Introduction to Multi-Agent Systems*. Colchester: John Wiley



信念修正的动态逻辑*

郭美云　萧瑶/译　刘奋荣/校

8.1　信息更新和信念修正

AGM 方案（[Gärdenfors. 1987；Fagin，et al. 1995]）的信念修正理论和信息变化的动态认知逻辑（*DEL*；[Baltag，et al. 1998；van Benthem. 2006]）是逻辑“动态转向”的两个主要表现方面，它们明确地让广泛的信息处理成为逻辑系统的一个部分。显然，两者之间有可比较的话题，本文旨在提出一个接合的视角。

但这两者的融合有困难。首先，*AGM* 在分析信念变化时，不执行任何固定的操作而只在过程中提供抽象的假设；相应地，*DEL* 用具体的改变模型的更新程序来处理问题，寻找反映它们特性的完备的逻辑。其次，*AGM* 只处理单个主体和事实信息；而 *DEL* 处理的是多主体间的交互式作用，通常也包括一些高阶信息，即关于其他主体知道什么，相信什么，或者不知道什么，不相信什么的信息。最后，从简单的事实宣告到复杂的包含-信息事件，*DEL* 都清楚地分析了信息变化的“触发点”。然而，*AGM* 和相应的逻辑并没有明确地分析产生信念变化的事实，而只关注代替它们的三个特殊的运算：$+A$（更新），$*A$（修正），$-A$（收缩），三个运算作为认知行为的全部组成部分，其完备性依旧是个问题。

初看起来，尽管它们有很多不同的，但逻辑动态学的两种方案——信息更新和信念修正，通过探索 *DEL* 方法论的基本特性，是可以相互作用甚至被整合在一起。为了做到这一点，我将主要考虑改变主体的信息和信念的两个非常简单的“触发点”，也就是“硬事实”和“软事实”。在介绍它们以前，首先考虑认知语言和信念语言的通常模型在直观上的差异。

---

* Dynamic Logic for Belief Revision. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 2007，17：129～156

一个主体认为一些命题是“良确立”为真的，在这种意义上，这些命题可以称为*知识*。而其他命题代表容易变化的*信念*，当输入一个新的信息以后，它们可能发生变化。我们不需用沉重的哲学术语来讨论它们。只需考虑类似于下面这样的一些简单情景。扑克牌可以作为例子，我知道一副扑克有 52 块牌，也知道它们的颜色。但是对于谁拥有哪些牌，或者其他玩家将如何出牌，我只有短暂的信念。当然，我甚至认错了这些牌（或许有人用比尔・克灵顿的名片代替红桃 *K*），但这种担心看起来是多余的，在理解一般的信息变化也不是十分有用。对应于这些差别，在我的模型中，不同的事实能触发不同的变化。事实 *P* 的一个新的公开宣告 !*P* 就是*硬信息*的一个实例，它改变了我所知道的。如果我看到黑桃 *A* 被打在桌上，我就知道没有玩家再拥有它。这种类型的“触发”推动了当前逻辑中的信息更新和知识改变——8.2 将对此进行解释并概述 *DEL* 的基本知识。当然，除此之外，硬信息也可以改变当前的信念——8.3 将为之提供一个完备的逻辑系统。

但是紧接着，这里有关扑克牌的*软信息*，它影响我的信念但不影响我的知识。我看见你笑了——这意味着你很可能有一张王牌，但也不排除你没有。8.4 介绍这样的软信息行为 **P* 和主体随之产生的信念变化。在相关的静态模型中，这些影响是通过改变可能世界间的“合理性关系”而产生的，它们支持绝对信念和条件信念的正规算子。我们再次提出完备的动态逻辑，这次是为了几个不同的修正策略。综合考虑的结果表明，特定的信念修正策略在 *DEL* 方案中可以完全地公理化。8.5 从“下”到“上”将这个视角颠倒过来。我们着眼于信念修正的一些抽象的假设，并且阐明“模态框架对应”的标准方法是如何分析这些假设的——“限制可能的模型变化的操作”。特别地，我们将展示 *DEL* 自身是如何给出那些相关的分析，关于它的公理是如何精确地刻画模型和主体，也将提供一个新的视角。一旦这些联系建立起来之后，很多深入的问题就出现了。特别地，这里也有一些硬信息和软信息的混合在一起的事件，要公正地对待它们，我们需要深入到事件模型的微细-结构和 *DEL*-式的更新当中去。8.6 提出了一个概要，同时也讨论了几个深入的问题。最后，8.7 阐明了我们的结论和需要进一步研究的问题。

8.2　公开宣告的动态逻辑

8.2.1　经典的认知逻辑

认知逻辑的语法是在经典的命题逻辑的基础上，增加模态算子 $K_i\phi$（主体 i

知道 ϕ）和 $C_G\phi$（ϕ 是群体 G 的公共知识）而形成的：

$$p \mid \neg \phi \mid \phi \vee \psi \mid K_i\phi \mid C_G\phi$$

我们将 $K_i\phi$ 的对偶式写作 $\langle i\rangle\phi$，表示“主体 i 认为 ϕ 是可能的”。$C_G\phi$ 的对偶式写成 $\langle C_G\rangle\phi$。该语言所对应的模型 $\mathfrak{M}$ 是三元组 $(W, \{\sim_i \mid i \in G\}, V)$，这里 W 是可能世界的集合，$\sim_i$ 表示可能世界间的二元可及关系，V 是一个命题的赋值。尽管这里的可及关系是可以任意选择的，但通常选取等价关系作为它们的可及关系。认知的真值条件如下：

$\mathfrak{M}, s \models K_i\phi$ 当且仅当对所有的 t，如果 $s \sim_i t$，那么 $\mathfrak{M}, t \models \phi$；

$\mathfrak{M}, s \models C_G\phi$ 当且仅当从 s 出发，对所有通过某个 $\sim_i$（$i \in G$）步骤的有穷序列到达的可能世界 t，都有 $\mathfrak{M}, t \models \phi$。

要了解各种模型类上的完备的认知逻辑，请阅读标准的文献（参见［Fagin, et al. 1995］）。

8.2.2　作为消除可能世界的公开宣告

真命题 P 的公开宣告改变了当前的模型，如下：

对任意模型 $\mathfrak{M}$，可能世界 s 和 s 中为真的公式 P，$(\mathfrak{M}|P, s)$ 是 $\mathfrak{M}$ 的子模型，其论域是集合 $\{t \in \mathfrak{M} \mid \mathfrak{M}, t \models P\}$。

从 $\mathfrak{M}$ 到 $\mathfrak{M}|P$ 发生的变化在图 8-1 中得以显示。

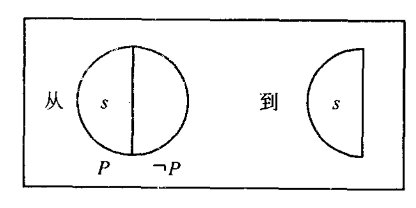


图 8-1

关键是，公式的真值在这一更新步骤中可以变化：最值得注意是，那些不知道 P 的主体在宣告后知道了 P。真值随着时间的变化是十分微妙的。因此，在合适的逻辑形式中，系统化地记录这种变化是非常有用的，公开宣告逻辑 *PAL* 的语言是增添了行为模态词的认知语言。

公式　P：$p \mid \neg\phi \mid \phi \vee \psi \mid K_i\phi \mid C_G\phi \mid [A]\phi$

行为模态词　A：$!P$

动态的行为模态词的语义解释如下：

$\mathfrak{M}, s \models [!P]\phi$ 当且仅当如果 $\mathfrak{M}, s \models P$，那么 $\mathfrak{M}|P, s \models \phi$

在公开宣告的条件下，有如下完备的信息变化的逻辑演算：（参见［Gerbran-

dy. 1999；Plaza. 1989]）。

定理 1　不带公共知识的 *PAL* 由一般的认知逻辑规则加上下面的归约公理可完全地公理化：

$[!P]q \leftrightarrow (P \rightarrow q)$ 对任意原子命题 q

$[!P]\neg\phi \leftrightarrow (P \rightarrow \neg[!P]\phi)$

$[!P](\phi \wedge \psi) \leftrightarrow ([!P]\phi \wedge [!P]\psi)$

$[!P]K_i\phi \leftrightarrow (P \rightarrow K_i[!P]\phi)$

例 1　（归约公理的可靠性）　我们只证明宣告后关于知识最重要的也是最后的一条归约公理。比较更新前后的两个模型：$(\mathfrak{M}, s)$ 和 $(\mathfrak{M}|P, s)$。画出相关的图形将有助于我们理解下面的证明。公式 $[!P]K_i\phi$ 的意思是在 $\mathfrak{M}|P$ 中，所有与 s 有 $\sim_i$ 可及关系的可能世界都满足 ϕ。在 $\mathfrak{M}$ 中相应的可能世界是与 s 有 $\sim_i$ 可及关系且满足 P 的那些可能世界。而且考虑到在更新过程中公式的真值是可以改变的，所以正确描述 $\mathfrak{M}$ 中的那些可能世界不再是它们满足 ϕ，而是 $[!P]\ \phi$——它们在更新后变成了 ϕ。最后，当 P 在公开宣告成真后，$!P$ 只是部分执行。因此，我们需要做出断定，在右边的条件中 $!P$ 可以被执行，也就是讲，P 是真的。将所有的这些加在一起，$[!P]K_i\phi$ 表达的意思与 $P \rightarrow K_i(P \rightarrow [!P]\phi)$ 相同。但是考虑到算子 $[!P]$ 只是在作部分执行的影响，我们能将最终的公式简化为它的等值式 $P \rightarrow K_i[!P]\ \phi$。

这种类型的证明同时是对归约条件进行的启发式分析，它还能解释更多的将在下文中出现的归约公理。①

这些精致的公理通过观察、交流或其他可靠的方式分析了有硬信息作用的推理。这种方法有两个主要特征。首先，这种分析是组合的，逐步打开了动态模态词 $[!P]$ 后面的"附加条件"。其次，动态的"归约公理"将我们的动态认知语言中的每一个公式逐步划归为只包含静态的纯认知语言的等价公式。就模型而言，这意味着当前的静态模型已经包含了主体交流后发生变化的所有信息。这个特性给静态的基本语言有所限制：该语言必须够丰富，足以进行预编码。例如，条件句为信念修正的未来行为的趋向预编码。用一个口号来讲，就是："目前的认知/信念已经包含了未来的认知"。就逻辑而言，归约程序意味着 *PAL* 是可判定的，因为它在静态认知的基本语言上是可判定的。*PAL* 还有更丰富的内容，包

① *PAL* 用来推理人们相互告知什么，在这方面它是成功的。然而对于不同的主体，它没有明确的公理。这个"社会"性质只在用迭代处理复杂公式的语形时才得以体现。通过引入群体知识这一概念，它将变得更加明显：参见后面关于公共知识的讨论。

含基于互模拟的模型理论，表达力的问题和计算复杂性。其中的一些问题将在下文中涉及。参见 [van Benthem. 2006B] 中对未解决的问题的概述。

8.2.3 *DEL* 的方法论

定理 1 简单地展示了基本的 *DEL* 方法论，原则上，使用它能“动态化”任意给定的逻辑系统。首先，选择静态的语言和相匹配的模型来表达群体的信息状态。接着，将相关的包含 - 信息的事件分析为改变模型的更新。这些事件能在动态扩张的语言中被清楚地表达出来，该语言也能通过这些事件发生以后成立的命题来陈述这些事件所产生的影响。在传统子结构的基础上，这里增加了一个动态的超结构。产生的逻辑有两层关系成立：

静态的基本逻辑——动态扩张

在静态层次上，无论你选择什么样的模型，都可以得到一个完备的公理系统。但在此基础上，有一组刻画事件影响的动态归约公理集。在归约公理集起作用的状况下，每一个公式都等值于相应的一个静态公式。因此，如果静态的基本逻辑是可判定的，那么它的动态扩张也是可判定的。[①]

原则上，动态认知逻辑的设计是模块化的，它独立于任何静态模型及其语言的特性。特别地，*PAL* 的归约公理不依赖于任何有关认知可及关系的假设。因此定理 1 成立仅当基础的模型是任意的，它使最小的 **K** 逻辑系统有效，从而适用于一些最小的信念逻辑。的确，一些关于 *DEL* 的经典教材建立它们的逻辑系统都是从头开始，参见 8.2.5 的进一步讲解。因此，在下文中，我们主要关注动态的超结构。

不过，一些静态结构和动态结构间的相互作用的确出现了。

例 2 保持框架条件

假定我们在基本的模型之上增加关系条件，像等价关系这种认知可及关系。这给出了更新方法中的一个相应的限制：它应该保持框架条件。对于等价关系及其他可以被全称一阶公式定义的条件，都可以确保传递到子模型中仍成立。更一般的是 8.6 的“乘积更新”，甚至给出模型，都可直接得到乘积的子模型。在那种情况下，唯一确认被保持的一阶框架条件是那些可定义为普遍的霍恩句子。自返，对称和传递确为后者的特殊形式，但像线性序这样的非霍恩普遍框架条件则并非如此，并且可能丢失。[Kooi. 2005] 有一些进一步的在技术上的研究。

① 这个归约没有解决计算复杂性：通过公理的翻译可以成指数倍地增加公式的长度。但实际上（参见 [Lutz. 2006]），对于 *PAL*，可满足的复杂性依旧是认知逻辑的复杂性，也就是，Pspace-完备。

例3　丰富基本语言以得到归约公理

假定我们增加一个新的认知算子到我们的基本语言，比如说公共知识。在这种情况下，对于公式 $[!P]C_G\phi$ 不存在归约公理。为了得到一个归约公理，我们需要引进一个新的概念——*条件公共知识*

$$C_G(P,\phi)$$

它让标准的认知逻辑语言更丰富。我们讲 ϕ 在所有经过有限步可及运算后可通达的可能世界中是真的，且通过的世界都满足 P。一般的 $C_G\phi$ 是它的一种特例，也就是 $C_G(True, \phi)$。一旦我们有了这个新算子，在 *PAL* 中对于公共知识，我们可以对下面有效的归约公理进行形式化：

$$[!P]C_G\phi\leftrightarrow C_G(P, [!P]\phi)$$

注意在后件中 $[!P]$ 的作用。在左边，用 $!P$ 更新之后我们看到的是 $\mathfrak{M}|P$ 中满足 ϕ 的可能世界，但是它们对应于在起初模型 $\mathfrak{M}$ 中满足先前的公式 $[!P]\phi$ 的可能世界。条件公共知识没有在基本的认知语言中定义，但它是互模拟不变的，而且利用已有的完备性的证明很容易给出定义。在这些扩张的基础上，我们有了一个有效的基本的归约公理来扩充 *PAL*。注意到，现在我们有了更丰富的语言，所以，我们必须让归约公理起作用于新的更强的公共知识形式，而不只是 $C_G\phi$。下一条公理将表明这个谱系在这里停止（[van Benthem, van Eijck & Kooi. 2006]）：

定理2　带条件公共知识的 *PAL* 通过增加归约法则以后可以完全地公理化，法则如下：

$$[!P]C_G(\phi,\psi)\leftrightarrow C_G(P\land[!P]\phi, [!P]\psi)$$

条件公共知识 $C_G(P, \phi)$ 再次成为预编码的方式，在当前模型中，公共知识在事实 P 学习过后将被获得。

8.2.4　关于 *PAL* 的一些语义关键点

我们现在简单地回顾一些 *PAL* 的语义特征，它对理解后面同类型的动态逻辑是重要的。

在真值和持久性方面的改变

一般地，新信息不会改变原子事实，但会改变主体的知识或无知。结果，在断定 $K_i\phi$ 和 $C_G\phi$ 时，真值的变化可能是微妙的，并且动态认知逻辑的观点一直精确地作用于它们。一些真命题甚至在宣告后有了变成假命题的这一反常的特性。一个关于摩尔类型断定的例子：

$$\neg K_i p \wedge p$$ “你不知道 p,但是 p 是真的”

在宣告后，事实 p 变成了公共知识，然后否认了第一个合取肢。然而其他的断定有这种性质——在宣告后的确成为公共知识。下面是成立，例如，这对于具有下面形式的所有公式都成立：

$$(\neg)p,\ (\neg)q,\ \cdots \mid \phi \wedge \psi \mid \phi \vee \psi \mid K_i\phi \mid C_G\phi$$

特别地，*PAL* 有一个明显的子逻辑——只有宣告事实的断定而没有任何认知算子。在这种情况下，任何宣告!P 都产生 P 的公共知识，并且归约过程更简单。

作为动态模态词的条件句

归约公理 $[!P]K_i\phi \leftrightarrow P \rightarrow K_i[!P]\phi$ 的确等值于另一种形式：

$$[!P]K_i\phi \leftrightarrow P \rightarrow K_i(P \rightarrow [!P]\phi)$$

这一点我们在可靠性的证明中已看到。在右边前件 P 刚好陈述了 P 为真的宣告的前提条件。公理的剩余部分是讲下面的两个观点是等价的：

（a）一旦我们增加信息 P 就知道 ϕ

（b）知道条件 P 蕴涵 ϕ，这里 $[!P]\phi$ 再次描述了更新后 ϕ 为真。

这里并且以后只要 ϕ 是非认知事实的陈述，则 ϕ 和 $[!P]\phi$ 的区别可以忽略。在这种情况下，公理将归约成更简单的版本。①

条件句 $A \Rightarrow B$ 类似于动态模态词 $[!A]B$ 这一观念是一个老的共识，在 *PAL* 的背景下，两条明显的原理很直接地从最小模态公理中得到：

事实 1 下面规则对于动态宣告的条件句是有效的：

（a）后件的合取（$A \Rightarrow B$, $A \Rightarrow C$ 蕴涵 $A \Rightarrow B \wedge C$）

（b）在后件中向上的单调性（$A \Rightarrow B$ 蕴涵 $A \Rightarrow B \vee C$）

对于下列情况，在具体的动态更新的模型中存在反例：

（c）自返性，在前件中向下的单调性，前件的析取，严格的传递性，严格的单调性。

尽管如此，在系统中也有一些新的条件有效，看下一条非标准但很有趣的条件句规则：$A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \leftrightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ 它将对应于下一子部分中的迭代原理。上文提到过，仅就非认知的前件和后件而言，更新不改变真值，并且条件句是普通的模态蕴涵式。我们留下动态更新的条件句的完备逻辑作为一个悬而未决的问题。②

---

① 这儿类似于信念修正中用“拉姆齐测试”处理条件句。

② 对于 *PAL* 完整的语言，[van Benthem. 2003] 对抽象的结构规则提出了完备的描述，这些规则对动态推理是有效的。

迭代

断定能被迭代以便形式化复杂的交流、博弈等。*PAL* 的语言通过重叠模态算子来描述这种断定，如：

$$[!A][!B]\phi$$

但是逻辑有一条有趣的有效原理，它表明两次连续断定的效果也可以仅通过一次断定来完成：

事实 2　$[!A][!B]\phi \leftrightarrow [!(A \wedge [!A]B)]\phi$ 是一条有效的 *PAL* 原理。

的确，这条原理是模式有效的，即，它的每一个代入特例也是有效的。模式有效不是所有 *PAL* 公理的特征，看一下前面提到的原子命题的一条归约公理：

$$[!P]q \leftrightarrow P \rightarrow q$$

当用一个任意的认知公式替代 q，显然它不成立，但对于这条逻辑运算的归约公理是模式有效的。*PAL* 的模式有效式能否被公理化？这一点不为人所知，更不要说是否是可判定的了。

研究迭代下一步很自然是将一些复杂的指令用在交流中——通过使用计算机程序中三个众所周知的运算来实现：

(a) 序列复合　　　　;

(b) 安保选择　　　　如果……则……否则……

(c) 安保迭代　　　　当……执行……

关键的是，我们说事情在一定程度上都是有序的，我们所要说的可能还依赖于环境。在讲奉承话或威胁的话时，我们不断重复，直到达到想要的效果。在交流中丰富的语言有简单的语法和语义，它们类似于命题动态逻辑 *PDL* 中的语法和语义——一些关键的方法也与 *PAL* 相似。例如，对于认知互模拟，它的公式也有不变性。但意想不到的是有关有效的复杂性问题（[Miller, Moss. 2005]）：

定理 3　带所有的 *PDL* 程序运算（运算增加到语言的行动部分）的 *PAL* 是不可判定的，甚至是不能公理化的。

8.2.5　从知识到信念

就知识而言，我们已经描述了公开宣告的逻辑。我们很容易举例说明，不足之处是——有人认为这种方法只适用于知识。事实并非完全这样。我们所讲的关于 *PAL* 的任何事实依旧成立，只要把 $K_i\phi$ 当成信念算子：

$$[!P]B_i\phi \leftrightarrow P \rightarrow B_i[!P]\phi$$

的确，就这个框架的大多数应用而言，我们前面已经提及，关于认知算子的最好解释可以是这样：

“就我知道的而言……”

在这个事例中，我们为了简化而不要求主体间的可及关系是等价关系。例如，下面简化了的模型表明了事实 p 是真的同时主体错误地相信了 $\neg p$：

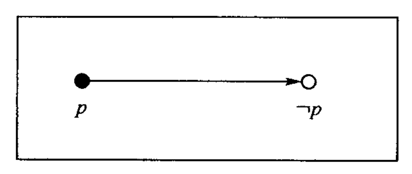


图 8-2

从信念模态词的观点来看，*DEL* 的整个方法执行起来如以前一样。在下一节中，我们将通过增加微细-结构对信念修正进行进一步详细的分析。稍后，我们也将看到在更新系统中有两个模态算子：一个是对知识来讲更严格，一个对信念来讲更容易满足。这样建立的系统看起来并没有增加一些更深的新问题（尽管在［van Ditmarsch. 2005］中比较了不同之处），但是在实际运用中是非常方便的。

我们已非常详细地讨论了简单的公开宣告的动态认知逻辑。这些讨论不是强调它本身的重要性，而是阐明了我们基本的方法论及由它引出的逻辑问题。在 8.6 中，我们将简要地介绍更复杂的任意信息事件的 *DEL* 方式的系统，以及更复杂的“乘积更新”的方法（参见［Baltag, et al. 1998；van Ditmarsch. 2007；van Benthem. 2006］）。但在这篇文章中，一些简单的公开宣告的背景知识对我们的主要目标来讲已足够了：我们打算扩张到信念修正领域，下面将尽快介绍它。

8.3　硬信息条件下的信念变化

8.3.1　消去信念修正的一个问题

现在把知识和信念联系起来，再看前面所讲的信念模型。在现实世界 x 中，p 是真的，并且我的确不知道 p 是否是真的，但我相信 $\neg p$：

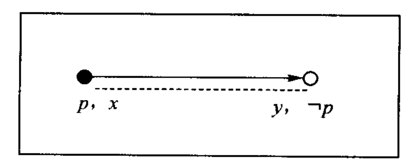


图 8-3

现在关于消去更新，存在一个问题：*PAL* 实际上并没有做真正的信念修正。

现状中的一个“硬宣告”$!p$将初始状态变成带空的信念可及关系的单一世界模型$\{x\}$——这里我相信p，甚至$B\bot$…但那不是我们所想要的：我应该仅仅逐渐（知道且）相信$p!$，下面有一个解决的方案。

8.3.2　可能世界比较和条件信念

模型　对于信念，有一个更丰富的观点随着直觉产生：我们相信那些在与我们有认知可及关系的“最好”或“最相关”的可能世界中成立的事情。我相信这列火车将准时带我回家，即使在*严格意义上*，我并不知道它不会如同在“回到未来（8.3）”一样突然出轨。但是，这些呆在轨道的可能情形是比脱离轨道的情形更合理的，并且到最后，火车准时到达的情形比火车没有准时到达的情形更合理。其静态模型的形式是：

$$\mathfrak{M}=(W,\{\leqslant_{i,s}\}_{i\in I},V)$$

在这里，$\leqslant_{i,s}$是主体的三元比较关系，读作，

$\leqslant_{i,s}xy$：在可能世界s中，主体i认为x至少和y一样合理

这样的模型也被很多学者提出来，开始是在刘易斯的条件逻辑中；到［Spohn. 1988］的“分级模型”中；以及［Shoham. 1988］中论述人工智能的一般化偏好关系。依靠个人直觉上的理解，我们可以在关系上增加一些数学条件。最小的条件是自返性和传递性，它们可以在［Burgess. 1984］和［Veltman. 1985］中找到。［Lewis. 1973］也增加连通性：可能世界要么相互居先，要么有相同的前趋和后继。后一个条件产生了众所周知的“嵌套球”的几何系统。同以前的认知模型一样，我们的动态分析也很大程度上独立于这样的一些形式化的设计决定——尽管动态分析为一些特殊的应用所做的调整可能是重要的。

语言和逻辑　在这个比较序的结构中，我们能解释许多新的逻辑算子。下面，我们选择直觉上的“最小化”形式，尽管它们必须（且能）在模型中部分被修改，这些模型允许在这个序中无限下降。首先，一般的信念是：

$\mathfrak{M}$，$s\models B_i\phi$当且仅当对所有在序$\lambda_{xy}.\leqslant_{i,s}xy$中最小的可能世界$t$，都有$\mathfrak{M}$，$t\models\phi$。

但是更一般化的概念是条件信念：

$\mathfrak{M}$，$s\models B_i(\phi\mid\psi)$当且仅当对所有在集合$\{u\mid\mathfrak{M},u\models\psi\}$中的序$\lambda_{xy}.\leqslant_{i,s}xy$中最小的可能世界$t$，都有$\mathfrak{M}$，$t\models\phi$。

条件信念为这样的信念*预编码*——如果我们知道某些事情，我们将有这样的信念。同条件句的形式比较是这样的。一个条件句$C\Rightarrow D$是说在最小世界中如果C是真的，D是真的（通过可能世界中比较顺序来测定）。它实际就上面的

B_i $(D \mid C)$。的确，对于条件语言，在自返传递的模型上，$B_i(\phi \mid \psi)$ 刚好满足下面注释中列出的最小条件逻辑的公理。[①]

评论1 再次预编码

这是进一步深入讨论“预编码”技术方面的好时候。条件信念 $B_i(\phi \mid \psi)$ 并没有真正告诉我们，当我们知道前件时应该相信什么。知道前件 ψ 的行为改变了当前模型 $\mathfrak{M}$，因此后件 ϕ 的真值可以改变。原因是出现在 ϕ 中的模态词也可以在模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M} \mid \psi$ 中的不同世界中出现。这是在逻辑的许多领域出现的众所周知的现象。例如，在“所有妈妈都有女儿”中的相对化量词并不是讲：如果我们把妈妈的子集作为相对物，则她们的任何一个都有女儿且女儿自身也是妈妈[②]。

评论2 更丰富的模态语言

接下来，在这些模型上我们也能解释更丰富的模态语言。例如，一个“最好”世界的概念确实可导出可能世界 s 和 t 的二元关系“$best_i$”：

在 $\lambda_{xy}. \leq_{i,s} xy$ 中 t 是最小的

在命题的动态逻辑中，我们可以为它引入一个模态词（在条件逻辑中，这类似于有一个依赖于“选择函数”的可能世界），上述的信念模态词 $B_i\phi$ 将被读作：

$$[best_i]B_i\phi$$

今天，更多有生命力的模态偏好语言正处于发展之中。[③]

8.3.3 硬信息下的信念变化的动态逻辑

现在我们能够提出第一个新的信念修正的动态逻辑：将前面讲到的逻辑 PAL 加上条件信念的静态模型，我们就得到它了。在这种背景下，我们的初始语言依旧采用真命题 P 的公开宣告 $!P$ 的语言。检验随后得到的归约公理只是一道简单的练习题。

---

① (a) $A \Rightarrow A$，(b) $A \Rightarrow B$ 蕴涵 $A \Rightarrow B \vee C$，(c) $A \Rightarrow B$，$A \Rightarrow C$ 蕴涵 $A \Rightarrow B \wedge C$，(d) $A \Rightarrow B$，$C \Rightarrow B$ 蕴涵 $(A \vee C) \Rightarrow B$，(e) $A \Rightarrow B$，$A \Rightarrow C$ 蕴涵 $(A \wedge B) \Rightarrow C$。

② 标准的模态语言可通过语法的相对化谈论一个可定义的子模型 $\{s$ 在 $\mathfrak{M}$ 中 $\mid \mathfrak{M}, s \models P$ 中$\}$，由 $\langle\rangle$ $(P \wedge \cdots$，$\Box)$ $P \rightarrow \cdots$ 分别代替模态词 $\langle\rangle$，$\Box$。但这种方法并非总有效。

③ 与传统的方法相比，有一种更基本的方法。在我们模型中，“参数化”的二元序支持一种二维的形式 $\mathfrak{M}, s, x \models \langle pref \rangle_i \phi$ 当且仅当对某些：$y \leq_{i,s} x$：$\mathfrak{M}$，$y \models \phi$。[Boutilier. 1994]，[van Benthem, Liu. 2007]，[van Benthem, van Otterloo & Roy. 2006]，[van Benthem, Girard P & Roy. 2007] 表明了模态偏好语言如何扩展为条件逻辑并让它的特性更明显。为处理更复杂的偏好联系，他们也增强了语言的表达力，像这些可以在行为及博弈理论中找到。

事实3　对于一些硬事实被宣告后得到的信念，下面的公式是语义有效的：

$$[!P]B_i\phi \leftrightarrow (P \rightarrow B_i([!P]\phi \mid P))$$

这个公式很像在公开宣告的条件下知识的归约法则。它是成立的，由于递归的形式结构在两种情况下是相同的。而且，为了保持完备的动态语言协调性，对于条件信念，我们也需要在此语言下的归约公理，我们得到：

定理4　公开宣告下的条件信念逻辑可以完全地公理化：

(a) 任意一个在选定模型类上完备的静态逻辑；

(b) 关于原子事实和布尔运算的 *PAL* 归约公理；

(c) 如下关于条件信念的归约公理：

$$[!P]B_i(\phi \mid \psi) \leftrightarrow P \rightarrow B_i([!P]\phi \mid P \wedge [!P]\psi)$$

证明：一旦我们看到新公理的可靠性，这个结论是明显的。左边讲的是在模型（$\mathfrak{M}|P, s$）中 ϕ 在最好的 ψ-可能世界中为真。在右边，在宣告通常的前提条件下，它是讲在（$\mathfrak{M}, s$）中最好的可能世界现在是 P，在宣告 P 后将变成 ψ，而且在宣告 P 后也将变成 ϕ。这的确是等值的。■

8.3.4　知识和信念的联合

很容易将前面的系统联合起来。我们采用前面为 K_i-算子建立的认知模型，并将绝对的或有条件的信念 $B_i\phi$，$B_i(\phi \mid \psi)$ 的合理性序 $\leq i$ 看作任一主体的 $\sim_i$ 的有序认知等价类。带宣告 $!P$ 的扩张动态语言也将记录增加硬事实后，主体的知识和信念是如何改变的。

8.4　软信息条件下的信念变化

8.4.1　关系改变的修正

即便是上面带条件信念的情形中，公开宣告系统在大多数情形下，并没有执行真正的信念修正。考虑前面提到的模型，在模型中有现实世界 x，我相信 $\neg p$，尽管 p 实际上是下面的情形：

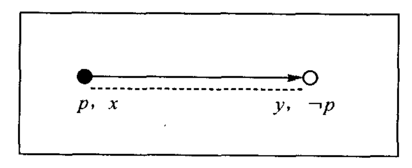


图 8-4

宣告!P将它变成单一世界的模型$\{x\}$，在模型中我相信P，但却没有回路。因为P-世界已消失，没有什么能消除我在P中的信念。因此，我们需要为方案找到一个新的主意，其中信念能来回变化。在通常情况下，信念修正的触发点比一个消去可能世界的要求要“软”——只是引入P-可能世界一个更好的“偏好”，而并没有全部丢掉其他的信念。一个典型的例子是把条件断定$A \Rightarrow B$处理为缺省规则（参见［Veltman. 1996］）。接受一个缺省规则并不是说现在所有的A-世界必须是B-世界，而是说这个“特别的”$A \wedge \neg B$-世界更不合理或更不相关。“软信息”并没有消去可能世界，而是*改变了现有的可能世界的顺序*。例如，用我们的记号表示，省去关于主体的指标，因为这些指标并非真正影响思想的表达，一条斐尔曼规则如下：

（$\Uparrow$）词典顺序升级

$\Uparrow P$是一条指令，它将当前可能世界间的序关系$\leq$用如下来代替：

所有的P-世界变得比所有的$\neg P$-世界好，而在二者各自的区域中保留原来的序。

这正是［Rott. 2006］中的关系信念修正的词典顺序方案。这个变化像一场社会变革——一些社会底层P现在变成了上流社会。方案$\Uparrow P$的结果易于描绘并且在许多偏好理论中，词典顺序的确是一个重要概念。

修正方案和接受场景

相对新的信念，由于主体对旧的信念的可以有不同的坚持程度，所以信念修正理论允许有不同的变化方案。另一种世界合理性的重新排序是这样。我们只需共同选择社会底层的领导，而其他的社会顺序则不改变：

（$\uparrow$）杰出者变化

$\uparrow P$将当前序的序关系$\leq$用如下来代替：最好的P-世界上升到顶端，除此之外，旧的顺序保留。

我们可以将修正方案看成是主体长期坚持的习惯。但对于特殊的输入，他们也会有狭隘的“反映类型”。言语行为理论能区分新增信息“所说的”和“接受的”两者间的差别，在这种方式里，能接受的东西将影响他们。在这种意义上，我们方法中关于$*P$的“软”与其说在信号自身中，倒不如说在听者的反映中。[①]

［van Benthem, van Eijck & Frolova. 1993］系统分析了许多种类的关系变化，这种变化要求对偏好逻辑进行“动态化”。［van Benthem & Liu. 2007］对一般的

① 方案的多样性有时看成作“非逻辑”的标志。

"升级"提出一个 *DEL* 处理方案，阐述了假定关系变化在可定义的条件下，归约公理是如何能自动地获取。类似的方法同样适用于信念修正，可参见［Rott. 2006］中的"27"种不同方案。这一方法也适用于缺省，命令（［Yamada. 2006］）及其他包含合理性或偏好改变的领域。［Liu. 2006A］对各种各样的处理方法进行了系统化的讨论，阐述了在动态认知逻辑的其他部分同样存在这一问题，折射了主体的推理能力、反省能力和记忆力。

本文下一个主要的论点是 *DEL* 如何应用到软信息条件下信念变化的各种情形中的。为阐明这一点，我们把带有两个关键算子 $\Uparrow P$ 和 $\uparrow P$ 的动态逻辑进行公理化。方便起见，我们将假定这里讨论的序是全序，一般化的情况将留给今后再研究。

8.4.2 信念升级的两个的完备动态逻辑

对于条件信念，我们保持先前相同的基本语言，仅仅展示信念修正额外的超结构。在书写原理时，我们再一次省去主体的下标，这并不影响关键的想法。但为了方便我们的确需要一个有用的算子，也就是：

一个存在模态词 $E\phi$ 是说 ϕ 在某个可能世界成立。

这个普通的算子表达的是就与当前模型相关的 ϕ 的"一致性"。在联合的认知信念的语言中，因有了相对于主体 i 的存在认知模态词 $\langle i\rangle\phi$，$E\phi$ 的作用表达得更自然。

这时，我们有了下面的模型变化的运算：

（a）$\mathfrak{M}, s\models[\Uparrow P]\phi$ 当且仅当 $\mathfrak{M}\Uparrow P, s\models\phi$

由于 $\mathfrak{M}\Uparrow P$，带序 $\leqslant$ 的模型 $\mathfrak{M}$ 在上述的（$\Uparrow$）中发生了变化；

（b）对于动态模态词 $[\uparrow P]\phi$，与之完全类似

我们将这些运算看成是无任何前提条件的函数。第一个新的结论表明 *DEL* 方法是如何将这类信念修正彻底地公理化的：

定理5 词典顺序升级的动态逻辑通过下面的规则公理化：

（a）静态模型上条件信念完备的公理系统，及

（b）下面的归约公理：

$[\Uparrow P]q\leftrightarrow q$ 对任意原子命题 q

$[\Uparrow P]\neg\phi\leftrightarrow(\neg[\Uparrow P]\phi)$

$[\Uparrow P](\phi\wedge\psi)\leftrightarrow([\Uparrow P]\phi\wedge[\Uparrow P]\psi)$

$[\Uparrow P]B(\phi\mid\psi)\leftrightarrow(E(P\wedge[\Uparrow P]\psi)\wedge B([\Uparrow P]\phi\mid P\wedge[\Uparrow P]\psi))\vee$

$$(\neg E(P \wedge [\Uparrow P]\phi) \wedge B([\Uparrow P]\phi \mid [\Uparrow P]\psi))$$

证明：我们只评论归约公理。总的讲，前三条公理看起来比 *PAL* 的前三条稍微要简单，因为对 $\Uparrow P$ 来讲没有前提条件，而对 $!P$ 则有前提条件。第一条公理表达了升级没有改变原子事件的真值。第二条讲的是模型变化的运算是一个函数。第三条讲的是任意模态-类型变化的算子的一般特征。

第四条讲的是信息已展示了特殊的已被使用过的关系变化。它看起来令人生畏，但实际上容易理解。在左边，我们看到在 P-升级后，所有最好的 ψ-世界都满足 ϕ。在右边，有不同的情形。

情形（1）：在起始的模型中的 P-世界在升级后变成 ψ。在这种情况下，词典顺序重排 $\Uparrow P$ 让 $\mathfrak{M}$ 中的最好的可能世界都变成在 $\mathfrak{M}\Uparrow P$ 中的最好的可能世界以便满足 ψ。现在，在起初的模型 $\mathfrak{M}$ 中——从当前的 s 世界考虑——情形 1 的可能世界的确就是满足公式 $P \wedge [\Uparrow P]\psi$ 的可能世界。然后公式 $B([\Uparrow P]\phi \mid (P \wedge [\Uparrow P]\psi))$ 是说在 $\mathfrak{M}$ 中最好的可能世界在升级后的确满足 ϕ。并且由于词典顺序重排并没有改变在 P-领域内可能世界的顺序，故这些最好的可能世界同先前描述的是一样的。

情形（2）：在起始的模型中，没有 P-世界在升级后变成 ψ。在这种情况下，词典顺序重排 $\Uparrow P$ 将升级后满足 ψ 的最好的可能世界都变成与以前相同的且满足 $[\Uparrow P]\psi$ 的最好的可能世界。因此，在归约公理中的公式 $B([\Uparrow P]\phi \mid [\Uparrow P]\psi)$ 是说最好的可能世界在升级后变成 ϕ。[①] ■

公理再一次地为任意动态公式变成纯粹的基本语言的公式提供了一种化归的程序。因此，这类逻辑是可判定的。进一步，在认知/信念逻辑中，当似乎合理性的变化并不影响认知可及关系时，对知道算子增加一条有效的归约公理也是很容易的：

$$[\Uparrow P]K_i\phi \leftrightarrow K_i[\Uparrow P]\phi$$

简化版　对于不熟悉递归地思考 *DEL* 的人，看一些特殊的例子会得到启发。首先，考虑无条件信念 $B_i\phi$。在这种情况下，上述的归约公理可简化为下面的等值式（假定 ψ 为真）：

$$[\Uparrow P]B\phi \leftrightarrow (EP \wedge B([\Uparrow P]\phi \mid P)) \vee (\neg EP \wedge B[\Uparrow P]\phi)$$

它看起来更像前面讲的 *PAL*-风格的归约公理。另一方面，如果我们想要得到在迭代条件下封闭的系统，那么为条件信念提供上述的归约公理是至关重要的。

---

① 运用偏好逻辑，此公理的一个可替代的推理形式出现在［van Benthem & Liu. 2007］中。

的确，也可从 *AGM* 得到一些启示。它的基本假设看起来只考虑获取无条件的绝对信念，然而一个互动-封闭的系统在考虑获取条件信念时也应该要有直观的假设。[①] 在任何情况下，甚至对于一元的标准版式，也可做一些有用的比较：

评论3　与 *AGM* 假设的联系。

如何辨认在 *DEL* 背景下标准的 *AGM* 假设？在这种语言能表达的范围内，它们是可作为定理而被推导出来。考虑所谓的成功条件：

$$[\Uparrow P]BP\text{，如果 } P \text{ 是一致的}$$

依据经典的 *DEL* 的想法，这一条件不能成立，因为早先的“技巧性的”认知更新，或者升级都不接受这一直观原则。但对原子公式 P 的事实更新，成功条件应该成立。现在我们运用第一条归约公理 $[\Uparrow P]\ P \leftrightarrow P$，有：

$$[\Uparrow P]BP \leftrightarrow (EP \wedge B([\Uparrow P]P \mid P)) \vee (\neg EP \wedge B[\Uparrow P]P)$$
$$\leftrightarrow (EP \wedge B(P \mid P)) \vee (\neg EP \wedge BP) \leftrightarrow EP \vee BP$$

因此，$EP \rightarrow [\Uparrow P]BP$ 为真

更一般化的情况是，对所有的不带信念或认知算子的“事实”陈述 ϕ，$[\Uparrow P]\phi$ 和 ϕ 之间的差别消失了。因此，对这样的事实陈述 ϕ，ψ，重要的第四条归约公理可简化为：

$$[\Uparrow P]B(\phi \mid \psi) \leftrightarrow (E(P \wedge \psi) \wedge B(\phi \mid (P \wedge \psi)) \vee (\neg E(P \wedge \psi) \wedge B(\phi \mid \psi))$$

它的精确意思是说，正如拉姆齐测试在条件逻辑中成立一样，它对于我们的 *DEL*-方式的升级逻辑依然是成立的——但我们在这里不再深入这个问题。

上面的结论不是偶然的，对另一升级算子 $\uparrow P$，也有类似的归约公理。这次，我们把重要的归约公理留给读者来证实。

定理6　保守升级的动态逻辑可通过下面规则完全公理化：

(a) 静态模型上条件信念完备的公理系统；

(b) 如下归约公理：

$[\uparrow P]q \leftrightarrow q$，对任意原子命题 q

$[\uparrow P]\neg\phi \leftrightarrow \neg[\uparrow P]\phi$

$[\uparrow P](\phi \wedge \psi) \leftrightarrow ([\uparrow P]\phi \wedge [\uparrow P]\psi)$

$$[\uparrow P]B(\phi \mid \psi) \leftrightarrow B(\neg[\uparrow P]\psi) \mid P \wedge B([\uparrow P]\phi \mid [\uparrow P]\psi) \vee$$
$$(\neg B(\neg[\uparrow P]\psi \mid P) \wedge B([\uparrow P]\phi \mid (P \wedge [\uparrow P]\psi)))$$

---

① 但我们可以讲，*AGM* 假设对合取没有迭代的风格。

8.4.3 讨论

现在来讨论由于我们的关于信念修正的逻辑立场所产生的反响。

模块化设计 我们的两种理论表明在 *DEL* 的命题形式中，很容易给出完备的关系升级的动态逻辑及具体的信念修正方案。而且结果不是特殊的而是系统化的。信念修正的 *DEL*-方式的逻辑有一个带如下条件的模块化结构：

(a) 基本逻辑，有正确表达力的静态语言，或许是为归约的目的“设计的”；

(b) 一般的归约公理，反映了运算是如何执行的：一个（部分）函数，或许甚至是一个关系；

(c) 在升级后，一条特殊的信念归约公理，为特殊的正被使用的升级方法编码。

因此，在信念变化的关键公理中，为信念修正选择“方案”的自由性是显而易见的。或许这依旧还是太含蓄了，有人希望在形式语言中的某些地方明显地插入一个依赖主体的“方案”。方案看起来是可行的，尽管 *AGM* 和 *DEL* 接受了它，但没有给出这样系统化的方法（参见［van Benthem & Liu. 2004；2007］给出了一些建议）。如果后者在一些 *PDL*-风格的形式系统中被给出，那么像上面一样，［van Benthem. 2006A］也从关系变化的定义中为推导归约公理给出了一般化的方法。看来它适用于许多关于信念修正的文章中所提出的方法。①

再次静态预编码 我们的组合归约讲的是：在任意行为发生前，关于后来的信息更新或信念修正产生影响的任意命题在起始的模型中已编码。我们用语言表示出来就是以前曾讲过的：“认知逻辑的现在包含了认知逻辑的未来。”很好理解，这很像经典逻辑中的现象。例如，对$!P$的可能世界的消除产生了模型 $\mathfrak{M}$ 的一个可定义的子模型。但任意模型 $\mathfrak{M}$ 已在它的可定义的子模型 $\mathfrak{M}|P$ 中为所有的公式 ϕ 编码为真，通过语法的相对化公式 $(\phi)^P$：

$$\mathfrak{M} \models (\phi)^P \text{ 当且仅当 } \mathfrak{M}|P \models \phi$$

类似地，像$\Uparrow P$的关系变化能通过语法翻译而被预处理，翻译的过程是用新的关系式代替旧的关系表达式。因此，仅知道一些公式“一般”的后承，则也隐含地知道它在其他模型中能推导出什么（参见［Barwise & van Benthem. 1999］）。

① 汉斯·罗特已提议本文的方法论可以代替改变主体合理序的升级方案上的一些限制。但归约公理也依赖语言的设计。在更丰富的模态偏好语言中，可定义更多的方案：参见8.3.2。

重复迭代 最后，考虑前面所讲的迭代公式。在 *PAL* 中，用如下规则能将硬事实的相继宣告能表达成一个宣告：

$$[!A][!B]\phi \leftrightarrow [!(A \wedge [A!]B)]\phi$$

对于关系变化和信念修正，有没有一个类似的“压缩规则”？我们不做一般性的回答，只作部分回答。令命题 A，B 是事实，则上述信息更新的公理可归约成：

$$[!A][!B]\phi \leftrightarrow [!(A \wedge B)]\phi$$

修正后的信念也会出现类似的情况。例如，对于前面所讲的最小化重新排序的处理中，后面的事情将发生。如果我们首先应用 $\uparrow A$，然后最好的 A-世界将置顶，剩下的可能世界的序不变。然后应用 $\uparrow B$ 将导致两种情形。如果是 $A \wedge B$-世界，则新的最顶端的世界是最好的 $A \wedge B$-世界，它来自原来的位置。如果不是 $A \wedge B$-世界，则新的最顶端的世界是最好的 B-世界，它来自原来的位置，这个顶端的世界也是 A-世界。因此，下面两条原理对于相继的事实信念变化成立：

$$[\uparrow A][\uparrow B]B_i\phi \leftrightarrow [\uparrow (A \wedge B)]B_i\phi$$

$$E(A \wedge B) \wedge [\uparrow (A \wedge B)]B_i\phi \leftrightarrow [\uparrow A][\uparrow B]B_i\phi$$

只要新增的信念相互一致，则相继地或者合取形式地给出触发点对当前的信念没有影响。但是，尽管如此，两个相继的步骤 $\uparrow A$，$\uparrow B$ 对全序进行重排依旧与一个步骤 $!(A \wedge B)$ 不同，只要我们看一下最顶端下面的一个层次。总之，对于条件信念的相同的后承，并不存在将两步修正的效果压缩为一步的迭代规则。为什么应当有这样的规则？

多主体和公共信念

标准的信念修正方案并没有“社会”的情境：它们描述遇到意外的事实后，单个主体该怎么做。但是可以自然地概括相互作用的背景，在此背景下，主体接受来自其他来源的信息——这些信息需要合并到一个新的合理性序中。在这种情况下，我们必须分析信念合并（[Maynard-Reid Ⅱ & Shoham. 1998]），或许分析更一般化的“判断聚合”形式（[List & Petti. 2004]）。并且这里有一个关于在相互作用的背景下什么是合理的“*AGM* 假设”的主题。无论是哪一种解释，升级后主体是如何获取公共信念都是重要的。这就要求在合理性升级后，对定理2和事实1作出包括群体的公共信念的一般性概括（参见 [van Benthem, van Eijk & Kooi. 2006] 中的升级后公共知识的这种情形），这里我们作为一个未解决的问题提出。

8.5 作为模态对应框架的信念修正公设

现在，对于信念修正，什么是更标准的公设方法？对于关系变化，最近的方

法提倡非特殊的处理，但［Gärdenfors. 1987］的假设更注重限制整个的选择类型。这里存在一个相应的模态类型的思考方法，也就是塞格伯格的动态信念逻辑 *DDL*（参见［Segerberg. 1998］）。该系统提供了抽象的模态框架，框架中只假定在当前模型中有一些关系变化产生：或者是函数关系，甚至是非确定性的关系。主要的算子如下：

$\mathfrak{M}, s \models [\ast A]\phi$ 当且仅当 $\mathfrak{M} \ast [\![A]\!], s \models \phi$，这里 $[\![A]\!]$ 是 $\mathfrak{M}$ 中满足 A 的可能世界集，$\mathfrak{M} \ast [\![A]\!]$是模型 $\mathfrak{M}$ 发生部分变化后的形式

当前 *DDL* 使用的模型类似于条件逻辑的刘易斯球形系统或者更一般化的系统[①]，而且 $\mathfrak{M} \ast [\![A]\!]$ 被新的可比较关系特殊化，同时 $\mathfrak{M}$ 的世界集不变。详情参考引用的文献。很清楚，由上述形式的性质，最小的 **K** 模态系统的公理在任意的信念变化的模型中都是有效的。在顶端，附加的假设将限制与“真正的”修正方案相关的关系变化。并且在这个限制中，一个特殊的公理集甚至可能决定一个特殊的修正方案。

本文的最后一个主要论点是再次将信念修正理论放在标准的模态背景上考虑。一般的假设分析能被标准的模态方法也就是框架对应所处理。在本文的静态模型上，这项工作就能被非常简单地演示出来。[②]

对简单模型，给出一个任意关系变化的运算 $\spadesuit A$ 的功能框架，它由可能世界集和三元比较关系 $\leq_s xy$ 组成。

$\spadesuit A$ 作用于任意模型 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}$ 中的一个可能世界集 A。并且产生一个新的模型 $\mathfrak{M}\spadesuit A$，它的世界集与 A 相同但关系 $\leq_s$ 可能有些改变。

现在我们在对应的版式中分析一些 *AGM*-类型的一般论断[③]。然后很快就能得知在关系变化中他们表达什么样的限制。作为起点，“成功条件”非常弱，不论对 $\Uparrow P$ 还是 $\uparrow P$。

事实 4　公式$[\spadesuit p]Bp$ 是说在 $\mathfrak{M}\spadesuit p$ 中最好的世界都在 P 成立的世界中。

它只需粗略的观察而不需证明。但事实上，对于信念修正的关系变化，好像我们能安全地设定一些更强的条件，也就是：

在$[\spadesuit p]Bp$ 中最好的世界都的确是 $\mathfrak{M}$ 中的最好的 p-世界　*UC*

它也能用公式表达。但我们需要下面更强的拉姆齐-式的动态公式，它包括两

① 有时，为了更一般化，*DDL* 使用模态邻域语义学概括世界与世界的可及关系为世界与集的关系 RsX。

② *DDL* 有更特别的带洋葱和花椰菜的“素食主义”模型框架，但［Girard. 2007］表明“洋葱模型”与刘易斯-方式的模型对于条件逻辑是一一对应的，并且“花椰菜”与伯吉斯-费尔曼的偏序模型也有如此关系。

③ 技术要点：标准的模态框架对应为下面的形式：模态逻辑的 *K*4-公理$\Box p \to \Box\Box p$ 对于框架 $F = (W, R)$，在 s 中为真当且仅当关系 R 在 s 中是传递的，也就是 $F, s \models \forall y(Rxy \to \forall_z(Ryz \to Rxz))$。

个不同的命题公式 p 和 q：

事实5　公式 $B(q|p) \leftrightarrow [\spadesuit p]Bp$ 表达 UC。

但事实上，专注于上流社会仍不能限制全部的关系变化。同样因为这个原因，我们的确需要看一下革新后在所有类中的社会顺序，也就在下列关系升级中的条件信念。

作一个更深刻的阐述，我们考虑关于 $\Uparrow P$ 这一重要的归约公理时，用的是命题字母而不是用代表任意公式的变元模式来陈述的。因为它们仅仅代表集合，所以我们压制前面的模态词 $[\Uparrow P]\phi$，它追踪的是可能的“传递影响”。下面的证明表明它决定了模型完全按词典顺序重排：相应地，能证实的事例出现在信念修正的公设方法上：

定理7　公式 $[\spadesuit p]B(q|r) \leftrightarrow (E(p \wedge r) \wedge B(q|p \wedge r)) \vee (\neg E(p \wedge r) \wedge B(q|r))$ 在一个框架中成立当且仅当解释 $\spadesuit p$ 为词典升级。

证明：假设 $\leqslant_s xy$ 在 $\mathfrak{M}\spadesuit p$ 中。我们首先证明 $\leqslant_s$ 是由词典升级得到的关系。设 $r=\{x, y\}$ 且 $q=\{x\}$。公式左边是真的。对于右边有两种情形。

情形1：x，y 中某一个在 p 中，则有 $p \wedge r=\{x, y\}$(1.1) 或 $\{y\}$(1.2) 或 $\{x\}$(1.3)。从而，在模型 $\mathfrak{M}$ 中，$B(q|r)$ 对可能世界 s 成立。对于情形1.1，我们有 $\leqslant_s xy$ 在模型 $\mathfrak{M}$ 中。对于情形1.2，我们必有 $x=y$，我们同样有 $\leqslant_s xy$ 在模型 $\mathfrak{M}$ 中。情形1.3仅当 $x \in p$ 且 $y \notin p$ 出现。因此，所有在 $\mathfrak{M}\spadesuit p$ 中的新关系对都满足词典排序重排的描述。

情形2：x，y 中没有一个在 p 中，使用 $\neg E(p \wedge r) \wedge B(q|r)$ 的真可类似地分析。

反之，我们证明所有满足词典排序升级的描述的序对的确能让它在新序中。这里举一个例子，其他的情形与之类似：假设 $x \in p$ 且 $y \notin p$。然后，$r=\{x, y\}$ 且 $q=\{x\}$。则有 $p \wedge r=\{x\}$，且我们明显有 $E(p \wedge r) \wedge B(q|p \wedge r)$。既然假定我们的公理对命题公式 q，r 作任何解释都成立，所以左边的公式 $[\spadesuit p]B(q|r)$ 也是真的。它告诉我们在模型 $\mathfrak{M}\spadesuit p$ 中，在 $\{x, y\}$ 最好的世界是在 $\{x\}$ 中：也就是 $\leqslant_s xy$。 ■

前面对应证明的背景可以做得更精确些——我们将在本文的扩张版本中论述。利用作用在可能世界集和这些框架上的二阶量词，我们能证明在合理性框架的范围内及它们间的传递关系。

在这种背景下，*AGM*-假设同样被分析为模态原则。它们中的一些已在8.4.2和8.4.3中被简单地讨论过。总而言之，这些假设包括两个抽象的改变模型的运算相互作用：更新 $!P$ 和升级 $\spadesuit P$，导致下面的一些混合原理：

(a)　$[\spadesuit(p\wedge q)]Br\to[!q][\spadesuit p]Br$

(b)　$[\spadesuit p]Eq\wedge[!q][\spadesuit p]Br\to[\spadesuit(p\wedge q)]Br$

这也能从对应的角度加以分析。我们现在不准备这样做，只是证明一个抽象假设的*AGM*-方式的分析如何也对*PAL*-方式信息更新!*P*有效。这里有第二节中关于公开宣告!*P*的定理1的逆，这从目前文献看来是新的。首先，为了保持一致性，并不去除可能世界，我们通过切断p-世界和$\neg p$-世界的所有关联，从而改变认知可及关系也能重新描述这种运算。因此，我们得到和以前相同的形式，而且结果表明，原先关于公开宣告的重要的归约公理完全能刻画这个运算：

定理8　消去更新完全由下面的公式决定：

$$[\spadesuit p]Kq\leftrightarrow(p\to K[\spadesuit p]q)$$

证明：从左边到右边，公式含有下面的意思。用q等值于这样的世界集：与在集p中与当前的s世界有~-可及关系的世界。也假设s在p中。则右边是说在运算$\spadesuit p$后，所有与s可达的世界依旧在q中，也就是，它们以前是可达的，现在是p的成员。然而，这个关系变化只保留从p-世界到p-世界已存在的联系。在反方向有类似的证明，我们看到，的确在运算$\spadesuit p$后，所有这样的联系保留在新的模型中。这正是对前面认知更新的切断关联的情形的描述。

而且，如果通过定义认知框架相关的领域和更清楚的传递关系，以及考虑个体世界是如何通过框架进行联系的，则相应的证明更简单了。在这样的背景下，我们需要三条公理以便更精确地简化公开宣告的消去更新。首先，我们使用等值式(a)$\langle !p\rangle T\leftrightarrow p$确保在给定的模型$\mathfrak{M}$中，最后变成$\mathfrak{M}\spadesuit p$的世界是在集中被$p$所表示的世界。随后，我们运用归约公理(b)$\langle !p\rangle Eq\leftrightarrow p\wedge E\langle !p\rangle q$，对存在模态词$Eq$（“$q$在某些可能世界为真”）确保$\mathfrak{M}\spadesuit p$的域中不包含超过$\mathfrak{M}$中集$p$的任何东西。最后，上面的公理（c）对知识而言，确保认知关系在$\mathfrak{M}$和$\mathfrak{M}\spadesuit p$中是相同的，以便我们可看到更新运算的确是采用了一个子模型。

这些观察为模型变化模态词的语言指出了更一般的对应理论的，——但这远远超出了我们这里所需要的。

8.6　拓展：更多的触发点，进一步的方案，时态的前景

8.6.1　信念修正的其他一些触发点

术语“触发点”已用了很多次了，但还没有对其详加说明。在一般的*DEL*-方式的更新逻辑中，信息变化的触发点比在公开宣告中的触发点更复杂。特别

地，事件模型用于表示模型 $\mathfrak{M}$ 相同的字符类型。$\mathfrak{A}=(E,\{\sim_i \mid i\in G\}, PRE(e) \mid e\in E)$ 模拟了相关的事件，且认知关系 $\sim_i$ 表示主体不能区分的状态。前提条件 $PRE(e)$ 正好描述了事件 e 什么时候能发生。我们也将当前事件 e 变成（$\mathfrak{A}$, e）。这个公式描述了一些情形——并不是所有的主体都对正在发生的事情有相同的观察结果，如在交谈中，在博弈中，密送邮件，或者任何复杂的人类行为。这里引入一个复杂的概念——*乘积更新*，将当前的认知模型（$\mathfrak{M}$, s）变为一个

> *乘积模型*（$\mathfrak{M}\times\mathfrak{A}$, ($s$, e)），其论域为 $\{(s, e) \mid s$ 是 $\mathfrak{M}$ 中一个可能世界，e 是 $\mathfrak{A}$ 中的一个事件，$(\mathfrak{M}, s)\models PRE(e)\}$，并且新的可及关系是：$(s, e)\sim_i(t, f)$ 当且仅当 $s\sim_i t$ 且 $e\sim_i f$

原子公式 p 在（s, e）的真值是它在 $\mathfrak{M}$ 模型中在可能世界 s 中的真值——尽管它能被推广处理真正的可能世界的变化。乘积模型 $\mathfrak{M}\times\mathfrak{A}$ 比模型 $\mathfrak{M}$ 自身大——记录着不同主体关于事件的信息，以及其他主体在复杂的交流和观察的情形下所知道的信息。这是 *DEL* 今天生存的真正舞台。全部语言有如下语法：

$p \mid \phi \mid \phi\vee\psi \mid K_i\phi \mid C_G\phi \mid [\mathfrak{A},e]\phi$：$[\mathfrak{A},e]$ 指带有当前事件 e 的任意事件模型

在语义上，$\mathfrak{M}, s\models[\mathfrak{A}, e]\ \phi$ 当且仅当 $\mathfrak{M}\times\mathfrak{A}$，($s$, e) $\models\phi$。[Baltag, et al. 1998] 证明了由此产生的逻辑 *LEA* 是有效地被公理化和被可判定。对于主体的知识，下面是典型的、有效的归约公理：

$$[\mathfrak{A},e]K_i\phi\leftrightarrow(PRE(e)\rightarrow\bigwedge\nolimits_{f\sim_i e}K_i[\mathfrak{A},f]\phi)$$

要了解更多的动态认知逻辑，请参考 [van Benthem. 2006A; van Ditmarsch. et al. 2007; van Benthem, van Eijck & Kooi. 2006]，这些文献以类似的组合方式来处理问题。

更丰富的情形

这也是对我们目前研究的信念修正的一个很自然的延续。事件模型为信息更新和信念修正提供了更多的触发点。它们包括主体可能已有了错误的信念这样的事例，而主体正在证实这些信念（我认为我看见你出了一块红色的牌，但实际上是一只黄色的）。的确，在一些简单的行动中，像上面所讲的 $!P$ 或 $\Uparrow P$，我们的信念很少改变。信念修正出现在一些复杂的交流、博弈中，还有其他的现实生活现象中，乘积更新旨在研究这样的现象。适用于这一现象的理论，也有益于理解另一现象。同时，乘积更新也容易推广到处理世界实际发生变化的情景中（[van Benthem, van Eijck & Kooi. 2006]）。更新逻辑的方法论自动扩充后，能处理在非-*AGM* 的意义上的信息"更新"，这些信息是世界实际发生变化的信息。

尽管在这里没有特别的形式化的定理，但我们认为：在 8.4 节中对 *PAL* 的分

析能直接扩张成为一个完备的 *DEL*-方式的乘积更新的动态逻辑。扩张后的逻辑在认知-信念的事件模型中能同时完成信息更新和信念修正。

这种类型近年来的一个系统是独立于本文发展起来的，参见［Baltag & Smets. 2006A］和［Baltag & Smets. 2006B］。

一个复杂的问题

然而，用乘积更新处理复杂的触发点同样也有困难。如果各种信号不一致又该怎么办？我相信 p 是事实，但现在观察到一种情形认为 p 成立，在相反方向上有同样的力度。我应该怎样将起初的观点与最新的观点融合成一个整体？为了这个目标，［Aucher. 2003］提出斯彭-方式的“分级模型”，在可能世界的合理力度上使用数值运算。［Liu. 2006B］通过“效用升级”，提出了关系变化的处理方法。当这些系统在 *DEL* 的精神下正常工作时，确定存在一个问题：信念修正是否应该最终用信念的强度来解释，还是应该仅仅讨论信念本身？

8.6.2 时态前景

关于许多更深层的问题，*DEL* 和 *AGM* 在同一条船上。例如，许多信息过程经常被观察到了，这些信息过程包括时间的过去，也就是到目前为止已发生的历史，也包括时间的未来。例如，我们关于一个主体的信念也依赖于未来长期的假设。这将我们引入认知时态逻辑的领域，认知时态逻辑既出现在哲学文献中（［Belnap, et al. 2001］），也出现在有关计算机的文献中（［Fagin, et al. 1995］，［Parikh & Ramanujam. 2003］）。我不准备在这里详细讨论这个问题，因为在这两个背景下它看起来似乎是同样的问题。但时态逻辑提出了更丰富的方法来研究信息更新、知识和信念修正这些现象（参见［Kelly. 1996］），这倒是真的。［van Benthem & Pacuit. 2006］论述了这一领域的概况，包括同 *DEL* 的一个比较。

“向后”和“向前”的更新

考虑所有的这些逻辑，下面的对比很重要。一些在时态方面的逻辑是“向前”看的，不像 *DEL*，它们未来的状态不是来源于改变当前背景的信息事实，而是来源于 *STIT*-型的命令：“确保 ϕ 发生”。在这种类型的逻辑中，我们不必告诉主体如何去做。在一定程度上，*AGM* 更像这种类型，并没有为已有的变化给出具体的指令，我们只需假设在一定程度上服从“加入到相信 ϕ 的信仰者行列中”这一命令就行了。*DEL* 是另一种方式，倾向于把向前的指令当成“痴心妄想”，宁愿分析具体的给定的事件情形——来理解它们结果引发的变化。

向前的思考方式更好些，或许它具有关于某些时态域的“重大阶段”的思想，即，时态域已经包括了所有的可能考察线索的历史。一个更新 $!P$ 是一个指

令，它作最小的改变进入可到达的未来状态——在此状态中，主体都知道 *P*。对信念修正同样成立①。在这样的背景下，没有可定义的明确的构造可以说明如何得到“下一个模型”（像在 *DEL* 中那样）——是由外在的时态模型来决定哪一个的下一阶段是可达的，通过逐步知道或相信某个命题 ϕ 的极小移动。而相应地，*DEL* 可以被看作是一类相继的模型建构的“最小进程代数”。

8.7　结　论

本文的主要观点是表明“事情可以这样做”：（a）在 *DEL* 范例内，对于 *AGM* 的信念变化，可以用具体的技术来处理，然后彻底地描述它们的性质。并且相应地，（b）在标准的模态对应体系中，分析抽象的修正公设。其结果是产生了融合动态信息和信念修正的理论，它使用了标准的模态技术及我们研究领域内的“混合语言”。而且我们能够在这两个研究领域内自由地对论题和结论进行转化——如果我们识破了“生活风格”和特有的讨论主题间表面上的不同，例如，在 *AGM* 中的拉姆齐测试，或者是在 *DEL* 中的模态互模拟理论。

最后，文中的提议并不是个意外。相关的工作有：特别是动态信念逻辑（[Segerberg. 1995]、[Segerberg. 1999] 和 [Lindström & Segerberg. 2006]）和偏好的动态逻辑（[van Benthem & Liu. 2007]）；还有相关的条件逻辑，非单调逻辑，偏好逻辑，数据更新（[Fagin, et al. 1986]），*STIT* 逻辑，以及认知时态逻辑——在我们的论文中贯穿着这些参考文献。

致　谢

我感谢巴塔赫（Alexandru Baltag），范迪特玛施（Hans van Ditmarsch），范德胡克（Wiebe van der Hoek），吉拉德（Patrick Girard），拉吉普（Hannes Leitgeb），刘奋荣（Fenrong Liu），罗特（Hans Rott），萨兹克（Tomasz Sadzik）和斐尔曼（Frank Veltman），以及期刊的审稿人和编辑为本文提出的评论和建议。

参考文献

Aucher G. 2003. A combined system for update logic and belief revision. Master' s thesis. ILLC, Uni-

① 让人感兴趣的是，我所知道的 *AGM* 最早的模态分析是在 [van Benthem. 1989]（一个从 1987 年开始的关于 Gärdenfors 早期工作的逻辑学术讲座）中，文中用三个模态词 [$+A$]，[$*A$]，[$-A$] 分别表示更新，修正，收缩。

versity of Amsterdam

Baltag A, Moss L, Solecki S. 1998. The logic of common knowledge, public announcements, and private suspicions. // Gilboa I, ed. *Proceedings of the 7th Conference on Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge*: 43 ~ 56

Baltag A, Smets S. 2006A. Dynamic belief revision over multi-agent plausibility models. // *Proceedings of the 7th Conference on Logic and the Foundations of Game and Decision Theory* (LOFT 06), Liverpool

Baltag A, Smets S. 2006B. The logic of conditional doxastic actions: a theory of dynamic multi-agent belief revision. // Artemov S, Parikh R, eds. *Proceedings of a Workshop on Rationality and Knowledge*. ESSLLI Summer School, Malaga

Barwise J, van Benthem J. 1999. Interpolation, preservation, and pebble games. *Journal of Symbolic Logic*, 64: 881 ~ 903

Belnap N, Perloff M, Xu M. 2001. *Facing the Future*. Oxford: Oxford University Press

Boutilier C. 1994. Conditional logics of normality: a modal approach. *Artificial Intelligence*, 68: 87 ~ 154

Burgess J. 1984. Basic tense logic. // Gabbay D, Guenthner F, eds. *Handbook of Philosophical Logic*. Vol. II, Dordrecht; Reidel

Fagin R, Kuper G, Ullman J, et al. 1986. Updating logical databases. // Kannelakis P, Preparata F, eds. *Advances in Computing Research*. Vol. III. JAI Press: 118

Fagin R, Halpern J, Moses Y, Vardi M. 1995. *Reasoning about Knowledge*. Cambridge (Mass.): The MIT Press

Gärdenfors P. 1987. *Knowledge in Flux*. Cambridge (Mass.): The MIT Press

Gärdenfors P, Rott H. 1995. Belief revision. // Gabbay D, Hogger C, Robinson J, eds. *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, Vol. 4. Oxford: Oxford University Press

Gerbrandy J. 1999. *Bisimulations on Planet Kripke*. PhD thesis. ILLC, University of Amsterdam

Girard P. 2007. From onions to broccoli: generalizing Lewis' conditional logic. Tech Report, PP-2005-12. ILLC, University of Amsterdam. Final version, 2007. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 17: 213 ~ 230

Kelly K. 1996. *The Logic of Reliable Inquiry*. Oxford: Oxford University Press

Kooi B. 2005. As the world turns: on the logic of public updates. Manuscript. Department of Philosophy, University of Groningen

Lewis D. 1973. *Counterfactuals*. Oxford: Blackwell Publishers

Lindström S, Segerberg K. 2006. Modal logic and philosophy. // Blackburn P, van Benthem J, Wolter F, eds. *Handbook of Modal Logic*, Amsterdam: Elsevier Science Publishers

List C, Pettit P. 2004. Aggregating sets of judgments. two impossibility results compared. *Synthese*, 140: 207 ~ 235

Liu F. 2006A. Diversity of agents. Tech Report, PP-2006-37. ILLC, University of Amsterdam. //

Proceedings of the Workshop on Logics for Resource Bounded Agents, ESSLLI, Malaga. To appear in N. Alechina, ed. special issue of *Journal of Logic, Language and Information*

Liu F. 2006B. Preference change and information processing. Tech Report, PP-2006-41. ILLC, University of Amsterdam. //*Proceedings of the 7th Conference on Logic and the Foundations of Game and Decision Theory* (LOFT 06), Liverpool

Lutz C. 2006. Complexity and succinctness of public announcement logic. // *Proceedings of the Fifth International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems* (AAMAS06)

Maynard-Reid II P, Shoham Y. 1998. From belief revision to belief fusion. // *Proceedings of LOFT-98*. Torino

Miller J, Moss L. 2005. The undecidability of iterated modal relativization. *Studia Logica*, 97: 373 ~ 407

Parikh R, Ramanujam R. 2003. A knowledge-based semantics of messages. *Journal of Logic, Language and Information*, 12: 453 ~ 467

Plaza J A. 1989. Logics of public communications. // *Proceedings 4th International Symposium on Methodologies for Intelligent Systems*

Rott H. 2006. Shifting priorities: Simple representations for 27 iterated theory change operators. // Lagerlund H, Lindström S, Sliwinski R, eds. *Modality Matters: Twenty-Five Essays in Honour of Krister Segerberg*. Uppsala Philosophical Studies, 53: 359 ~ 384

Segerberg K. 1995. Belief revision from the point of view of doxastic logic. *Bulletin of the IGPL*, 3: 534 ~ 553

Segerberg K. 1998. Irrevocable belief revision in dynamic doxastic logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 39: 287 ~ 306

Segerberg K. 1999. Default logic as dynamic doxastic logic. *Erkenntnis*, 50: 333 ~ 352

Shoham Y. 1988. *Reasoning About Change: Time and Change from the Standpoint of Artificial Intelligence*. Cambridge (Mass.): The MIT Press

Spohn W. 1988. Ordinal conditional functions: a dynamic theory of epistemic states // Harper W L, et al. eds. *Causation in Decision, Belief Change and Statistics II*. Dordrecht: Kluwer: 105 ~ 134

van Benthem J. 1989. Semantic parallels in natural language and Computation. // Ebbinghaus H-D et al.; eds. *Logic Colloquium, Granada* 1987. Amsterdam: North-Holland: 331 ~ 375

van Benthem J. 2003. Structural properties of dynamic reasoning. // Peregrin J, ed. Meaning: *the Dynamic Turn*. Amsterdam: Elsevier: 15 ~ 31

van Benthem J. 2006A. 'One is a lonely number': on the logic of communication. Tech Report, PP-2006-27. ILLC, University of Amsterdam. // Chatzidakis Z, Koepke P, Pohlers W, eds. 2006. *Logic Colloquium* '02, Wellesley (Mass.): ASL & A. K. Peters: 96 ~ 129

van Benthem J. 2006B. Open problems in logical dynamics. // D. Gabbay, S. Goncharov & M. Zakharyashev, eds. *Mathematical Problems from Applied Logic I*, Springer: 137 ~ 192

van Benthem J, van Eijck J, Frolova A. 1993. Changing preferences. Tech Report CS-93-10. Center

for Mathematics and Computer Science, Amsterdam

van Benthem J, van Eijck J, Kooi B. 2006. Logics of communication and change. *Information and Computation*, 204: 1620 ~ 1662. Previous version in *Proceedings TARK* 2005 as 'Common knowledge in update logics'

van Benthem J, Girard P, Roy O. 2007. Ceteris paribus preference logic. Manuscript. Stanford University and ILLC Amsterdam. To appear in *Journal of Philosophical Logic*

van Benthem J.; Liu F. 2004. Diversity of logical agents in games, *Philosophia Scientiae*, 8: 163 ~ 178

van Benthem J, Liu F. 2006. Dynamic logic of preference upgrade. Tech Report, PP-2006-29. ILLC, University of Amsterdam. Official version, 2007. *Journal of Applied Non-Classical Logic*, 17: 157 ~ 182

van Benthem J, van Otterloo S, Roy O. 2006. Preference logic, conditionals and solution concepts in games. // Lagerlund H, Lindström S, Sliwinski R, eds. *Modality Matters: Twenty-Five Essays in Honour of Krister Segerberg*. Uppsala Philosophical Studies, 53: 61 ~ 77

van Benthem J, Pacuit E. 2006. The tree of knowledge in action: towards a common perspective. // *Proceedings Advances in Modal Logic*, Melbourne

van Ditmarsch H. 2005. Prolegomena to dynamic logic for belief revision. *Knowledge, Rationality & Action* (Synthese), 147: 229 ~ 275

van Ditmarsch H, van der Hoek W, Kooi B. 2007. *Dynamic Epistemic Logic*. Berlin: Springer

Veltman F. 1985. *Logics for Conditionals*. PhD thesis. University of Amsterdam

Veltman F. 1996. Defaults in update semantics. *Journal of Philosophical Logic*, 25: 221 ~ 261

Yamada T. 2006. Acts of commands and changing obligations. //*Proceedings 7th International Workshop on Computational Logic in Multi-Agent Systems* (CLIMA VII)



偏好升级的动态逻辑*

郭佳宏/译　郭美云　萧瑶/校

9.1　概论：不断变化的偏好

有关偏好的概念出现在许多领域中，比如行为哲学、决策论、最优理论及博弈论等。理性主体往往采用世界或动作之间的个体偏好来预测它们的行为。有关偏好研究的更抽象的想法还体现于条件句逻辑、非单调逻辑和信念修正理论领域，它们的语义往往通过相对的相似性或似乎合理性来给世界排序。

偏好逻辑　文献中提及的采用不同策略的偏好逻辑主要描述不同的但可以比较的结构（[Hansson. 1990]）。主体的偏好可以存在于世界之间，也可以在行为之间；当它们用来比较世界或行为时，相应的偏好陈述可以是较弱的或较强的——而且它们还可能是更“客观的”或者更“主观的”。诸如“我喜欢日落胜过喜欢日出”的陈述可以仅仅从“什么对我更好”的角度理解，也可理解成更复杂的命题态度，此态度包含我对相关事件的信念。在本文中，我们将采用客观的方法，即这里的二元关系支持一元模态词：“在至少与当下的世界一样好的世界下为真”（[Boutilier. 1994；Halpen. 1997]）。[van Benthem, et al. 2006] 表明，当增加某些算子使用混合语言时，新的语言可以定义如条件句、纳什均衡及有关博弈的逆向归纳法等。此语言还可以表达主体拥有的各种居于命题之间的偏好，比如，事件的类型。更进一步，我们还添加明确的认知算子，这样就可以表达主体有关“什么对它是好的或者更好的”的态度。

偏好动态　本文主要关心的问题是动态变化的一种。众所周知，偏好不是静

* Dynamic Logic of Preference Upgrade. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 2007, 17:157 ~ 182

止的，它们会随着权威机构提出的命令、朋友提供的好建议而改变；甚至我们自己对于世界和行为的赋值也可导致它们的改变。这些改变有各种各样的触发机制，比如，直观地说，如果人们接受命令发出者对他们偏好的影响，那么命令

"确保 ϕ 发生！"

至少会导致接受者对那些 ϕ 成立的世界的喜好要优于那些 ϕ 不成立的世界。而且，随着学到现实世界的更多内容，带有目标的计划过程可能会逐渐地诱发我们在心目中产生有关行为的偏好，以此作为朝向达到目标的方式。关于偏好的上述描述和其他动态方面的说明可以参阅 [van Benthem, et al. 1993；Hansson. 1995；Zarnic. 2003；Van der Torre & Tan. 1999；Yamada. 2006] 等文献。

前面提到的相关思想几乎全部体现在条件句逻辑的动态语义学中([Spohn. 1988；Veltman. 1996])。在它静态的刘易斯型的语义学中，条件句 $\phi \Rightarrow \psi$ 大概表示下述意思：

ψ 在所有那些最优的 ϕ-世界中为真 (#)

于是，接受一个条件句的一种合理方案可以理解为对主体的一种指示：为了使 (#) 成立而对相应偏好做出的调整；而不是对当前偏好的真/假描述。更简单点，不妨来看看称之为"缺省断定"的例子：

"正常情况下，ϕ 成立"

正如 [Veltman. 1996] 指出的那样，在通常有关信息更新的动态意义下，此种断定并不从当前模型中消除$\neg\phi$-世界。

触发 1：建议　导致偏好改变的触发方式很多；在恰当的一般性情况下，为了更好地研究它们，动态偏好逻辑应该为它们提供具有解释力的形式。为了实现此目标，我们从一个简单的试验剧情出发，称之为"建议"。设想有人对"去旅行"(p) 和"待在家里"($\neg p$) 没有特别的偏好。现在他的朋友来看他并且说：

"让我们去旅行吧！"

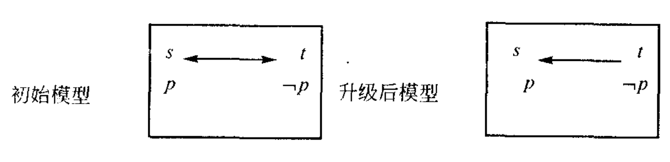


图 9-1

"接受"建议意味着在当下模型中原有的任何有关待在家里的偏好被删除掉了。图 9-1 表示的正是这样的过程。

所以，在上述例子中，建议会消除已经存在的偏好链接，但是它并不增加新的链接。另外需要指出的是，除了在图中画的箭头外，本文约定偏好关系总具有

自返环。稍后我们将非常详细地研究上述表达机制，以此作为研究更一般的偏好升级问题的切入点。即便如此，从比较的角度而言，还需要考虑另外一种改变偏好的触发方式。它们并不删除链接，而是增加。

触发2：命令

在上图中，主体现在倾向于旅行，于是旅行成了他的“优先”，或者如果从道义的角度来理解偏好关系的话，成了他的“职责”。不过一般来讲，建议要弱于命令。接受建议并不意味着主体就会更喜欢 p-世界（相比于 $\neg p$-世界）。这完全取决于主体自己已有的偏好结构。如果主体对 p 和 $\neg p$ 没有特别偏好（即在图中具有双箭头），那么接受建议确实能使主体产生偏好。不过主体可能没有能力比较上述两种情境，如在有两个不相关的世界的模型中：

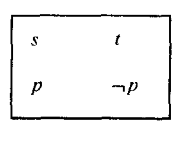


图9-2

从关系减少的意义上说，建议并不能使原来的世界变得可以比较。然而，如果“进行旅行”是命令的话，那么可以确信主体现在更偏好于 p（即旅行）。于是需要在图中增加偏好链接，使得对 $\neg p$ 世界的偏好变弱。我们在文中还处理那些增加链接的偏好升级。

有关升级的动态逻辑

不管是消除还是增加（链接），现有的动态认知逻辑传统中的有关信息更新的系统都凸显了偏好更新的现象（[Gerbrandy. 1999；Baltag, et al. 1998；van Benthem. 2007；van Ditmarch, et al. 2007]）。在后者中，引入的断定或命题可以改变当前模型及/或者它的可达关系。而在我们的例子中，当前的偏好关系随着建议或命令的引入而改变。因此，我们用词项“升级”来取代更为流行的“更新”一词。本文的主要目的是表明偏好升级是一种可以研究的现象，它同样可以导致逻辑系统的变化，正如信息、时间、或“逻辑动态”中的其他参数所影响的那样（[van Benthem, et al. 1993；van Benthem. 1996]，或者体现于条件句逻辑的某些问题中，[Spohn. 1988；Veltman. 1996]）。我们将采用动态认知逻辑中发展出来的信息更新的方法，试图表明偏好改变这样的动态过程也可以在上述的框架下得以表达。

本文的结构如下：首先在9.2提出一种新的结合认知和偏好的逻辑（认知偏好逻辑）。它的语义是基于世界集上的偏好。这样就可以探讨知道或不知道某人的偏好，或者甚至后悔最好的情形没有发生等问题。在接下来的9.3，我们将为偏好升级提供形式定义，重点强调前面提到的“建议”如何提高人们对被建议的命题（相对于它的否定）的偏好。有趣的是，这也意味着对信息更新可以采用另一种形式化方式。9.4将为静态的偏好语言定义一个动态的版本，在那里偏

好升级和信息更新可以共存。其中，根据通常的归约公理，不难证明完全性定理。这里的归约公理主要用来递归地分析行为的事后条件。这是我们第一次给出关于信息更新和升级的动态变化组合的“存在性证明”。在9.5节中，我们将考察更一般的升级实例：首先给出链接消除的一般模式，然后采用“事件（行为）模型”为信息提供一个彻底的“乘积更新”描述。这就需要为动态认知逻辑的行为模型增加有关主体建立于事件之间的偏好。9.6将略述动态升级逻辑在缺省推理、道义逻辑和命令逻辑中的一些应用。9.7是对相关工作的简单概括，9.8节则是结论和今后的进一步研究方向。

总的来说，本文提出了考虑偏好升级的某种想法，以及从逻辑方法论的角度为它提供一种存在性证明。这里并不讨论偏好的意义，或者由它缘起的领域产生的所有逻辑问题。关于升级机制与各种触发方式的关系、各种偏好意义，以及它的进一步应用前景的更广泛和深入的讨论请参阅［de Jongh & Liu. 2006; Liu. 2006B］。

9.2 认知偏好逻辑

9.2.1 语言和语义

本文中采用的主要语言由以下两部分组成：来自［van Benthem, van Otterloo & Roy. 2006］的偏好模态算子和来自认知逻辑经典的知道算子。

定义1 记命题变元集和主体集分别为 P（p 在 P 中变化）和 I（i 在 I 中变化）。认知偏好语言可以由下列方式给出：

$$\phi ::= \bot \mid p \mid \neg\phi \mid \phi\wedge\psi \mid K_i\phi \mid [pref]_i\phi \mid U\phi$$

直观地，$K_i\phi$ 表示“主体 i 知道 ϕ”，而 $[pref]_i\phi$ 的意思是指主体 i 认为的那些至少跟当前世界一样好的世界满足 ϕ。U 是一个辅助的普遍模态算子①。

那么上述的形式语言是怎么跟自然语言会话中出现的“偏好”联系起来呢？有人倾向于把 $\langle pref\rangle_i\phi$ 理解成“主体偏好 ϕ”。不过考虑到其他的逻辑系统，我们发现在形式化系统和自然语言的用法之间存在着距离。例如，只说主体看到某个更好的世界满足 ϕ 来定义主体偏好 ϕ 似乎太弱，而用普遍模态 $[pref]_i\phi$ 则又

① 为了技术上的方便，我们通常把相应的普遍模态算子转换成存在性模态算子 $\langle K_i\rangle$，$\langle pref_i\rangle$ 和 $E\phi$。从直观的语言表达角度去理解它们可能会显得更加困难。不过它们可以帮助发现和检验哪些规则是有效的，同时在一般的语义论证中它们也有作用。

显得太强。[Hansson. 2001] 对偏好的意义作了详细深入的讨论，同时分析了相应的形式语言匹配的和不匹配的情况。这里我们仅指出下列事实。首先，形式语言还可以为偏好表达“较好性”的中间意义。采用的方法是模态词的组合，例如，$[pref]_i\ \langle pref\rangle_i\phi$ 至少可以用来表示：在有穷的连通模型中，某个最好的世界具有性质 ϕ。同样也不难表示“所有最好的世界满足 ϕ”（参阅 [van Benthem, van Otterloo & Roy. 2006]）。更为重要的是，这里强调有关世界的比较，即相对于命题，个体更重要；而关于偏好的一般性解释通常建立于命题之间，或者从语义的角度来看，在世界集（以世界为元素组成的集合）之间。而我们的方法可以定义上述基于命题之间的偏好（请再参阅 [van Benthem, van Otterloo & Roy. 2006]。例如，$U(\psi\rightarrow\langle pref\rangle_i\phi)$ 表示“相比 ψ，主体 i 更偏好 ϕ”的一种较强意义，即对每个 ψ-世界 s，都至少有一个它可达的 ϕ-世界，使得对主体而言，这样的世界至少跟 s 一样好。当然人们也可以定义如同 [van Wright. 1963] 中关于偏好的最初概念。那里表示相对于所有的 ψ-世界，主体更偏好所有的 ϕ-世界（参阅 [van Benthem, van Otterloo & Roy. 2006; van Benthem, Girard & Roy. 2006] 还处理冯赖特（Von Wright）的“其他条件下……均同”的条款，它出现在世界之间的相关比较中）。现在暂定采用前面提到的看起来比较简单的模态词及其表达。我们的简单基本模态词的一个优点是它们能够“以一种清晰的方式解析那些更为复杂的偏好陈述，同时又考虑到简单的动态方法”。

定义 2　每个认知偏好模型是个三元组 $\mathfrak{M}=(S,\{\sim_i\mid i\in I\},\{\leq_i\mid i\in I\},V)$。其中 S 是可能世界集，$\sim_i$ 是通常意义下对于主体 i 来说的认知可达关系（它是等价关系）[①]，V 是对命题变元的赋值。而且 $\leq_i$ 是世界集上的自返和传递关系。

直观地，$s\leq_i t$ 表示“对主体 i 而言，t 至少跟 s 一样好”，或者“t 弱好于 s”。如果 $s\leq_i t$ 但并非 $t\leq_i s$，那么称 t 严格好于 s（相对主体 i），记作 $s<_i t$。如果 $s\leq_i t$ 并且 $t\leq_i s$，那么就说主体对 s 和 t 是无殊的。不少文献的模型中还可以有一个突显的现实世界，而这里基本上不采用这样的方式。

需要注意的是，我们并不要求这里的偏好关系是连通的（在刘易斯为条件句逻辑而建立的球形模型的意义下）。一般地，我们允许存在真正不可比较的世界。主体对它们没有偏好，并不是因为对它们没有偏好，而是因为她没有办法去比较那些世界。这正如极小条件句逻辑的语义学中提到的那样。当然在某些特殊的情

① 在有些方案中，学者们不一定用等价关系来解释知识算子，有许多相应的采用不同可达关系的哲学论证。他们主要用模型类的方法来说明不同的关系。关于等价关系或其他模型类的认知逻辑的完全性，请参阅经典文献，如 [Fagin, et al. 1995; Blackburn, et al. 2001]。

况下，比如博弈中基于效用的有关结果的经典的偏好序，连通性就十分恰当。

定义 3 给定一个认知偏好模型 $\mathfrak{M}=(S, \{\sim_i \mid i\in I\}, \{\leq_i \mid i\in I\}, V)$ 和世界 $s\in S$，归纳于公式 ϕ 的结构，我们定义可满足关系 $\mathfrak{M}, s\models\phi$（表示公式 ϕ 在模型 $\mathfrak{M}$ 的 s 中为真）：

(1) $\mathfrak{M}, s\models p$ 当且仅当 $s\in V(p)$；

(2) $\mathfrak{M}, s\models\neg\phi$ 当且仅当，并非 $\mathfrak{M}, s\models\phi$；

(3) $\mathfrak{M}, s\models\phi\wedge\psi$ 当且仅当 $\mathfrak{M}, s\models\phi$ 并且 $\mathfrak{M}, s\models\phi$；

(4) $\mathfrak{M}, s\models\langle K\rangle_i\phi$ 当且仅当，存在某个 t：$s\sim_i t$ 并且 $\mathfrak{M}, t\models\phi$；

(5) $\mathfrak{M}, s\models\langle pref\rangle_i\phi$ 当且仅当，存在某个 t：$s\leq_i t$ 并且 $\mathfrak{M}, t\models\phi$；

(6) $\mathfrak{M}, s\models E\phi$ 当且仅当，存在某个 t：$\mathfrak{M}, t\models\phi$。

表达力

正如前面指出的那样，在普遍模态词的帮助下，[van Benthem, van Otterloo & Roy. 2006] 已说明上述语言中的纯模态偏好部分可以表达大量的命题之间的偏好的自然观念，包括冯赖特的想法。而且，根据 [Boutilier. 1994]，上述语言在采用偏好算子 $\langle pref\rangle_i$ 的情况下可以把非迭代的条件句 $\phi\Rightarrow\psi$ 嵌入到下述公式中：

$$U(\phi\rightarrow\langle pref\rangle_i(\phi\wedge[pref]_i(\phi\rightarrow\psi)))$$

如果再加上认知算子，还可以表达偏好和知识的相互关系。下面的两个例子分别表示（a）关于“偏好”自省性的一种直观解释，（b）一种不幸但普遍的现象：

$$\langle pref\rangle_i\phi\rightarrow K_i\langle pref\rangle_i\phi\text{：偏好正自省}$$

$$\langle pref\rangle_i\phi\wedge K_i\neg\phi\text{：后悔}$$

我们将在后面讨论混合的认知-偏好规则。

9.2.2 公理化系统和完全性

给定前面提到的认知偏好模型，我们的认知偏好逻辑能够在经典模态逻辑的框架下被完全地公理化（参阅 [Blackburn, et al. 2001]）。

定理 1 认知偏好逻辑相对于认知偏好模型是完全的公理化系统。

证明：完全采用经典模态逻辑中的技术。

语言中的附加公理进一步强调了模型上的框架条件。下面请看基于经典模态框架-对应理论的两个例子：

命题 1 （a）偏好框架 $\mathscr{F}=(S, \{\sim_i \mid i\in I\}, \{\leq_i \mid i\in I\})$ 满足连通性，即

$\forall x \forall y$: $x \leq_i y \vee y \leq_i x$，当且仅当下面的公式在框架中真（有效）：

$$(\phi \wedge E\psi) \to \langle pref \rangle_i \psi \vee E(\psi \wedge \langle pref \rangle_i \phi)$$

（b）认知偏好框架 $\mathscr{F}$ 使得偏好自省公理 $\langle pref \rangle_i \phi \to K_i \langle pref \rangle_i \phi$ 在其中真当且仅当它满足下列一阶条件：

$$\forall s \forall t \forall u: (s \leq_i t \wedge s \sim_i u \to u \leq_i t)$$

不过，我们在本文中将使用上面描述的极小系统，把这些额外的讨论放在一边。

9.3　为偏好升级建模

9.3.1　认知信息更新的简单回顾

基本的认知更新范例是公开宣告。假定一个主体开始不知道 p 是否为真，但是通过一个宣告 $!p$ 得知这一事实。我们有下面的一种模型变化，其中在初始模型中的点线表示主体的不确定性关系（见图 9-3）。

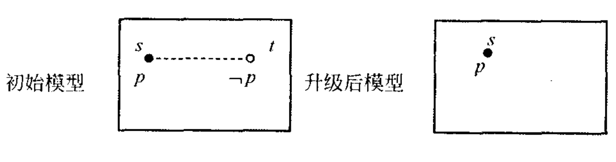


图 9-3

这一宣告把原认知模型中的 $\neg p$-世界全部消除了，然后主体就知道了 p。文献中有大量的关于公开宣告和更复杂的认知事件的动态认知逻辑，不同的主体以不同的方式修改信息。请参阅［Baltag, et al. 1998; van Benthem. 2007］及 9.5.4。

这些逻辑从本质上说都是以相同的设计方案进行运作的。首先，选择一类模型加上描述它们的适当的静态语言，用来表达相关的信息结构。通常，它们是经典认知逻辑中以某种版本形式出现的模型。其次，提出更新机制用来转换（在一组认知动作集下选择）给定的模型。对于“公开宣告”，这个只是简单地表现为删除世界，生成可定义的子模型：

> 关于真命题 ϕ 的公开宣告 $!\phi$ 把当下模型 $(\mathfrak{M}, s)$（s 为现实世界）转化成模型 $(\mathfrak{M}_{!\phi}, s)$，它的世界集正好是集合 $\{w \in S \mid \mathfrak{M}, w \models \phi\}$。原可达关系和赋值在限制的定义域中继续保留。

更加复杂的行为则把当下的认知模型 $\mathfrak{M}$ 更新为乘积模型 $\mathfrak{M} \times \mathfrak{E}$，其中 $\mathfrak{E}$ 是

包括所有相关事件或动作的“事件模型”。

下一步，通过展示何使用信息事件本身，静态语言获得了动态扩张。对于公开宣告，上述类型的一个典型的动态-静态断定如下：

$[!\phi]K_i\psi$：在真实地公开宣告 ϕ 后，主体 i 知道 ψ

关于动态模态词的语义解释简单如下：

$\mathfrak{M},s \models [!\phi]\psi$ 当且仅当（如果 $\mathfrak{M},s \models \phi$，那么 $\mathfrak{M}_{!\phi},s \models \psi$）

于是，按通常的办法可以采用递归的方式，对事件的效果作一番完备的描述，从而可以对交流和其他认知过程进行组合分析。作为一个重要的例示，下面请看有关公开宣告的逻辑中的归约公理（公开宣告真命题后使得主体 i 获得了一种认知可能状态）：

$$\langle !\phi\rangle\langle K\rangle_i\psi \leftrightarrow \phi \wedge \langle K\rangle_i\langle !\phi\rangle\psi$$

如文献中讨论的那样，从语义的角度看，这条公理反映的是那些具有完美记忆力的主体的更新过程。从计算的角度看，类似上述的公理可以帮助我们建立从动态认知陈述到静态认知陈述的递归算法，从而允许我们利用已知的适用于基础语言的判定程序。

9.3.2 把“升级”看作“关系变化”

类似“公开宣告”的经典做法，现在我们定义前面提到（非形式）的偏好变化的机制。这里的静态模型自然是 9.2 中提到的认知偏好结构：

$$\mathfrak{M} = (S, \{\sim_i \mid i \in I\}, \{\leq_i \mid i \in I\}, V)$$

这里的“触发”是公开建议 ϕ 的事件，记作：$\#\phi$。

由此导致的模型改变有：删除那些 $\neg\phi$ 强于 ϕ 的偏好。

定义 4 给定任意的认知偏好模型（$\mathfrak{M}$，s），升级模型（$\mathfrak{M}_{\#\phi}$，s）定义如下：

（a）（$\mathfrak{M}_{\#\phi}$，s）跟模型（$\mathfrak{M}$，s）具有相同的论域、赋值、认知关系及现实世界，除了

（b）新的偏好关系现在成了：$\leq_i^* = \leq_i - \{(s,t) \mid \mathfrak{M},s \models \phi$ 且 $\mathfrak{M},t \models \neg\phi\}$①

在不影响理解的前提下，我们将省略表示主体的下标。

为建议所定义的升级是用可定义的子关系取代原来的偏好关系。可以用下列来自动态逻辑的标准记法来表示上述的升级过程［Harel，et al. 2000］：

① ［Harrenstein. 2004］以集合论的形式分析了新定义的偏好关系。

$$R := R - (?\phi;R;?\neg\phi)$$

我们将在9.5考察更普遍的关系-变化运算。例如相对于消减链接，有人想增加链接，上面的格式依然可以表达。如关系-扩张约定：

$$R := R \cup (?\neg\phi;\top;?\phi)$$

其中⊤是全通关系，使得每一个ϕ-世界偏好于每一个$\neg\phi$-世界。采用我们的升级定义，可以为偏好升级定义一种动态语言。本文将在9.4节正式做这个事情；在此之前，不妨首先考虑我们刚刚定义的内容的一些性质。

升级的“保持”性质

这里最令人关注的地方可能是我们提出的模型变化算子是否能保持预期的静态模型。对于涉及公开宣告$!\phi$的更新，这是成立的——因为我有一般的逻辑事实：子模型保持那些普遍定义的关系性质，比如自返、传递和对称等。对于我们的“升级”，偏好关系中能够保持的相应的性质是自返和传递（认知关系保持不变）。遗憾的是这里没有一般性结果，因为我们有下列子模型的保持性结果的对应性质：

命题2　在子关系下保持的一阶性质正是那些可用原子的否定、∧、∨、∃、∀定义的性质。

自返性和传递性都不满足上述具体的句法形式。不过如果采用我们提议中的一些特殊的性质，可以证明操作$\mathfrak{M}_{\#\phi}$保持自返性和传递性。

命题3　操作$\mathfrak{M}_{\#\phi}$保持自返性和传递性。

证明：既然我们从不删除环(s, s)，自返性显然是保持的。至于传递性，假设有$s \preceq^* t \preceq^* u$，但并非$s \preceq^* u$。根据$\#\phi$的定义，有$\mathfrak{M}, s \models \phi$并且$\mathfrak{M}, u \models \neg\phi$。取中间点$t$。情况1：$\mathfrak{M}, t \models \phi$。那么$\preceq$中的链接$(t, u)$应该被删除。情况2：$\mathfrak{M}, t \models \neg\phi$。这种情况下删除的是链接$(s, t)$。不管哪种情况都将导致矛盾。■

另一方面，升级$\#\phi$会导致偏好关系中连通性的丧失。其实我们已经在9.1节中的例子（图9.2）表明了这一情况。类似地，这里的升级还导致正自省性的丧失，请看下面的情景：

例1：

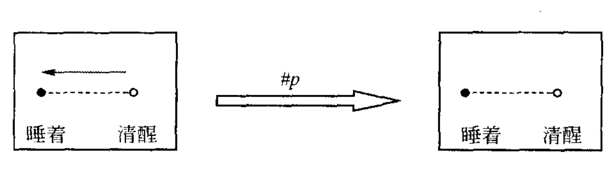


图9-4

模型中的两个世界分别表示“睡着”和“清醒”。在两个模型中，我们都不知道是睡着还是清醒。起始状态，我们倾向于睡着，因为知道自己的偏好。现在升级发生了，有人建议真实清醒的人生其实并不差。然后我们还是不知道自己是睡着的还是清醒的，不过已经在偏好的“清醒”世界里变得清醒了（尽管在“睡着”世界里并非如此）。在新模型中的“睡着”世界，我们依然偏好睡着。但是不再知道自己偏好它——既然我们可能在“清醒的世界”中。所以自省性不成立！

在某些情况下，偏好自省性看起来是合理的，这就需要相应的模型能够保持这样的性质。我们可以修改前面的升级概念去实现目的，比如通过保证消除认知无偏好世界的相似链接或者研究语言中哪些特殊种类的升级具有始终保持偏好自省的性质。后者可能是“合理的”或者“明智的”建议。

通过剪切链接更新

在本文介绍的系统中，更新和升级不是两个完全分离的行为。例如，如果想为前面提到的“后悔”现象（后悔那些不再是可选的世界）建构模型，$!\phi$ 的认知更新就不应该删除$\neg\phi$-世界，既然主体可能仍然提到它们，甚至可能哀悼它们的缺失。解决上述“后悔”的一种可行办法是重新定义公开宣告的更新，把其看做是“剪切链接”的关系-变化操作。这次相对于前面的$!\phi$，我们把相关的更新动作记作：

$$\phi!$$

注意记号“!”现在在 ϕ 后面。相应的，为了与前面提到的删除世界的模型区别，我们把更新后模型记作 $\mathfrak{M}_{\phi!}$。实际上还应该用两类不同的感叹号来表示相应的更新——不过我们相信在具体的语境下读者能够消除歧义。关于模型上的 $\phi!$ 操作的语义定义如下：

定义 5 修改的公开更新模型 $\mathfrak{M}_{\phi!}$ 的世界集和赋值跟原来的模型 $\mathfrak{M}$ 一样，可达关系 $\sim_i$ 把原来的换成 $\mathfrak{M}$ 中 ϕ-区域和$\neg\phi$-区域不交叉部分对应的版本：

$$(?\phi;\sim_i;?\phi)\cup(?\neg\phi;\sim_i;?\neg\phi)$$

命题 4 在公开宣告的纯认知逻辑下，$!\phi$ 和 $\phi!$ 是相同的。

然而，第二种的更新模式还是有些优点。它最先由［Snyder. 2004］（参阅［van Benthem & Liu. 2004］）在建模无记忆的主体行为时提出，那里模型的认知可达关系跟经典的动态认知逻辑中的理想更新主体的可达关系有很大的不同。而且在我们现有的背景下，为了陈述后悔，还需要有类似下述公式的一致性：$K_ip\wedge\langle pref\rangle_i\neg p$。直观的大概意思是：我知道 p，但如果不是 p，那就更好。修改后

的更新方法允许有上述公式的一致性。

链接剪切也有一些奇怪的性质，比如，宣告 $\phi!$ 和 $(\neg\phi)!$ 对当前的模型来说将产生相同的链接剪切：它们都删除 ϕ-世界和 $\neg\phi$-世界之间的链接。唯一的不同之处是前者只能发生于满足 ϕ 的当前世界中，而后者则需要满足 $\neg\phi$。可以通过有效的逻辑规则来反映这种区别，不过本文并不打算做此工作。

讨论：更新和升级　区分这两种有关信息更新的版本可以使相应的组合式更新-升级逻辑得到更细致的区分。如果执行 $!\phi$ 删除的所有世界是主体所知道的非-现实的世界，相应的偏好陈述将自动地调整为那些主体所知道的事实。这是现实主义者的行为，他们从来不对洒落的牛奶哭泣。对现实主义者 i 来说，下列组合的宣告/偏好原则是有效的，至少对原子陈述（如 p），宣告并不能改变它们的真值。

$$[!p][pref]_i p$$

不过对那些比较怀旧的灵魂（主体）来说，这样的原则不是有效的，因为她们还沉浸在过去事情被颠覆的悲痛之中。对她们而言，更新相当于链接-剪切 $\phi!$，她们执著于所有世界之间的偏好，甚至新的事实还可能引发她们后悔：

$$\langle pref\rangle_i \neg p \rightarrow [p!](\langle pref\rangle_i \neg p \wedge K_i p)$$

9.4　动态认知升级逻辑

9.4.1　语言和语义

下面我们为更新和升级引入一种更丰富的动态语言。它的静态部分就是前面9.2节提到的语言，不过它的行为词汇包括公开宣告 $\phi!$ 和建议 $\#\phi$。解释原来的世界-消除型的宣告是例行公事，需要强调的是，后者是不同于经典的新版本。

定义6　令 P、I 分别为命题变元集和主体集，p 在 P 中变化，i 在 I 中变化。给出下述动态认知偏好语言：

$$\phi ::= \bot \mid p \mid \neg\phi \mid \phi\wedge\psi \mid K_i\phi \mid [pref]_i\phi \mid U\phi \mid [\pi]\phi$$
$$\pi ::= \phi! \mid \#\phi$$

我们也可以把命题动态逻辑中常用的程序算子，如“组合”、“选择”、“迭代”，加入到行为词汇中——这里我们不准备讨论它们。于是新的语言可以在下述的认知偏好模型中，解释含有“后悔”的更新版本：

定义7　给定认知偏好模型 $\mathfrak{M}$，关于一般公式的真值定义如往常，这里给出

两个新增的行为模态词的定义：

$$(\mathfrak{M},s)\models[\phi!]\psi \text{ 当且仅当,如果 } \mathfrak{M},s\models\phi\text{,那么 } \mathfrak{M}_{\phi!},s\models\psi$$

$$(\mathfrak{M},s)\models[\#\phi]\psi \text{ 当且仅当 } \mathfrak{M}_{\#\phi},s\models\psi$$

9.4.2 偏好升级逻辑

相对于认知偏好模型，9.2 静态语言中提到的所有有效原则依然成立。而且，关于公开宣告的一般公理也成立，除了多了一点变化。通常的更新！ϕ 删除所有的$\neg\phi$-世界，而更新 $\phi!$保留模型中的所有世界，只是剪切掉链接。对于纯认知动态公理，上述两者并不能区分；但它们能区分在模型的整个论域上的全局的存在性模态词。通常的归约公理是：

$$\langle !\phi\rangle E\psi \leftrightarrow \phi \wedge E\langle !\phi\rangle\psi$$

不过下面提到的公理与它不同，因为这里 $E\phi$ 仍可指向在更新后那些曾经是$\neg\phi$ 的世界。下文对此还会有进一步的评论。首先请关注这里的新内容：升级及它同修改过的更新的相互作用。为了方便起见，我们使用存在模态词来表达。不难得出下列原则的可靠性：

定理 2 下列公式是有效的：

(1) $\langle\phi!\rangle p \leftrightarrow (\phi\wedge p)$

(2) $\langle\phi!\rangle\neg\psi \leftrightarrow (\phi\wedge\neg\langle\phi!\rangle\psi)$

(3) $\langle\phi!\rangle(\psi\wedge\chi) \leftrightarrow (\langle\phi!\rangle\psi\wedge\langle\phi!\rangle\chi)$

(4) $\langle\phi!\rangle\langle K\rangle_i\psi \leftrightarrow (\phi\wedge\langle K\rangle_i\langle\phi!\rangle\psi)$

(5) $\langle\phi!\rangle\langle pref\rangle_i\psi \leftrightarrow (\phi\wedge\langle pref\rangle_i\langle\phi!\rangle\psi)$

(6) $\langle\phi!\rangle E\psi \leftrightarrow (\phi\wedge E(\langle\phi!\rangle\psi\vee\langle\neg\phi!\rangle\psi))$

(7) $\langle\#\phi\rangle p \leftrightarrow p$

(8) $\langle\#\phi\rangle\neg\psi \leftrightarrow \neg\langle\#\phi\rangle\psi$

(9) $\langle\#\phi\rangle(\phi\wedge\psi) \leftrightarrow (\langle\#\phi\rangle\psi\wedge\langle\#\phi\rangle\chi)$

(10) $\langle\#\phi\rangle\langle K\rangle_i\psi \leftrightarrow \langle K\rangle_i\langle\#\phi\rangle\psi$

(11) $\langle\#\phi\rangle\langle pref\rangle_i\psi \leftrightarrow (\neg\phi\wedge\langle pref\rangle_i\langle\#\phi\rangle\psi)\vee(\langle pref\rangle_i(\phi\wedge\langle\#\phi\rangle\psi))$

(12) $\langle\#\phi\rangle E\psi\leftrightarrow E\langle\#\phi\rangle\psi$

证明：前 4 个公式是公开宣告逻辑中众所周知的有效的归约公理。第 5 个是关于 $\langle\phi!\rangle$ 和 $\langle pref\rangle_i$ 的交换律，表示认知更新并不改变任何偏好关系这样的事实。有关 $E\phi$ 的特殊情况我们前面已经讨论。

接下来是一组有关升级的相似的归约原则。公式（7）类似公式（1），不过更简单些——因为那里没有$\#\phi$ 的事前条件：这样的操作总是可以执行的。这里

只是表明原子事实在升级的过程并不改变。接下来的两条公理表示升级是函数。然后是偏好和知识的交换原则，表明升级并不改变任何认知关系这样的事实。

公式（11）是至关重要的，因为它准确地为主体改变认知关系编码。它说出了这样的本质：在用 ϕ 升级之后，从当下世界到 ϕ-世界的偏好链接的成立当且仅当在升级之前有相同的链接存在。这意味着并不能排除下列的情况：即从满足 ϕ 的现实世界到某个其他满足 $\neg\phi$ 的世界之间的链接。关于链接保持的三种情况，可用右边的两个析取支来简单地描述之。最后，因为升级有可能已经改变了公式的真值；我们必须很谨慎地说，在升级之前，链接所指向的世界应满足 $\langle\#\phi\rangle$ 而不是 ϕ。

上列中的最后一条公理简单地表示偏好和存在性模态词的交换原则。 ■

这样的动态认知升级逻辑（接下来简记为 *DEUL*）可以解释信息和偏好变化的一般过程。特别的，我们可以把升级系统看做是转换潜在世界-或对象-比较的关系；正由于此，与它匹配的逻辑还在命题层次记录改变的发生情况。所以，给定前面提到的（命题之间的偏好）模态语言的表达力，可以得出这样的原则：在某个升级动作后，可以获取一些新的命题偏好，并且是关联那些升级之前已有的命题偏好。不妨举一例，请看前面提到的有关偏好的“对所有……存在……”的概念：

$$P^{\forall\exists}(\phi,\psi)\quad \text{当且仅当}\quad U(\psi\rightarrow\langle pref\rangle_i\phi)$$

命题 5　下列等价关系成立

$\langle\#A\rangle P^{\forall\exists}(\phi,\psi)$ 当且仅当 $P^{\forall\exists}(\langle\#A\rangle\phi,\langle\#A\rangle\psi)\wedge P^{\forall\exists}((\langle\#A\rangle\phi\wedge A),(\langle\#A\rangle\psi\wedge A))$

证明：简单的演算表明 *DEUL* 公理化系统在实践中的应用方式：

$$\langle\#A\rangle P^{\forall\exists}(\phi,\psi)\leftrightarrow\langle\#A\rangle U(\psi\rightarrow\langle pref\rangle_i\phi)$$
$$\leftrightarrow U(\langle\#A\rangle(\psi\rightarrow\langle pref\rangle_i\phi))$$
$$\leftrightarrow U(\langle\#A\rangle\psi\rightarrow\langle\#A\rangle\langle pref\rangle_i\phi)$$
$$\leftrightarrow U(\langle\#A\rangle\psi\rightarrow(\neg A\wedge\langle pref\rangle_i\langle\#A\rangle\phi)\vee(\langle pref\rangle_i(A\wedge\langle\#A\rangle\phi)))$$
$$\leftrightarrow U(\langle\#A\rangle\psi\wedge\neg A\rightarrow\langle pref\rangle_i\langle\#A\rangle\phi)\wedge U(\langle\#A\rangle\psi\wedge A\rightarrow\langle pref\rangle_i(\langle\#A\rangle\phi\wedge A))$$
$$\leftrightarrow P^{\forall\exists}(\langle\#A\rangle\phi,\langle\#A\rangle\psi)\wedge P^{\forall\exists}((\langle\#A\rangle\phi\wedge A),(\langle\#A\rangle\psi\wedge A))$$ ■

类似地，也可以分析冯赖特关于命题之间的“所有所有”概念，在此意义下可把新的偏好同早期的关联起来——不过请读者完成相应的运算[①]。

---

① 有人可能会更极端一点，他们坚持动态偏好-变化的行为直接在命题的层面上进行，而与更深层的世界-层次无关。这体现在诸如信念修正理论的各种版本中：人们指示主体去相信某些命题。在此方面我们也有一些想法；不过它会涉及命题集上的牢固关系（entrenchment）和偏好关系这两者。这是一种更为语法化的方法，它提出了许多设计方面的问题，与本文使用的可能世界语义构架所要解决的问题一样多。

另外，正如前面提到的，这里的认知升级逻辑能够处理那些组合的情形诸如“后悔”。称指令序列

$$\#p;\neg p!\ (p\ \text{为原子命题})$$

将首先让 p 引人注意，随后 p 又变得不可获得。逻辑对此有所探讨，例如，在9.3结尾处提到的有效的“后悔原则”：

$$\langle pref\rangle_i p \rightarrow [\#p][\neg p!](\langle pref\rangle_i p \wedge K_i \neg p)$$

DEUL 可以分析那些由［Zarnic. 2003；Yamada. 2006］提议的“遵守连续命令”和“为获得实践目标的推理”的基本的命题型情景。

命题6 *DEUL* 可由上述归约公理完全地公理化。

证明：我们已经检查了归约公理的可靠性，它们足以把语言中的每一个公式最终转换成静态公式，其中不含有“宣告”或者“建议”这样的模态词，然后我们可以利用静态语言中的完全性定理了。■

用相同的归约方法还可证明 *DEUL* 是可判定的。于是得到了本文的第一个重要的结论：

偏好更新有一个完全的组合式逻辑，正像知识更新的系统一样。

9.4.3 有趣的新问题：一贯性

尽管在信息更新和偏好升级之间有技术性类似，但它们在直观上还是有所不同。一个典型的例子是“一贯性”的直观含义。在纯公开宣告逻辑中，跟断定序列的一贯性唯一相关的方面看起来是：

（a）不要在现实世界中作出不一致的和假的断定；不要浪费别人的时间；

（b）不要在整个群体中断定“公共知识”，因为那不改变原有的模型。

但是，如果在与升级结合的情况下，还可以有其他区分。比如，两个互相冲突的建议序列的效果：

$$\#p;\#\neg p$$

不是不一致的，但它仍然有些奇怪的方面。一般说来，这样的序列会导致模型中的关系不是连通的，因为它删除了居于 p-世界和 $\neg p$-世界之间的所有两边的箭头。考察哪些升级序列是一贯的是件有趣的事，因为在那里，偏好关系的连通性被保留了下来。

现实中，人们经常采用建议发布者之间的权威尺度来解决冲突。这在某种意义上像是信息更新的事实。人们经常从不同的来源获得矛盾信息；我们需要“可靠性”概念用来区分那些信息，从而实现某些有意义的整体更新。这两个问题都

超出了本文的范围，因为不管是更新还是升级，上述问题都涉及现实信息更新事件和它们到理想模型变化（由动态认知逻辑提供）的转变之间的隔阂。

9.5 关系变化和乘积升级

9.5.1 归约公理反映可定义的运算

对于逻辑学家，标准的认知更新$!\phi$从本质上是把模型$\mathfrak{M}$相对化为可定义的子模型$\mathfrak{M}_{!\phi}$。在定义两边的模型赋值关系可表示为下列标准形式：

命题 7 断定ϕ在相对化的模型中成立，当且仅当它的句法相对化版本在旧模型中为真：

$$\mathfrak{M}_{!\phi} \models \psi \text{ 当且仅当 } \mathfrak{M} \models (\psi)^{\phi}$$

在上述意义下，关于公开宣告的归约公理不过是表达模态断定〈$!\phi$〉（上面提及的左手边）的归纳事实，进而把它的右边变成相对化的指令，得到（ψ）$^{\phi}$。

类似的想法也可以应用到偏好升级$\#\phi$。不过，模型上的相关语义算子需要在基础关系上重新定义。对新的链接-剪切更新算子$\phi!$也同样成立。［van Benthem. 2006］指出：当个体保持固定时，相对化和重新定义可以弥补各逻辑理论之间经典的相对解释概念的缺陷——乘积更新涉及更复杂的还原过程：由旧的个体形成以三元组形式出现的新个体。在此意义下，*DEUL* 的归约公理可以反映某个简单的归纳定义，或许也可称为公式的语法重新解释。这一算子并不改变任何逻辑算子，不过根据定义，它改变重新定义后的关系符号的出现形式。当然它们的差别是细微的。有关偏好的关系符号通过模态词，只是隐含地出现在我们的模态语言中。这也是前面提到的核心归约公理能够反映下列抽象递归形式的原因所在：

$$\langle R := def(R) \rangle \langle R \rangle \phi \leftrightarrow \langle def(R) \rangle \langle R := def(R) \rangle \phi$$

9.5.2 关系改变者的动态逻辑

我们可以进一步定义关系变化的过程，从而使它们在相应的动态逻辑有意义。前文已经提及了这样的情况

$$R := R \cup (?\neg \phi; \top; ?\phi)$$

能够再次立即得到归约公理，因为从命题动态逻辑易得下列有效式：

$$\langle R \cup (?\neg \phi; \top; ?\phi) \rangle \psi \leftrightarrow \langle R \rangle \psi \vee \langle ?\neg \phi; \top; ?\phi \rangle \psi$$

$$\leftrightarrow \langle R \rangle \psi \vee (\neg \phi \wedge E(\phi \wedge \psi))$$

此例实际还表明了一个更一般的结果，非正式地把它陈述如下：

命题8 在*PDL*中可定义的不含迭代的每一关系变化过程都有一个完全的归约公理集（在动态认知逻辑的范围内）。

证明：显然，以上述形式出现的新关系$R^{\#}$的每一定义都是等价于下列有穷组合的有穷并：

(a) 原子关系R_i,(b) 基础语言中公式的测试关系$?\phi$。在*PDL*中有关并、组合和测试的经典*PDL*公理然后可以重新把陈述$\langle R^{\#}\rangle\phi$表述为复合式(采用基本模态方式$\langle R_i\rangle\phi$)。

这样的*PDL*-风格分析方法甚至可以自动的导出归约公理：

例2 升级运算正是下面的关系-变化：

$$R := (?\neg\phi;R) \cup (R;?\phi)$$

所以，核心的归约公理可以按下述方式导出：

$\langle\#\phi\rangle\langle R\rangle\psi$

$\leftrightarrow\langle((?\neg\phi;R)\cup(R;?\phi))\rangle\langle\#\phi\rangle\psi$

$\leftrightarrow\langle ?\neg\phi;R\rangle\langle\#\phi\rangle\psi\vee\langle R;?\phi\rangle\langle\#\phi\rangle\psi$

$\leftrightarrow\langle\neg\phi\wedge\langle R\rangle\langle\#\phi\rangle\psi\vee\langle R\rangle(\phi\wedge\langle\#\phi\rangle\psi)$

而后者正是我们前面找到的手写版本。

不过我们还可以做得更好，可以做到像（关于信息更新）动态认知逻辑那样的概括性——请在本文的后面看简单表述。

9.5.3 乘积更新

关于消除型公开宣告的一般性概括是乘积更新（[Gerbrandy. 1999；Baltag, et al. 1998；van Ditmarsch, et al. 2007]）。下面是简单的回顾。

定义8 一个事件模型是一个三元组$\mathfrak{E}=(E,\sim_i,PRE)$使得$E$是事件的非空集，$\sim_i$是$E$上的二元认知关系，$PRE$是从$E$到所有认知命题集合的函数。

函数PRE背后的直观意义是它为行为提供事前条件：事件α在世界s中可以执行的必要条件是世界s满足事前条件$PRE(\alpha)$。

定义9 给定认知模型$\mathfrak{M}$和事件模型$\mathfrak{E}$，乘积更新模型$\mathfrak{M}\times\mathfrak{E}$定义如下：

-它的论域是$\{(s,\alpha)\mid s$是$\mathfrak{M}$中的世界，α是$\mathfrak{E}$的事件，$(\mathfrak{M},s)\models PRE(\alpha)\}$

-新的不确定关系满足$(s,\alpha)\sim_i(t,\beta)$当且仅当同时满足$s\sim_i t$和$\alpha\sim_i\beta$

-世界(s,α)满足命题原子p当且仅当s在$\mathfrak{M}$中已经满足它

评论　考虑在适当的位置保留所有旧世界的版本，以及前面提到的新宣告算子得到的模型 $\mathfrak{M}_{\phi!}$，我们需要再次切掉关系链接去“分离”出序对（s，α）；其中（$\mathfrak{M}$，s）不满足动作 α 的事前条件。

定义10　含有新动态模态〈$\mathfrak{E}$，α〉的语言指的是组合的认知动作，它们可以解释成：

$$\mathfrak{M},s\models\langle\mathfrak{E},\alpha\rangle\phi \quad \text{当且仅当} \quad \mathfrak{M}\times\mathfrak{E},(s,\alpha)\models\phi$$

这是迄今为止最强大的认知更新的演算。对于公开宣告，可以通过事后条件的所有形式的归约公理集来制定一个完全的和可判定的逻辑（参阅［Baltag, et al. 1998；van Benthem, et al. 1993；van Benthem, et al. 2005］）。

9.5.4　乘积升级

接下来在认知事件模型的和偏好关系的基础上，我们来表示主体对不同的事件有所偏好。这些偏好可能来自赢利或者其他利益，不过正如条件句逻辑中的模型，它们也可以是抽象的相对似乎合理性。

定义11　认知偏好模型上的乘积升级输出也是前面提到的认知模型 $\mathfrak{M}\times\mathfrak{E}$。不过这次保留所有的世界/行为对（$s$，$\alpha$）的原先表达；它们是没有实现的选项，主体仍然可以对它们后悔。接下来的任务是建立新的偏好，这里按 ϕ 前面提到的直接乘积规则给出新的偏好关系：

$$(s,t)\leq_i(u,v) \quad \text{当且仅当} \quad s\leq_i u \text{ 并且 } t\leq_i v。$$

这样的乘积升级至少覆盖前面提到的升级指令#p。不妨请看图9-5中的事件模型：

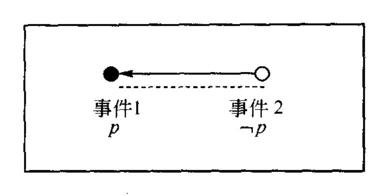


图9-5

这里主体不能认知地区分两个事件。需要注意的是偏好关系中的自返标记省略了。

命题9　$\mathfrak{M}_{\#\phi}\cong\mathfrak{M}\times\mathfrak{E}^{\#\phi}$，其中事件模型 $\mathfrak{E}^{\#\phi}$ 有两个事件：“确保 ϕ 发生”（事件1），“确保非-ϕ 发生”（事件2）；事件2≤事件1。

证明：从认知角度看，因为每个世界中只可发生一个事件，$\mathfrak{M}\times\mathfrak{E}^{\#\phi}$ 的可达

部分仅仅复制旧模型 $\mathfrak{M}$。既然所有事件对之间的可达关系成立，旧的认知可达关系在乘积规则的作用下仅仅得到了复制。至于新的偏好结构，请看 $\mathfrak{M}$ 中的任意对（s，t）（$\neg\phi$ 在 s 下成立）。于是乘积模型 $\mathfrak{M}\times\mathfrak{E}^{\#\phi}$ 含有唯一的对应序对

$$((s,\text{事件 }2),(t,\text{事件 }1))$$

上述的乘积升级规则给出了一个从左到右的偏好。$\mathfrak{M}$ 复制的唯一失败之处是出现旧偏好和事件偏好不匹配的情况。不过这种情况仅仅发生在#ϕ 否决已存在的链接的前提下，即当 $s\leq t$ 时，有 $\mathfrak{M}$，$s\models\phi$ 且 $\mathfrak{M}$，$t\models\neg\phi$。■

所以，有关公开宣告和认知乘积更新的简单事件模型足以说明更新或升级的基本方法。

更加概括地说，通过放入足够多的事件和事前条件，我们可以用前面提到的相同办法处理每一（把当前偏好关系转成 *PDL*-可定义的子关系）升级规则。当然还可以有更加复杂的事件模型，体现在更多的世界和主体更复杂的偏好关系。可以用它们表述更新和升级复合现象的更加精致的情形。

假设偏好的升级规则和认知可达关系的更新规则具有技术上的相似性，不难得到下列结果：

定理 3 乘积更新和升级的动态逻辑可以通过动态-认知-风格的归约公理完全地被公理化。

这里不打算弄清楚那些公理的形式，我们把它留作常规的练习。本文中第二个主要结论是：

偏好升级可以和迄今所知的最丰富的知识更新机制自然地结合

结合的优点

前面提到的机制本身是有独立的研究兴趣。从哲学的角度看，一个众所周知的事情是事件状态之间的偏好（跟“结果主义伦理学”相关）和动作之间的偏好（跟“唯意志主义伦理学”相关）的区别（参阅［Scheffler. 1997］）。而我们的更新系统可以为上述两类情况建模，能够研究它们的相互作用。此外还有一个计算的角落，即 *PDL* 本身的“动态道义”版本，它从世界之间的偏好出发，继续前进到行为之间的偏好（［Meyer. 1988; van der Meyden. 1996］）。［Pucella & Weissmann. 2004］后来接着有关建议的研究，提出把关系变化看做是“改变策略”的一种方式。［Rohde. 2005］为此提供了一个一般的背景知识，称之为“蓄意破坏的模态逻辑”。那里可以剪切模型中的任意链接。

所以，我们的乘积升级系统也可以看成是一个命题动态逻辑的“优先化的”版本。

9.6　例示：缺省和道义推理

我们已经为引入的触发动作（它们改变偏好）提供了一种升级机制。接下来我们将在两个具体的环境中演示这样的机制如何运作。这里的目标并不是为现有的系统提供某些完美十足的应用，而仅想表明本文的逻辑问题如何对应于具有独立兴趣点的真实问题。

9.6.1　缺省推理

请看下面实践推理中具有形式“如果 ϕ，那么 ψ”的缺省规则：

“如果我马上乘火车，那么今晚就到家”

按 ϕ 经典的理解，这些是可废止的条件句建议，在排除 $\phi\wedge\neg\psi$-世界的可能性下（这种情况被看做例外），从 ϕ 中可得出 ψ。不过直观地，我们的模型并不排除这样的例外，而是在沿用缺省规则的情况下“降级”了它们。[Veltman. 1996] 提出了有影响的动态处理办法，他把缺省看做是改变当前偏好序（世界之间）的指令。最简单的情况是，只有一个断定 ϕ，为某人所建议——用费尔曼的话来说，即是存在指令“正常情况下，ϕ 成立”。从我们的角度看，可以采用缺省的关系变化的情景来达到相同的效果，正如在9.3做的那样。假设我们想给引入的缺省规则“正常情况下，ϕ”“优先权”，即在执行此缺省后，所有最好的世界是真正的 ϕ-世界。这里还有一个更极端的程序，它能够使前述提到的直观思想生效。

定义12　设所有的 ϕ-世界好于所有 $\neg\phi$-世界；在 ϕ-和 $\neg\phi$-的范围内，保留旧偏好在适当位置①。形式地说，这就是较早提到的具有 *PDL*-风格的关系-变化中的一种：旧偏好关系 R 于是变成

$$(?\phi;R;?\phi)\cup(?\neg\phi;R;?\neg\phi)(?\neg\phi;\top;?\phi)$$

有意思的是，这正是本文较早研究的关于公开宣告 $\phi!$ 的链接剪切版本和9.4节中考察的含有关系扩张的升级运算的结合。

命题10　相关的缺省处理能够被完全地公理化。

证明：采用9.5.2中的方法，根据给定的 *PDL*-形式，自然有核心归约公理，然后得出

① 信念修正研究领域通常把此看成是“词典编辑”的变化。[Nayak. 1994] 最先提出这样的想法。

$$\langle upgr(\phi)\rangle\langle pref\rangle\psi\leftrightarrow(\phi\wedge\langle pref\rangle(\phi\wedge\langle upgr(\phi)\rangle\psi)\vee(\neg\phi\wedge\langle pref\rangle(\neg\phi\wedge\langle upgr(\phi)\rangle\psi))\vee(\neg\phi\wedge E(\phi\wedge\langle upgr(\phi)\rangle\psi))$$ ■

于是在升级背景下，我们得到了关于缺省逻辑的一个合理的版本。此外，在系统化的方案中，它们的有效性可以通过归约公理被公理化，这就不像文献中提到的特设性的缺省逻辑。

不过事情还没有解决。例如，关系-变化版本特别强调最后一个建议的作用，实际上给了它类似命令的力量。看起来这在许多情况下显得太强了，因为它使得其他任何事情都要依赖于最后听到的信息。一个更加合理的处理方式是：如给定一个涉及偏好变化的指令排序，它们并不一定是同样迫切的。我们需要最终找出自己承担的所有义务。不过，整合这些指令的方法部分取决于我们所选的策略，部分取决于情境中的另一个参数，即指令施发者的相对影响力或威信。类似情形同样发生的一个具体场景是优选理论。排列有序的约束条件决定了威信的次序，然后我们计算违反约束条件的次数。参阅［Prince & Smolensky. 1993］关于好的介绍，以及［de Jongh & Liu 2006］对这些问题的逻辑研究。

从缺省逻辑到信念修正

既然新的事实可能改变前期的结论，缺省逻辑跟信念修正有自然的联系。更一般地，如果采用基于相对似乎合理性的世界排序（参阅［Grove. 1988; Rott. 2006］），偏好变化的分析看起来非常适合用来分析信念修正。其实本文的姐妹篇［van Benthem & Liu. 2005］表明，本文发展出来的用于处理关系变化的技术能够用于分析各种信念修正的现象，并且能完全地公理化它们的性质。

9.6.2 道义逻辑和命令

类似地我们可以考虑上述方法在道义逻辑中的应用［Åqvist. 1987］。在最初阶段，它是研究有关“义务”的断定：

$$O\phi:\text{“应当 }\phi\text{”}$$

正如条件句型的义务陈述 $O(\phi\mid\psi)$ 那样，即来自于某个道德权威机构，所有真的 O-陈述的总和表示在当下阶段主体具有的所有义务。

在道义逻辑的经典语义里，$O\phi$ 被看做是某个道义可达关系上的普遍模态词。不过它的直观意义通常理解成，ϕ 应当在那些所有最好的可能世界（从当前的世界看）中为真。这里再次提出了世界上的偏好序。于是我们可以再一次应用升级情景去动态地思考上述问题。

不妨这样来考察变化过程：起初世界之间没有任何偏好。然后某个道德权威机构开始“道德说教”，这意味着他们在世界之间引入了评价性区分。如果这一

过程进展顺利，我们可以得到关于世界的一种新的序；由此我们当下的义务可能被重新计算，正如那些在所有最好世界中真的断定那样。在上述方式下，一个命令序列是否有意义可能不仅仅取决于一致性，而9.3提到的“一贯性”问题现在看起来更有意义。

升级中的向后看、或向前看

道义逻辑也提出新的问题。其中一个语义的直观解释是，经过某个命令（如，“你不应该杀人”），其核心命题将变为在所有最好的可能世界中为真。所以在命令中有将来-导向的方面：

“确保 ϕ 成立”应该导致一个新的情形使得 $O\phi$ 在其中为真

然而正如9.4看到的那样，并不是每一个升级 $\#\phi$ 都有这样的作用：使得 ϕ 变得在那些新的最偏好的世界中为真。实际上规范形式“确保 ϕ 成立”的实施有些困难。动态认知逻辑处理事件时主要关心它们的事前条件。所以主体从事件中得到的信息是过去-导向的，它们用来描述事件发生时的情况。但即使是简单的认知事件都可以改变在世界上的断定的真值——如公开宣告把无知状态变成某个知识状态。

不过我们并不容易定义诸如“获取某个命题的真”这样的动作。它们可以用来表述一些动作（如开门）的简单实际效果（[van Benthem, et al. 2006]），但现在还不清楚在比较复杂的情况下它究竟应该表示什么，比如并没有明显的例子表明“确保……成立”的知识和无知的任意混合在群体中出现，对于复杂的道义命令也一样。另外，道义推理是否需要将来-导向的更新和升级看起来也是一个有趣的问题。关于此类 *STIT* 算子的时态逻辑，请参阅［Belnap, et al. 2001］。

9.7　相关工作

本文中的想法可以追溯一段很长的历史，实际上文献中有许多“动态化”办法处理偏好、缺省和义务的建议。我们只在文中提及了一些相关的方法，并没有作出任何详细的比较。［Meyer. 1988］可能是第一个从动态的观点来看待道义逻辑，其结果是道义逻辑可以归约为动态逻辑的适当版本。已经有一系列常规的道义（DEON）逻辑学术会议，这样的联系在计算机科学中变得更为突出。与之相一致的另一种处理办法可以追溯到［Spohn. 1988；Veltman. 1996］为缺省规则提供了更新语义，把它们的意义定位于那些能修改预期模式的方法中。这是条件句和其他自然语言中采用的“更新语义”的一般方式中的一部分。［van der Torre & Tan. 1999］采用更新语义学的思想形式化了有关义务的道义推理，不过其中的

动机来自于计算机科学。从他们的角度，规范句子的意义在于这些句子给适用于主体的“理想关系”所带来的变化中。[van der Meyden. 1996] 进一步结合道义逻辑和动态逻辑，区分了两种许可概念，其中之一“自由选择许可”需要新的“许可的动态逻辑”，那里偏好可以在行为之间保持。相对于上述丰富的语义的不同系统的完全性定理已经被提出。把信念变化作为出发点，[Hansson. 1995] 界定了偏好变化的四种类型，即修正、收缩、加和减，同时表明它们满足偏好理性变化的合理性公设。为了处理如何通过增加或消除转换的办法树立主体的策略，[Pucella & Weissmann. 2004] 提供了有关许可的动态逻辑的动态版本。[Demri. 2005] 简化了范德梅登（van der Meyden）的命题动态逻辑的一个扩张，得到了 EXPTIME（指数时间）的决策程序，同时表明动态逻辑可以如何处理主体的策略。从范本特姆的“蓄意破坏的博弈”出发，[Rohde. 2005] 研究了含有能描述删除任意转换效果的算子的广义模态逻辑，那里并未涉及类似我们文中分析的固定的升级定义。此类逻辑的模型检测是 PSPACE-完全的，可满足性是不可判定的。[Pacuit & Parikh. 2006] 指出，主体的义务经常依赖于她所知道的内容；由此引入了类似我们认知偏好语言的相关语言，不过是在时间树模型的模式下。他们还区分了诸如“知道某人的义务”和“有义务知道”这样的情形，后者的动态系统跟我们的系统有一定的交融。我们自己的方法可追溯至 [van Benthem, et al. 1993]，那里讨论了升级偏好关系的一般形式。[Zarmic. 2003] 采用类似的想法，结合某个简单的更新逻辑，形式化了具有 $FIAT\phi$ 形式的自然语言祈使句。这样的方法还可用于描述给定计划问题的解决方案搜索等。更一般的，[Yamada. 2006] 为命令和义务的逻辑提供了更新范式，试图建模各种命令行为引起的变化。它用更新和命令的动态语言，整合了道义逻辑的多主体语言的变种。这是跟我们所做的最接近的工作。雅玛达（Yamada）的命题命令算子 A 可以在我们的系统中被确切地表示成 R 的升级发送至 $R;?\ A$。但是本文还给出了关于可能升级指令的更一般的处理办法。最后，[Rott. 2006] 为信念修正提供了能够处理所有当下主要策略的关系变化模式。[van Benthem. 2007] 则采用本文 9.5.2 的方法，给出了完全公理化此类策略的机制。

至于对上述所有方法进行全面周到的比较研究则超出了本文的研究范围。

9.8 结　论

偏好升级似乎是逻辑动态变化中的一个自然的并且至关重要的部分。本文已表明它能够在经典的动态逻辑格式下被建模成关系变化；相对于表达力最好的那些现行系统，认知乘积更新可能是一种合适的选择。

不过我们的方法还不能解决某些问题。具体来说，许多情况如在社会选择理论的定量研究中声称的关于偏好强度的更加细微区分就是其中之一。读者也可在线参阅本文的早期版本［van Benthem & Liu. 2005］，那里定义了由［Spohn. 1988；Aucher. 2003；Liu. 2004］提出的效用更新机制；它可以整合旧世界和事件的效用，从而确定新世界的效用。采用此类系统，我们可以通过增加或消去模型中的“点”，从而能够以一种更加易控制的局部方式升级缺省、义务或者博弈中的偏好。关系升级和效用更新之间的关系还引出了一些有趣的技术问题，有兴趣的读者可以参阅［van Benthem & Liu. 2005］，而在［Liu. 2006A］还有更广泛的研究。

致谢

作者感谢范迪特玛施（Hans van Ditmarsch）和赫尔齐格（Andreas Herzig），他们为本工作在爱丁堡举行的 ESSLLI 2005 暑期学院上提供了陈述的机会，那里的观众提供宝贵的反馈意见。特别感谢范迪特玛施，安德烈斯（Ulle Endriss），哈仁斯坦（Paul Harrenstein），以及两名匿名评委为本文提出的有益评论。

参考文献

Åqvist L. 1987. *Introduction to Deontic Logic and the Theory of Normative Systems.* Napoli：Bibliopolis.

Aucher G. 2003. A combined system for update logic and belief revision. Master's thesis. ILLC, University of Amsterdam.

Baltag A, Moss L, Solecki S. 1998. The logic of common knowledge, public announcements, and private suspicions. // Gilboa I, ed, *Proceedings of the 7th Conference on Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge* (TARK 98)：43 ~56.

Belnap N, Perloff M, Xu M. 2001. *Facing the Future.* Oxford：Oxford University Press.

Blackburn P, de Rijke M, Venema Y. 2001. *Modal Logic.* Cambridge：Cambridge University Press.

Boutilier C. 1994. Conditional logics of normality：a modal approach. *Artificial Intelligence*, 68：87 ~154.

de Jongh D, Liu F. 2006. Optimality, belief and preference. Tech Report, PP-2006-38. ILLC, University of Amsterdam. // Artemov S, Parikh R, eds. *Proceedings of the Workshop on Rationality and Knowledge*, ESSLLI, Malaga. To appear in Hansson S O, Grüne-Yanoff G, eds. 2008. *Preference Change：Approaches from Philosophy, Economics, and Psychology*, Springer, Theory and Decision Library.

Demri S. 2005. A reduction from DLP to PDL. *Journal of Logic and Computation*, 15：767 ~785.

Fagin R, Halpern J, Moses Y, Vardi M. 1995. *Reasoning about Knowledge*, Cambridge (Mass.): The MIT Press.

Gerbrandy J. 1999. *Bisimulations on Planet Kripke*. PhD thesis. ILLC, University of Amsterdam.

Grove A. 1988. Two modelings for theory change. *Journal of Philosophical Logic*, 17: 157 ~ 170.

Halpern J. 1997. Defining relative likelihood in partially-ordered preferential structures. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 7: 1 ~ 24.

Hansson S O. 1990. Preference-based deontic logic. *Journal of Philosophical Logic*, 19: 75 ~ 93.

Hansson S O. 1995. Changes in preference. *Theory and Decision*, 38: 1 ~ 28.

Hansson S O. 2001. *The Structure of Values and Norms*, Cambridge University Press.

Harel D, Kozen D, Tiuryn J. 2000. *Dynamic Logic*. Cambridge (Mass.): The MIT Press.

Harrenstein P. 2004. *Logic in Conflict. Logical Explorations in Strategic Equilibrium*. PhD thesis. Philosophical Institute, Utrecht University.

Liu F. 2004. Dynamic variations: update and revision for diverse agents. Master's thesis. ILLC, University of Amsterdam.

Liu F. 2006A. Preference change and information processing. Tech Report, PP-2006-41. ILLC, University of Amsterdam. // *Proceedings of the 7th Conference on Logic and the Foundations of Game and Decision Theory* (LOFT 06), Liverpool.

Liu F. 2006B. Preference changes in games. Working paper. ILLC, University of Amsterdam.

Meyer J-J. 1988. A different approach to deontic logic: deontic logic viewed as a variant of dynamic logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 29: 109 ~ 136.

Nayak A. 1994. Iterated belief change based on epistemic entrenchment. *Erkentnis*, 41: 353 ~ 390.

Pacuit E, Parikh R, Cogan E. 2006. The logic of knowledge based on obligation. // *Knowledge, Rationality and Action* (Synthese), 149: 311 ~ 341.

Prince A, Smolensky P. 1993. *Optimality Theory: Constraint Interaction in Generative Grammar*. Malden (Mass.): Blackwell.

Pucella R, Weissmann V. 2004. Reasoning about dynamic policies. // *Proceedings FoSSaCS-7*. Springer Lecture Notes in Computer Science 2987: 453 ~ 467.

Rohde P. 2005. *On Games and Logics over Dynamically Changing Structures*. PhD thesis. Department of Informatics, Technische Hochschule Aachen (RWTH).

Rott H. 2006. Shifting priorities: simple representations for 27 iterated theory change operators. // Lagerlund H, Lindström S, Sliwinski R, eds. *Modality Matters: Twenty-Five Essays in Honour of Krister Segerberg*. Uppsala Philosophical Studies 53: 359 ~ 384.

Scheffler S. 1997. Relationships and responsibilities. *Philosophy and Public Affairs*, 26: 189 ~ 209.

Snyder J. 2004. Product update for agents with bounded memory. Manuscript. Department of Philosophy, Stanford University.

Spohn W. 1988. Ordinal conditional functions: a dynamic theory of epistemic states. // Harper W L, et al., eds. *Causation in Decision, Belief Change and Statistics II*, Dordrecht: Kluwer: 105-134.

van Benthem J. 1996. *Exploring Logical Dynamics.* Stanford: CSLI Publication.

van Benthem J. 2007. Dynamic logic for belief revision. Tech Report, PP-2006-11. ILLC, University of Amsterdam. Final version, *Journal of Applied Non-Classical Logic*, 17: 129 ~ 156.

van Benthem J, van Eijck J, Frolova A. 1993. Changing preferences. Tech Report, CS-93-10. Center for Mathematics and Computer Science, Amsterdam.

van Benthem J, van Eijck J, Kooi B. 2005. Common knowledge in update logics. *//Proceedings TARK*: 253 ~ 261. Final version, 2006. Logics of communication and change. *Information and Computation.* 204: 1620 ~ 1662.

van Benthem J, Girard P, Roy O. 2006. Logics for preference ceteris paribus. Manuscript. Department of Philosophy, Stanford University and ILLC, University of Amsterdam. To appear in *Journal of Philosophical Logic.*

van Benthem J, Liu F. 2004. Diversity of logical agents in games. *Philosophia Scientiae*, 8: 163 ~ 178.

van Benthem J, Liu F. 2005. Dynamic logic of preference upgrade. Tech Report, PP-2005-29, ILLC, University of Amsterdam. Final version, 2007. *Journal of Applied Non-Classical Logic*, 17: 157 ~ 182.

van Benthem J, van Otterloo, Roy O. 2006. Preference logic, conditionals and solution concepts in games. // Lagerlund H, Lindström S, Sliwinski R, eds. *Modality Matters: Twenty-Five Essays in Honour of Krister Segerberg.* Uppsala Philosophical Studies 53: 61 ~ 77.

van der Meyden R. 1996. The dynamic logic of permission. *Journal of Logic and Computation*, 6: 465 ~ 479.

van der Torre L, Tan Y. 1999. An update semantics for deontic reasoning. // McNamara P, Prakken H, eds. *Norms, Logics and Information Systems.* IOS Press: 73-90.

van Ditmarsch H, van der Hoek W, Kooi B. 2007. *Dynamic Epistemic Logic.* Berlin: Springer.

Veltman F. 1996. Defaults in update semantics. *Journal of Philosophical Logic*, 25: 221 ~ 261.

von Wright G H. 1963. *The Logic of Preference.* Edinburgh: University of Edinburgh Press.

Yamada T. 2006. Commands and changing obligations. *//Proceedings of the Seventh International Workshop on Computational Logic in Multi-Agent Systems* (CLIMA VII).

Zarnic B. 2003. Imperative change and obligation to do. // Segerberg K, Sliwinski R, eds. *Logic, Law, Morality: Thirteen Essays in Practical Philosophy in Honour of Lennart Åqvist.* Uppsala Philosophical Studies, 51: 79 ~ 95.

第4部分

模态逻辑和博弈

上面所有的主题都发生作用的一个特定领域是最新的逻辑和博弈论之间的会合，由 TARK 会议（关于知识和理性的推理）倡导，从 20 世纪 80 年代早期开始一直运行到现在。这一领域现在处于一个创造性的混沌状态：参见 ILLC 的网页 http://www.illc.uva.nl/lgc/ 和 http://www.illc.uva.nl/GLoRiClass/ 或 http://www.illc.uva.nl/lgc/ 中关于“社会软件”的一般网页。实际上，新的观念和新的逻辑系统不断出现，通常与信息领域的想法绑在一起。逻辑与博弈有着十分密切的关系，许多基本的逻辑任务可以很自然地看做是互动的博弈：论辩和检验模型之间的不变性就是两个重要的例子。但是，逻辑可以作为分析任何类型的一般博弈的工具。特别地，它能够提供关于信息和深思熟虑的微细-结构，以辅助基于全局的均衡概念的博弈论。

本部分的第一篇论文“动态认知逻辑中的博弈”是 2000 年在托里诺举行的“关于逻辑及博弈论和决策论基础”（LOFT）的会议上的邀请报告。这篇文章利用前一部分中的动态认知逻辑考察了具有不完美信息的博弈，然后表明如何使用这一逻辑系统分析策略型博弈和扩展型博弈，记录随着时间的流逝玩家移动的细节。但是，本文中提出了很多新的研究主题，被后来的研究者们继续探讨和发展。我提到在哲学和计算机科学中如何处理程序上的“知道如何”，以及如何逻辑地分析博弈论中不完美信息博弈之间的“托马斯变形”。特别地，论文提出了把博弈分析为在认知时态逻辑中的重复的更新过程，这一问题在论文［van Benthem, Liu. 2004；van Benthem, Gerbrandy & Pacuit 2007］中得到进一步发展。

对作为互动进程的博弈而言什么是自然的“层次”、什么是匹配的模态认知偏好逻辑可以表达博弈的主要特征，这些问题在“作为进程模型的扩展博弈”得到了深入的探讨。这篇论文发表在 2002 年《逻辑、语言和信息杂志》的关于逻辑和博弈论的专辑上。论文把博弈看做是计算进程，区分了几个结构细节的自然层次。文章特别考察了其中的两个层次，模态逻辑不仅为扩展型博弈记录玩家所有的移动和选择，而且在更全局的层面上它可以描述玩家的策略“效力”如何影响博弈的结果。文章也明确讨论了关于策略的语言——在我看来，策略是博弈论无言的英雄——表明如何使用动态逻辑定义策略和更一般的计划，如何使用它们的不动点扩展进一步定义博弈论的均衡概念。

但是，还有很多问题正在逐渐显现。与信息学中的现代进程理论一致，2003 年的论文“逻辑博弈对博弈逻辑是完全的”，发表在《逻辑研究》（*Studia Logica*）的博弈专辑中，采取了一个辅助上面模态方法的新方法。它研究了从旧的博弈构造新博弈的一些算子，指出这如何定义一个序列博弈构造的可判定的博弈代

数。我们证明了表现定理，说明一般的“博弈代数”恰好是那些为辛梯卡一阶逻辑的赋值博弈所证实的有效式。我们也简要讨论了并行算子，博弈同时并行展开，二者之间可能交流或也可能没有任何交流。但是，这种情况看起来很难，需要与阿布拉姆斯基（Abramsky）的线形逻辑的“博弈语义”相结合。

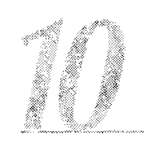
最后，我把动态转向带到博弈论中来，分析现存的作为认知进程本身的博弈的求解方案的程序。特别是，这一程序可以看作是一个重复宣告适当的关于“理性”断言的过程。对我而言，这为博弈论的求解概念提供了一种动态的解释，与现存的大家熟知的静态认知理由相对。“博弈中的理性动态和认知逻辑”是在 2003 年在锡耶纳举行的“博弈和社会选择的逻辑”的邀请报告，它提出了策略型博弈怎样成为认知偏好逻辑的模型，而重复消除严格受控的策略或理性化成为对动态认知逻辑中重复宣布“内部会话”的模态不动点的解决方案。而且，我证明了在扩展型博弈中的逆向归纳的求解方案程序产生于认知时态偏好逻辑的重复宣告中。这开辟了介于可能的博弈论解决方案概念与模态逻辑之间的更为系统的对应。特别是，关于宣布改变给定博弈的想法有更多的问题值得探讨。我的 2006 年的论文“博弈中的理性化和承诺”（载中文的 2006《逻辑增刊》）提出了一些新的情景，其中包含理性化和承诺。

我希望这些论文能够体现我在逻辑和博弈分析层面上的“行为主义”。二者汇合的成功不在于一个领域可以解决另一个领域中存在的问题，而在于它们的汇合产生了新的共同后代。如果读者要阅读这方面的更多内容，可以参考即将出版的汉德瑞克斯（Hendricks）2007 年的新书《博弈论：五个问题》（*Game Theory: Five Questions*, Automated Press.）。那里有我的一个访谈，我以一种非职业的方式对上面的很多问题做了说明。

参 考 文 献

van Benthem J, Liu F. 2004. Diversity of agents in games, *Philosophia Scientia*, 8: 163 ~ 178.

van Benthem J, Gerbrandy J, Pacuit E. 2007. Merging frameworks for interaction: DEL and ETL. Tech Report, ILLC, University of Amsterdam. Also in *Proceedings TARK* 2007, Namur 2007, 72 ~ 81



动态认知逻辑中的博弈*

刘奋荣/译　郭美云　张木春/校

10.1　博弈是逻辑语言的一种结构：初次概览

10.1.1　关于行动的模态逻辑

在典型的博弈论教材中出现的图形对逻辑学家有直接的吸引力。特别是，扩展型博弈树描述了一个多主体的进程，其中，节点表示进程的可能阶段，标明了玩家可能实施的行为，而且，有时也可能表示这些阶段的相关属性。这很像模态逻辑语言或其他逻辑语言的进程图（"克里普克模型"），这些语言常常被逻辑学家和计算机科学家们用来描述行为结构。例如，给定一个博弈树，有两个玩家 A 和 E，四种可能的行动 c，d，a，b，和一个性质 p，p 在四个结果状态中的两个状态中为真（见图 10-1）。下面是一个典型的模态断定，它在博弈树的根部为真：

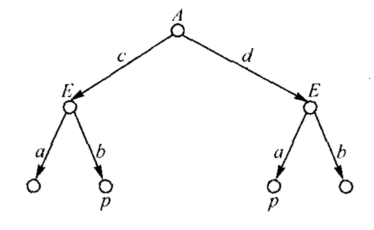


图 10-1

$[c\cup d]\langle a\cup b\rangle p$　［执行 c 和 d 中任意一个行动都会导致一个状态，在那里可以执行 a 或 b，达到结果状态，p 在结果状态中成立］

* Games in Dynamic-Epistemic Logic. *Bulletin of Economic Research*, 2000, 53: 219 ~ 248.

这个模态公式说的是，在给定的进程图中玩家 E 有一个策略可以确保博弈的结果满足 p。例如，p 可以是性质"E 赢得博弈"。这样，上面的公式表示"E 有一个总赢的策略"。比这种"单一回应"更为复杂的策略可以用更长的模态算子□〈〉的序列来表示。这种反映策略的特点是使得逻辑学家和计算机科学家们对扩展型博弈产生极大兴趣的原因之一：我们要模拟随着时间的流逝智能主体及他们复杂的相互作用之间的进程。

上面的关于博弈树的解释也许不完全是博弈论者心目中想要的解释。本文旨在进一步发掘这一逻辑视角，希望找到二者之间更多的区别来为我们提供新的洞见，但是同时，我们也希望能够发现二者之间足够的雷同之处，从而可以促进它们之间的有意义的交流。

10.1.2 不完美信息：引进认知逻辑

模态逻辑的思考方法仅仅是第一步，因为它只考虑纯粹的博弈形式。真正博弈的其他特征需要有更丰富的逻辑语言来表达。本文主要关注的问题是不完美信息，它指的是玩家可能会不知道他们处在博弈过程中的哪个位置。要模拟这一情况，博弈论者常常画"虚线"，或用"信息集"来表示。再想想上面提到的例子，假设玩家 E 不能确定 A 最初采取了哪个行动（例如，也许 A 把他的行动计划装在一个信封里了）。对逻辑学家而言，这是一个典型的模态-认知语言的模型（见图 10-2）。

早先的模态公式$[c\cup d]\langle a\cup b\rangle p$ 在根部仍然是真的，因为行动模式还是一样的。但是，现在我们可以对玩家"在途中"的冒险活动进行更为细致的分析。像通常所做的那样，我们用虚线表示知道算子的可及关系。在任一状态 s，玩家恰好知道那些在 s 所属的信息集中为真的命题。这种认知联系从 20 世纪 70 年代以来为博弈论者所熟知。例如，在 A 玩 c 之后，到达结果的"黑色"状态，E"知道"玩 a 或 b 会得到 p，因为析取式〈a〉$p\vee$〈b〉p 在两个"中间状态"上都是真的。可以用下面的认知公式来表示这一情况：

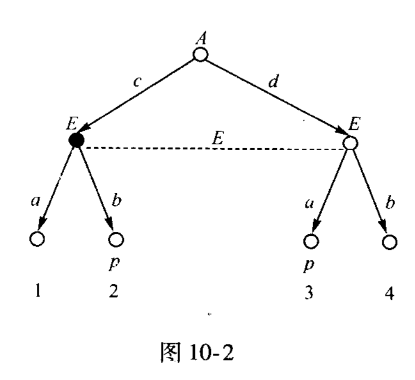


图 10-2

$$K_E(\langle a\rangle p\vee\langle b\rangle p)$$

另一方面，E 不知道哪个具体策略可以确保得到结果 p-这说明，在黑色节点位置，下面的公式是真的：

$$\neg K_E\langle a\rangle p \text{ 和 } \neg K_E\langle b\rangle p$$

要更好地理解上面的公式，试想下面的悲剧情境：某人知道与他般配的配偶肯定在这个城市里，但是，对他碰到的某个具体个体而言，他不知道她是否是他的配偶。

对于可以表达主体行动和知识的语言来说，这种细微的区别是很常见的。它们也出现在其他的领域（例如人工智能领域关于“计划”的研究），所以，上面提到的我们解读图形的想法一点都不稀奇。这使得一般的进程扩展为更复杂的可计算性系统，像如今的互联网，原则上一组主体在进程的每个阶段都有可执行的行动．但是，他们不得不在不确定性的条件下实施操作。

10.1.3　偏好

实际的博弈具有更复杂的基本结构，特别是，玩家对不同的可能结果会有自己的偏好。这就要求有在另一个层次上的逻辑形式化，譬如通过偏好关系来解释“偏好模态词”。但是本文不会讨论这一赋值结构，尽管它与我们下面将要讨论的问题并不抵触。

10.1.4　博弈等价：行动等价或结果等价？

在博弈的逻辑视角中关键的问题是什么？本文将集中讨论两个基本主题。首先，我们需要选取一个具有一定表达力的语言来描述博弈的内部结构，或这类问题的模型的任何类。这只是硬币的一个面。硬币的另一面则是要选择一个概念，描述博弈的不同表示之间的结构等价。例如，比较图 10-3 中的两个博弈。直观上看，从可能行动的扩展型结构上说，它们是不同的。例如，在左边的博弈中，存在一个状态，在那里 E 可以选择要得到结果 2 或 3。但是，右边的图则不存在这样的状态。因此，在可能的行为层次上，这两个博弈直观上是不同的。

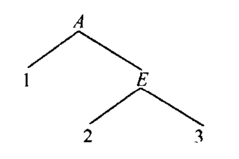
但是，如果我们只看可能的结果，上面的结论就不再成立了。左边的博弈玩家 A 有两个策略“向左”和“向右”，这保证博弈的结果分别在两个集合 $\{1\}$ 和 $\{2, 3\}$ 中。同样，E 也有两个策略，保证结果会分别在两个集合 $\{1, 2\}$ 和 $\{1, 3\}$ 中。这些集合可以看做是玩家拥有的“效力”，它可以迫使博弈的某些结果出现。一个集合包括的元素多说明玩家没有足够强的效力迫使唯一的结果产生，而只能提供某个“上限范围”：

$$A \text{ 的效力：} \{1\},\ \{2, 3\}$$
$$E \text{ 的效力：} \{1, 2\},\ \{1, 3\}$$

当我们在右边的博弈中只关注效力时，可以得到同样的结果！首先 E 有两个策

略，它们迫使得到结果 {1，2} 和 {1，3}。接着，A 有四个策略 LL，LR，RL，RR，它们分别产生 {1}，{1，3}，{2，1}，{2，3}。在四个结果之中，可以不考虑 {1，3}，{2，1}，因为它们表示的效力比 {1} 弱，从而是多余的。这样，A 拥有的效力是 {1} 和 {2，3}，跟左边的博弈一样。

因此，博弈等价依赖于我们对想要描述多少结构的选择：我们可以“仅仅考虑结果”，也可以考虑“所有的行动”。



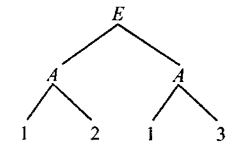


图 10-3

这是优点，而不是缺点。计算机科学中的进程逻辑，或语言学中的对语法的研究都有类似的选择。例如，仅仅从输入-输出的结果看，进程可以看成是一个“黑匣子”。当然，我们可以表述它的内部选择和其他行动。在具体的应用中，“确定等价的层次”依赖于实际工作的目的。这也同样适用于对博弈的讨论。下面我们将在局部的“行为层次”上描述博弈，但是，我们有时也会在全局的“结果层次”上讨论问题。

博弈等价的问题对于不完美信息同样有意义。借助“行动”，我们能够对两个博弈之间物理的博弈策略和认知的“不确定性步骤”进行比较，寻找二者之间的相似点。就“结果”而言，根据对玩家效力的比较，如果我们交换玩家的角色和一些结果，图 10-2 中的博弈和图 10-4 中的博弈是结果-等价的。

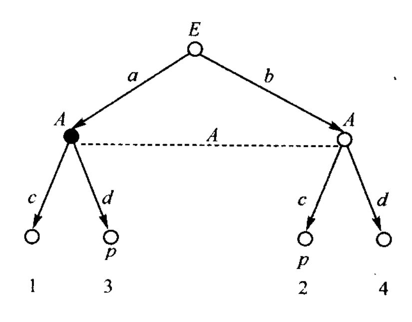


图 10-4

10.1.5　一般的逻辑和特设公理

下面我们讨论本文的第二个主题。一旦我们选定了一个特殊的语言，在任意的“细节层次”上，我们就可以得到一个普遍的有效公式集，即，它们在任意模型的任意状态上都是真的。对于模态和认知模型，极小的逻辑是大家所熟知的“**K**”和“**S5**”的多-模态形式。但是，在这种基本系统之上，我们可以为具体的模型类找到具体的逻辑满足其他的限制条件。例如，如果我们想要使玩家的策略是部分函数，那么模态逻辑需要包含下面的公理：

$$\langle a\rangle\phi \rightarrow [a]\phi$$

在不完美信息博弈的研究中，我们将会看到更多这样的特设公理，它们表示这种模态和认知算子的相互作用，
如下面的互换律：

$$K_i[a]\phi \rightarrow [a]K_i\phi$$

（参看10.3.3）。这样的公式实际上是对玩家的行动能力或博弈中固有的不确定性关系的具体假设。根据不同的假设，我们会得到不同的“逻辑”，可以刻画不同类型的不完美信息博弈中玩家行动的推理特征。

10.1.6　本文预览

在10.2我们将会为完美信息博弈引进一些基本的逻辑概念。这种博弈在行动和结果两个层次上都被看做是进程图。10.3中我会利用这些概念考察不完美信息博弈中的行动和知识的问题，不完美信息博弈则被看做是具有不确定性的多主体进程。这些结果会应用到10.4的对博弈分析当中。10.5则要分析结果等价的问题。10.6主要讨论未来的研究方向。

10.2　作为动态逻辑模型的扩展型博弈

我们分两步进行，先分析有穷的完美信息博弈。这一节简要介绍一些基本的逻辑概念，我们将会用到这些概念。

10.2.1　行动语言

完美信息博弈树是这样的模型：

$$\mathfrak{M} = (S, \{R_a \mid a \in A\}, V)$$

其中（a）S是状态的集合，（b）R_a是二元关系，表示对于行动/策略a的可能的转换关系，（c）V是对命题字母的赋值函数，这些命题字母表示状态的局部

属性。

在最一般的逻辑设计中，博弈将包含一些特定的词汇。特别是，命题原子公式 $turn_i$ 和 win_i 说的是 i 要移动或取胜，end 只在结束点上成立，而其他的原子公式则表明对玩家而言最后状态的值。这些模型是用动态模态语言表达的，其中包括原子的行动 a，b，……和下面的算子：

(a) 并 $\cup$　　选择

(b) 复合 ;　　序列执行

(c) 克里尼星号 *　　任意有穷的迭代

(d) $(\phi)?$　　测试 ϕ 是否成立

这样我们就能够进一步定义一个博弈中的转换关系，例如一个选择 $a\cup b$，或者，叠置的选择 $(a\cup b)^*$，后者使得我们能够从一个状态通过有穷的 a 和 b 行动序列到达任意的一个可及的状态。对于所有的行动 A（不管是基本的还是复合的），动态语言包括下面的模态公式：

$\langle A\rangle\phi$　　“在某一 A-后继者中，ϕ 成立”

$[A]\phi$　　“在所有的 A-后继者中，ϕ 成立”

在上面已经看到，我们可以用该语言表达单一回应策略，例如：

$$[c \cup d]\langle a \cup b\rangle p$$

但是我们可以利用形如 $[A]\langle B\rangle[C]\langle D\rangle\phi$ 等的陈述模式，定义更为复杂的有关行为和结果的断定。再看一个有关表达力的例子。考虑一个最简单的逆向归纳的应用：在有穷的双人零和博弈中，已经标明了玩家 i 是 win_i 或 $\neg win_i$，我们要说明在任意一个节点上哪个玩家有总赢的策略。我们可以从终节点出发，向上推理。令 A 是所有可行行动的集合。对总赢的位置的规则，可以用递归定义为：

$$WIN_i \leftrightarrow (end \ \& \ win_i) \vee (turn_i \& \langle A\rangle WIN_i) \vee (\neg \ turn_i \& [A] WIN_i)$$

这种语言也可以帮助我们明确地谈论策略。对玩家 i 而言，一个策略恰好是一个偏函数，即，一个从玩家 i 转向的节点到具体移动的偏函数。所以，像任意的基本行动一样，策略 σ 是一个原子变换的集合。那么，说 σ 是 i 的一个总赢策略意味着：

$$[A^*](turn_i \rightarrow \langle\sigma\rangle WIN_i)\text{[其中 } A^* \text{ 从博弈树的根部到任何节点]}$$

利用这两个策略符号，这一语言同样可以用来分析纳什均衡［de Bruin，2000］。动态逻辑是可判定的，不管是一般的博弈树还是有穷博弈树的特殊类；在这两种情况下，都存在完全的公理化系统，包括有效的公理集。详情参见［Blackurn，et al. 2001］。

10.2.2　互模拟

动态描述语言在结构上的对应物是下面的用来比较不同博弈的概念（见图 10-5）。

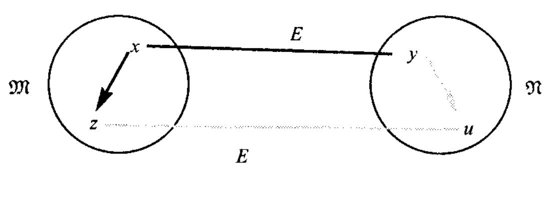


图 10-5

这一概念适用于博弈树，同样也适用于可能行为和状态的任意图形表示：

定义 1　一个*互模拟*是介于两个图 $\mathfrak{M}$，$\mathfrak{N}$ 中的状态之间的任意二元关系 E，使得如果 xEy，那么我们有（1）原子一致，加上（2）对所有行为 R 的 Z 字形条件：

（1）x，y 满足相同的命题字母；

（2a）如果 xRz，那么 $\mathfrak{N}$ 中存在一个 u，使得 yRu 且 zEu；

（2b）反之亦然。

互模拟在逻辑和计算机科学中是典型的进程的“行为-相似性”。它适用于模态和动态公式。当然也存在一些反例。例如，下面是表示这种联系的两个结果（参见［van Benthem. 1996；1999］）。

定理 1　给定任意的有穷图 $\mathfrak{M}$，$\mathfrak{N}$ 及其节点 s，t，下面的两个断定是等价的：

（a）$\mathfrak{M}$，s 和 $\mathfrak{N}$，t 满足相同的模态公式；

（b）$\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{N}$ 之间存在一个互模拟 E 使得 sEt。

这意味着这个语言和相似性关系是匹配的。下面的定理说的是，在这个描述层次上，这一语言可以为任意的图形提供完全的描述。

定理 2　对任意有穷的图 $\mathfrak{M}$ 和状态 s，存在一个动态的逻辑公式 $\delta(\mathfrak{M}, s)$ 使得下面的结果对所有的图 $\mathfrak{N}$，t 是等价的：

（a）$\mathfrak{M}$，$t \models \delta(\mathfrak{M}, s)$；

（b）$\mathfrak{N}$，t 与 $\mathfrak{M}$，s 是互模拟的。

对于这里讨论的关于博弈等价的所有概念，关于可定义性和表达力的类似结

果可以得到证明（[Barwise & Moss. 1997；van Benthem. 2000B]）。所以，博弈结构可以通过各种表示之间的语义等价来描述，或通过在合适的形式语言中的“博弈公式”来描述（参见[Bonanno. 1993]）。在本文的其他部分，我会主要讨论后一种描述手段。

10.2.3 结果和效力

现在转向对结果的讨论，我们首先进一步强化10.1.4。在扩展型博弈中，像前面一样，策略指的是从玩家所有的转向节点到在那个节点上可行行动的一个函数。迫使关系用来表示玩家能够确保得到什么样的结果：

$\rho^i_G sX$　　玩家 i 对实施博弈 G 有一个策略，使得他从节点 s 出发总能到达一个状态，那个状态总在结果集合 X 中

根据这一解释，显然，迫使关系在超集之下是封闭的：

（C1）如果 $\rho^i_G sY$，Y 且 Y' 包含 Y，那么 $\rho^i_G sY'$。

适用于这些关系的另一个显然属性是一致性：玩家不能够迫使博弈进入一个没有交集的结果集，或会得到一个矛盾：

（C2）如果 $\rho^1_G sY$ 且 $\rho^2_G sZ$，那么 Y 和 Z 重叠。

而且，所有有穷的双人博弈都是确定的：就任何总赢的协定而言，两个玩家中的一个肯定有总赢的策略。对目前的语言来说，这是一个完全性结果。令 S 是所有的结果状态的集合：

（C3）如果 $\rho^1_G sY$ 不成立，那么 $\rho^2_G sS\text{-}Y$；2 相对于 1 有同样的结果。

对于任意的有穷的完美信息博弈 G，它在根部节点 s 生成的效力满足（C1），（C2）和（C3）。反过来，这些条件也是应当满足的所有条件，见下面的关于表示的结果。

命题 1　对任意两个由 S 的子集构成的集合簇 F_1 和 F_2，如果它们满足条件（C1），（C2）和（C3），那么它们一定是某一双步博弈根部的效力集。

证明：由玩家 1 开始，假设她要在一些后继者中做选择，这里的后继关系对应 F_1 中的包含-极小集。在这些节点上，玩家 2 应当移动，可以选择那个集合中的任意元素。显然，玩家 1 拥有的效力，能够在 F_1 中明确表示。在这个博弈中，玩家 2 可以迫使任意的结果集，而这个结果集与 F_1 中的每个集合都重叠。但是，根据我们的约束条件，容易看出，这些正好是 F_2 中的集合。例如，如果某个结果集 A 与所有的这些集合重叠，那么补集 $S\text{-}A$ 一定不能在其中，从而，根据确定

性条件，A 已经在 F_2 中。■

这一结果为博弈提供了一个在结果-层次上的范式，这与通常的“策略形式”密切相关。这也是经典命题逻辑的“分配范式”。实际上，生成这种范式的布尔算子构成了一个博弈等价的逻辑演算（[van Benthem. 1999]）。图 10-3 就是一个典型实例：那里的博弈等价描述的正是下面的布尔分配律：

$$p\&(q \vee r) \leftrightarrow (p\&q) \vee (p\&r)$$

10.2.4　迫使语言和它的模仿

要在结果层次上描述博弈，我们可以引进另一种语言，它的关键算子是：

$\{G, i\}\phi$ 在节点 s 上是真的，如果玩家从 s 出发采用某个策略可以得到一个结果集，使得所有的结果都满足 ϕ。

这是博弈模态的“博弈-内在”形式，参见 [Parikh. 1985] 和 [Pauly. 2001]。介于不同博弈之间的相应的互模拟概念定义如下：

定义 2　在博弈 G 和 G' 之间的一个*效力互模拟*是一个介于 G 和 G' 的博弈状态之间的二元关系 E，它满足：

（1）如果 xEy，那么 x，y 满足相同的命题字母；

（2）如果 xEy 并且 $\rho^i_G x$，U，那么存在一个 V 使得 $\rho^i_{G'} x$，V，并且 $\forall v \in V \exists u \in U\ vEu$；反之亦然。

这个方法自然可以用来分析博弈的中间节点所具有的迫使集。

10.2.5　尾声：内在的语言对外在的语言

对博弈的逻辑描述，正像对进程的描述一样，可以在不同的层次上进行。本文采用的形式语言是*博弈-内在的*。它们可以定义在什么情况下一个陈述在博弈内部的不同阶段成立。但是，对博弈等价的研究也展示了一种*博弈-外在的*角度，利用合适的表达式讨论博弈之间的等价性。这就要求有外在的逻辑语言，它的表达式可以表示博弈，用自然的*博弈-构成算子*，例如“选择”、“角色转换”或“复合”构造更为复杂的博弈。在 10.2.3 中的分配律就是一个例子：表达式 $p\&(q \vee r)$ 表示具有某种形式的一种博弈，而不是对玩家行动的某种断定。外在的观点有其吸引力，特别是当我们在抽象的意义上描述博弈等价的时候。不过，内在和外在的角度还可以互相结合——但是，本文主要是采取前一立场。

10.3 不完美信息博弈和动态认知逻辑

在不完美信息博弈中，整个玩的过程玩家也许不能确切地知道他们到底在博弈树的哪个位置。原因也许多种多样。玩家可能有认知的缺陷，例如，他们自身的记忆力有限或对他人的移动只有有限的感知能力。但是，博弈本身也会生成一些无知状态，例如在纸牌或宴会博弈中常见的那样。不管是哪种原因，经典的逻辑方法立刻出现在脑海中。

10.3.1 认知语言

不完美信息博弈在博弈状态中添加了认知结构，$\sim_i$，即对 i 而言的二元的“不确定性关系”。结果得到一个模型，即“多主体-**S5**”的结构：

$$\mathfrak{M} = (S, \{R_a \mid a \in A\}, \{\sim_i \mid i \in I\}, V)$$

等价关系 $\sim_i$ 表示玩家 i 在博弈进行过程中到达某些节点的时候对那些节点不能加以区分。这拓展了博弈论者通常的“信息集”概念，那里信息集只是表示当玩家处于那些轮到她移动的节点时的信息约束条件。原则上说，在我们定义的模型 $\mathfrak{M}$ 中，不确定性关系可能随处出现。玩家可能不知道她的对手刚刚采取了什么样的行动，也可能甚至不知道自己刚刚实施的行动，他们可能也不知道是不是轮到他们移动，或甚至不知道博弈是否已经结束等。我们可以设想可能的情境，像在图 10-6 中展示的那样。

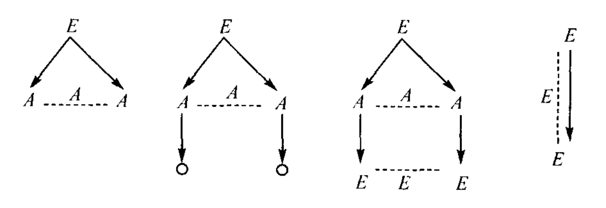


图 10-6

这样的图形并不是博弈所独有的。它们也出现在人工智能中关于计划的研究里，在那里主体在不知道真实状态的情况下也必须采取行动（[Moore. 1985]）。下面我将在很一般的意义上考虑这些博弈图。这样做的目的不是为了“改进”现存的已经十分丰富的关于不完美信息博弈的文献（如 [Osborne & Rubinstein. 1994]，[Bonanno. 1992]，[Battigalli & Bonanno. 1999]），也不是要在当下的辩论中采取某一立场。我只是希望能够提出一种系统的逻辑观点，或许会

为大家提供一种有意义的“第二见解”。

10.3.2　认知-动态逻辑

上面的较为丰富的模型自然可以解释较为丰富的认知-动态语言。这种语言为每个玩家添加了一个知道算子：

$$\mathfrak{M},s\models K_i\phi \quad \text{iff} \quad \mathfrak{M},t\models\phi \text{ 对所有的 } t \text{ 使得 } s\sim_i t$$

我们现在可以谈论当博弈进入一定状态时玩家知道什么，不知道什么。在第一节中，我们已经用下面的公式对此进行了说明：

$$K_E(\langle a\rangle p \vee \langle b\rangle p)$$

$$\neg K_E\langle a\rangle p \ \& \ \neg K_E\langle b\rangle p$$

这些公式描述的是玩家在图10-2的黑色节点时的认知状态。原则上玩家E有一个可以到达p的策略，但是这一策略在实际生活中没有多大用处。例如，建议“如果A采取c则你采取a，否则，采取b”依赖于E无法解决的一个区分。在不完美信息博弈中，玩家只考虑使用统一策略，即，在信息集的任何一个节点上她的下一个行动都是一样的。

例如，在图10-4中，E有两个统一的策略LL和RR，但是她不知道这些策略是否能够保证结果p出现（注意：博弈论者定义的不完美信息中的“策略”是我们这里所谓的统一策略——但是，这里的区分在逻辑上有意义，有点像关于“构造性的”和更一般的“非构造性的”证明之间的区别）。上面的例子表明，统一策略就是玩家知道它们会起作用的那些策略。我将在后面讨论这个问题，因为实际情况往往会比上面的例子更复杂。

认知语言的一个重要特征是逻辑算子的迭代。玩家可以知道自己和对手知道或不知道什么（利用形如$K_iK_j\phi$，$K_i\neg K_j\phi$的公式），这对于理解博弈进程是十分重要的。而且，玩家可以获得关于某些事实的共同知识，表述如下：

$C_{\{1,2\}}\phi$　ϕ在所有那些从目前的状态通过有穷的$\sim_1$，$\sim_2$步骤达到的状态上是真的

例如，在上面的博弈中，E所处的困境是玩家们的共同知识。

为了系统刻画任意此类模型中玩家的行动、知识和无知，动态-认知逻辑给出了下面的完全的有效公理集：

（a）对模态算子$[A]$的极小动态逻辑；

（b）对每个知道算子K_i的认知系统**S5**。

增加共同知识的算子，我们也可以得到一个极小逻辑（参见[Fagin et al. 1995]）。在一般的认知-动态逻辑中没有更多的公理。

10.3.3　对具体公理的一些限制

这里要做一点补充。具体的不完美信息博弈可能会满足其他的认知-动态公理。[Osborne & Rubinstein. 1994] 第 11 章列出了这样的一些限制。这意味着我们可以引进一些公理来对具有特定模式的玩家进行推理。

实例 1　“应当由谁移动的事实是玩家们的共同知识”。这是一个合理的假定，例如，很多的宴会博弈中都有这样的约定。这可以表示为下面的公式：

$$turn_i \to C_{\{1,2\}}\, turn_i$$

实例 2　“同一个信息集的所有节点有相同的可能行动”。对应的动态-认知公式写成（用“T”表示真）

$$turn_i \& \langle a \rangle \mathrm{T} \to K_i \langle a \rangle \mathrm{T} \text{ 或者甚至 } \langle a \rangle \mathrm{T} \to C_{\{1,2\}} \langle a \rangle \mathrm{T}$$

最后一个例子是关于主体的行动和知识之间的互动。一般来说，这样的公式在动态-认知逻辑中不是有效的。

实例 3　交换公理 $K_i[a]\phi \to [a]K_i\phi$ 说的是，如果玩家 i 知道实施 a 会导致 ϕ，那么实施 a 将使她知道 ϕ。这一蕴涵对于那些不对认知能力产生副作用的行动来说是合理的，但是一般情况不是这样。假设 a 指的是“多喝一瓶啤酒”，ϕ 指的是 i 做傻事。在博弈树上，只有当下面的有关行动 a 和 i 的不确定性的条件得到满足时，上面的交换公理才能成立：

$$\forall xyz:((xR_a y \& y \sim_i z) \to \exists u:((x \sim_i u \& uR_a z)$$

这是著名的关于行动和不确定性关系的聚合属性（参看图 10-7）。

同样，$[a]K_i\phi \to K_i[a]\phi$ 的另一个方向也不是普遍成立的。例如，读这篇文章你会学到一些东西 ϕ，即使你也许事先并不知道事情会是这样。我们将在 10.4.3 中再次讨论这两种交换公理。

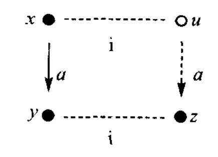


图 10-7

一个技术细节：动态-认知公理和在不完美信息博弈上的约束条件之间的自然的语义对应并没有什么特别之处。根据模态逻辑中的著名算法可以计算得到（[van Benthem. 1996; Blackburn et al. 2001]）。

10.3.4　互模拟和特征公式

动态-认知逻辑给出了一种博弈-内在语言来描述可能的行动和认知不确定性关系。另外，像在 10.2.2 中那样，我们可以把下面的两种角度列出来：

（a）两个博弈的根部节点满足相同的动态-认知公式；

（b）存在一个介于两个博弈之间的互模拟把这两个根部节点联系起来。

这样，互模拟就包含分别对可能的行动和信息集内部的“不确定性转换”成立的之字形条件。同样，我们可以使用动态-认知逻辑的公式去刻画在互模拟等价意义上的有穷博弈。

10.4　玩博弈的不同方式

10.4.1　静态对动态

博弈树是对在博弈中能够发生的所有事情的一个静态描绘。但是，在任一具体的比赛中，存在实际发生的事件，把玩家从一个状态带到另一个博弈状态，每个状态都可能存在关于知识和无知的不同情形（见图 10-8）。

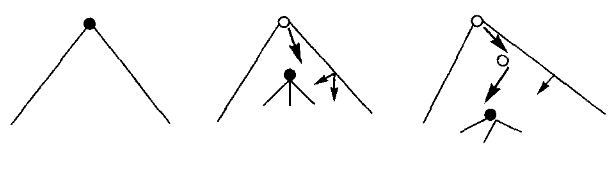


图 10-8

这就要求我们对博弈实施的逻辑“动态性”方面做进一步的研究；特别是，产生或消除无知的更新机制。我们的动态-认知语言描述了在连续的节点上什么是真的，并记录着玩家的信息变换。但是，我们可以对此进行更为系统化的研究。我们可以考查玩博弈的不同模式，然后确定它们的模态-认知属性。

10.4.2　完美记忆

玩博弈的一个重要模式是完美记忆：即，玩家牢记自己之前的移动，并记着他们在每个阶段的认知不确定性关系。

[Osborne & Rubinstein. 1994] 对这一概念有定义，主要是对由不确定性关系 $\sim_i$ 连接的两个节点设定进一步的要求：

> 沿着由这些节点确定的唯一的历史向后退，当轮到玩家 i 移动的时候，我们一定能找到对他而言同样的记录，并且在每一个节点有 i-不可区分的同样的选择。

要逐步分析以上的描述，我们考虑在博弈中发生变化的语义的两个方面。

（a）当 i 在位置 x，并且该她移动，实施 a 会到达状态 y，随后一定会产生任意的 $\sim_i$ - 不确定性 z："z 是从某个节点 u 通过 a 到达的一个状态，而且，u 和 x 一定拥有同样的不确定性。"但是，后者意味着：$x \sim_i u$。这可以图示为一个交换图（图 10-9）。

根据 10.2.2 和 10.3.4 中的分析，模态逻辑学家会把这个条件重新阐述为：

（Ⅰ）$\sim_i$ 是相对于逆行动 $a^{\cup}$ 的互模拟；

（Ⅱ）a 是相对于"不确定性关系转换"的互模拟。

或者用物理学家的行话说，在这类情境中行动和不确定性交换了。

（b）接下来，我们考虑当 i 在位置 x 但是没有轮到她移动时的情形，仍然有一个互模拟。但是，不同在于，我们并不要求两边的行动一定相同。原因是这样的。唯一的（生成）无知的源泉是我们缺乏关于另一玩家行动的知识。特别是，这种无知很可能会从一个节点发生，譬如，根部，另一玩家的移动直接生成不确定性。这种情况的图示基本上像图 10-9 表示的那样。

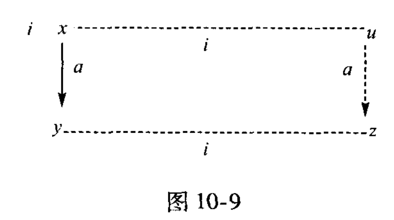


图 10-9

命题 2　完美记忆成立 当且仅当 对每个玩家而言动态-认知模型满足上面定义的两个交换图。

证明：从 PR 到"交换"。考虑下面的一种情况。假设 1 在位置 x 上，该她移动，并且 $xR_a \sim_1 z$。根据 PR，1 在位置 z 上，一定有同样的最后行动 a 发生，而在这个行动之前的位置 x 上 u 具有同样的不确定性关系集。这就等于说是 $x \sim_1 u$。另外的一种情况与此类似。玩家一开始就可以辨别自己的行动或他人的行动，而且，他们知道顺着任何一个历史有多少个行动，以及每一步由谁移动。

从"交换"到 PR。

施归纳法于任两个具有相同长度的通道，且它们最后的节点是由 $\sim_1$ 连接的。容易看出，这些路径在某个地方一定有共同的节点，之后对两个玩家而言互模拟图保证：（a）他们实施相同的行动，（b）在每个阶段他们有认知不确定性联系，直到结束。 ■

命题 2 给具有完美记忆的不完美信息博弈定义了一个动态-认知的公理化（参看 10.3.3）。在研究玩家在博弈树上冒险的时候，基于早先的极小动态-模态

逻辑，我们添加下面的两个交换公理：

（1） $turn_i \& K_i[a]\phi \rightarrow [a]K_i\phi$

（2） $\neg turn_i \& K_i[A]\phi \rightarrow [A]K_i\phi$

这里的 A 指的是另一个玩家可以采取的所有行动。

命题 3　对任意的不完美信息博弈 G，下面的两个陈述是等价的。

（a） G 满足完美记忆的交互性质；

（b） 不管我们怎样解释公理（1）和（2）中的自由命题变元，它们的所有特例在 G 中的每个节点上都为真。

这里的"自由"变元指的是那些并不代表特殊博弈结构的变元，譬如"转向"或"赢"。我们把对这一典型的模态对应结果的验证留给读者。通过上面的例子，我们主要想说明的是玩家的行动与具体公理之间的那种对应，而不仅仅关注具体的结果。例如，对于那些具有完美记忆能力但却不完全知道之前玩家轮流模式的情形，我们可以用同样的方法做类似的分析。

离题讨论：两种思考方式

我们可以把上面的交互图看作是对博弈树的完美记忆的一种约束条件。同样，我们可以有任意的不完美信息博弈，但是利用交互图作为一个 PR 算法来剪掉树上所有带点的线，保留那些具有完美记忆能力的玩家在玩博弈过程中实际遭遇的认知不确定性：

（1） 剔除所有那些不是从一个母节点生成的不确定性连接；

（2） 如果没有角色转换，也剔除所有介于不同行动结果之间的不确定性连接。

当对这个算法或上面的交换图进行分析时，我们发现了完美记忆的另一个有趣特征。对每个玩家的每一不确定性连接 $x\cdots y$ 只能找到唯一的生成原因。沿着从根部到 x 和 y 的通道往上看，我们可以找到一个最后产生分叉的节点（在此处另一个玩家移动），并且有一对行动导致 i 的一个不确定性连接。图 10-10 展示了这一现象。

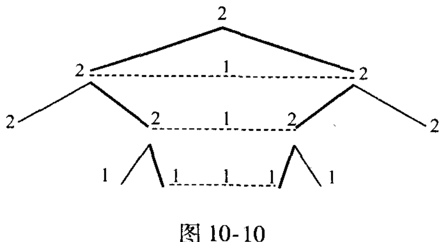


图 10-10

因此，这说明，我们自身的认知不确定性总是因为其他玩家采取了我们不能区分的行动所致。我们将会在 10.4.4 对此做更为一般的讨论。

这种分析方式同样可以应用到对其他现象的分析。举例来说，我们看到的公理还没有对“前向行为”做任何说明。特别是，完美记忆并没有排除下面的情况：仅仅通过玩博弈，无知可以被“奇迹般地治愈”（参见图 10-11）。

这对于依赖上下文的行动是合理的，如“找出你在哪里”——但如果考虑实施“相同的移动”，又似乎是不合理的。当然，我们可以假设，在结束点处玩家会得知博弈已经结束。但是，这确实是一个新的博弈行动，也许我们可以想象，是大自然作为外部的玩家实施了一个信号，这一博弈行动应当得到明确的表示。无论如何，如果我们要求：

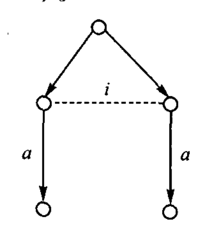


图 10-11

现存的不确定性是由于采取相同的行动所导致的

我们同样可以得到有效的交换公理，不过只是一个方向：

$$[a]K_i\phi \rightarrow K_i[a]\phi$$

上面提到的两个知识/行动的交换公理在时态行动逻辑[Halpern & Vardi. 1989]中已经有过研究，在那里，它们分别被称为“没有忘却”和“没有学习”。特别地，这些多余的因素对逻辑有效公理的复杂性会产生负面的影响。当交换图在模型中生成一个“格状”结构时，模态逻辑可以潜在地表示所谓的铺砖问题，从而变得甚至是不可判定的。直观上说，关于“行为合乎规范的”玩家的逻辑比对任意玩家的逻辑更为复杂。

10.4.3 信息更新

上面的章节都是关于抽象行动 a 的。但是，我们也可以考虑具体的认知博弈行动，例如，问问题或宣告，宣告可以是公开的，也可以是只对集团的一部分成员而言，我们关心的是由这些行动产生的知识或无知现象。对于主体如何做信息更新的问题，近年来的研究非常活跃，从［Fagin, et al. 1995］开始，接着有许多其他学者不断加入，例如，［van Benthem. 1996；Gerbrandy. 1998；Baltag. 1999；van Ditmarsch. 2000］。特别是，除了只是记录事实的信息，不确定性关系的改变也会影响我们对彼此的了解，这对不同玩家的影响也会有所差异：

“假设大自然给了我一张红色的纸牌（命题 ϕ 成立）或一张蓝色的纸牌（$\neg\phi$ 成立）——譬如说，实际上我得到的是红色的纸牌。在此之后，我们都不能区分两种情形 ϕ 和 $\neg\phi$。现在，我看了一眼我自己的纸牌，但却不告诉你我的纸牌的颜色：但是你看到我做的动作。所以我知

道我的纸牌是什么了，你仍然不知道，但是你知道我知道了。接下来，我告诉你我的纸牌的颜色。这样，ϕ 成为我们的共同知识。”

假设我有一张红色的纸牌，图 10-12 是一个博弈树，我们可以从中读出在给定的博弈过程中我和你的连续变化的认知状态。结束的时候，我们两人都知道博弈的实际情形。

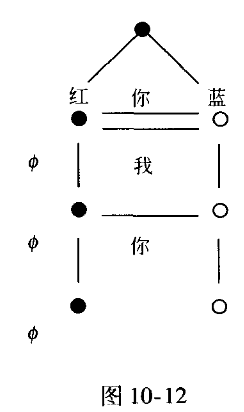


图 10-12

从这样的例子出发，[Baltag. 1999] 为认知行动提出了更为一般的更新机制，可以适用于博弈过程。主要的想法是，除了在认知状态中允许有不可区分关系，在行动之间也允许有不可区分关系存在。这对于完美记忆很有意义，因为所有带点的线最终可以归结为另一玩家的行动。

这一认知逻辑的版本比只是包括介于结果状态之间的不确定性关系更为一般，因为不同的行动可以产生相同的结果。所以，我们把介于行动之间的不确定性关系也包括在博弈模型中，作为一种等价关系（Baltag 的更新也更一般）。关于这种解释博弈行动的方法还有很多问题值得讨论，例如“宣布”（是向所有玩家宣布还是只向一部分玩家宣布），“读信号”（私下读还是公开读）等。但是，下面我们只给出一个基本更新机制的形式阐述。

乘积更新

在一个博弈中，假设当前的状态是 x，节点之间的不确定性关系在 x 的层次上已经生成了。假设有一个移动。新的状态是在博弈树的另一个层次上的节点，它们是这样一些序对（由前一个状态和刚刚发生的行动构成），并且 $(y,b)\sim_i(z,c)$ 当且仅当 $y\sim_i z$ 且 $b\sim_i c$。

这样，新的不确定性等于“老的不确定性 + 不可区分的行动”。根据这个规则，在很多情况下，我们可以得到在直观上正确的结果。例如，上面纸牌的例子就是按 ϕ 这个机理进行的，那里有两个行动“看到红色”和“看到蓝色”（这些行动只能在它们的内容为真的情况下才能被实施）。对于这两个行动，我本人可以区分，但是你却不能。图 10-13 是关于乘积更新在博弈树上作用的一个演示。上面的部分说明了在玩博弈过程中信息是如何得到更新的，沿着博弈树无知是怎样生成的。下面的部分展示了这种连续的更新。

10.4.4 更新机制和逻辑公理

同样，我们也可以从动态-认知的一般属性分析这种更新机制。乘积更新包

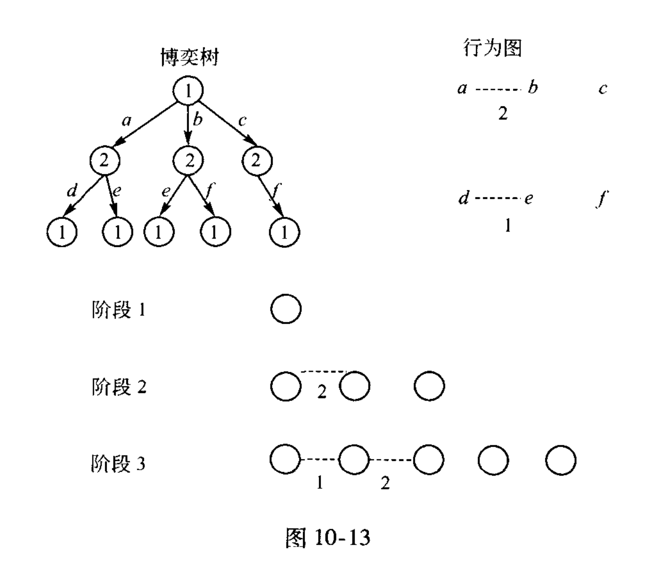


图 10-13

括动态-认知“反应”的三个主要性质：

（a）首先，乘积更新蕴涵完美记忆：如果玩家可以辨别自己的行动，早先的交换图可以从乘积更新中推导出来；

（b）第二，乘积更新也传播不确定性（没有“奇迹”）：如果 $x\sim_i y$，行动 a 发生之后，$(x, a)\sim_i(y, a)$。如果 i 有不可区分的行动，我们也可以允许有不同的移动 a，b 等。

（c）第三，我们称之为统一性：行动要么总是可以区分，要么永远不可区分：如果 $(x, a)\sim_i(y, b)$，当 $u\sim_i v$，那么也有 $(u, a)\sim_i(v, b)$，只要后者可以被执行。

命题 4　以上提到的 3 个性质决定乘积更新。

证明：我们已经证明了一个方向，即，根据乘积更新生成的不完美信息博弈树满足上面提到的三个性质。反过来，假设有一个博弈树满足这三个条件。我们可以找到一个行动图。如果两个节点 $x\sim_i y$ 之后发生 a，b，设 $a\sim_i b$，这意味着新的节点仍然是 $\sim_i$ 连接的。那么，从根部出发，$\sim_i$ 连接恰好是通过乘积更新生成的。原因在于，完美记忆说的是在博弈树中每个不确定性连接来自于低一层的不确定性连接，而传播说的是不确定性连接由不可区分的行动往下传承。总的来说，这恰好是乘积更新的效果。■

这些性质与具体的动态-认知公理相对应，这些公理在相关博弈的每个阶段都成立。（a）对应关于完美记忆的公理。对（b），我们有逆公理 $[a]K_i\phi\to K_i[a]\phi$。对于（c），我们需要对模态语言首先进行扩展，引入全称模态 $E\phi$，$U\phi$

说的是 ϕ 分别在一些，或在所有的世界上成立[Blackburn et al. 2001]：

$$E(\langle a^{\cup}\rangle T \& \neg K_i \neg \langle b^{\cup}\rangle T) \to U(\langle a^{\cup}\rangle \neg K_i \neg \phi \to K_i[b^{\cup}]\phi)$$

因此，乘积更新机制也对应一个具体的动态-认知博弈逻辑。 ■

10.4.5　假设主体的记忆力有限

在认知图谱的另一端，我们看到具有有限记忆力的玩家玩博弈的各种方式([Osborne & Rusbinstein. 1994]，第 9 章)。假设玩家忘记了早先发生的行动，譬如，以前发生的 k 个行动。这样，完美记忆就消失了，但是，我们仍然可以利用上面的关于博弈结构的动态-认知分析方法。最简单的情形是玩家只记得之前发生的一个行动。动态变化成为下面的情形。在博弈的每个新阶段，对两个玩家而言，我们把所有源于相同行动的节点用认知不确定性关系连接起来。用模态逻辑的语言说（需要再次使用全称模态词），下面的公理成立：

$$E(\langle a\rangle T \ \& \ \phi) \to U[a^{\cup}]\neg K_i \neg \phi$$

容易看出，如何把上面的模态分析扩展到玩家记得之前发生 k 个行动的情形。这给博弈论和计算机科学中关于利用有穷-状态机作为它们记忆力的策略的研究提供了一种模态的解释。

10.4.6　再一次讨论静态和动态的问题

上文展示了如何利用动态-认知语言对博弈进行研究，但并没有给出对博弈现象的一个系统阐述。事实上，借助动态-认知语言我们可以考察更为广泛的问题，例如，区分玩家的缺陷和博弈本身具有的“客观的”无知，或者关于信息（如“信号”）传播机制的动态方面的问题。但是，这样做，整个系统就必须是以下两个方面的结合：一方面是传统的对结果状态的动态-认知描述，另一方面是对认知行动的*动态-更新逻辑*。

10.4.7　附录：模拟决策的影响

要运用动态-认知逻辑，我们需要一个现实现象的“模拟阶段”：这个过程就是要把那些现实现象表示为形式的行动和不确定性关系。当我们对逻辑理论作出评价时必须记住这一过程：形式的模型能够以不同的方式“适合”现实。例如，在现实博弈中的行动可以在不同的抽象层次上加以表示。在纸牌博弈中，一个玩家可以“展示纸牌”，这是一个一般的行动，它的实例可以是展示具体纸牌的行动。选择什么样的层次直接影响到我们对玩家不可区分的行动的模拟。当展示给你我的纸牌而且我自己没有看到的情况下，我不知道很多不同的具体的展示-行动（而你知道）——但是，我知道我自己是在展示纸牌而不是在做其他的事情。

因此，上面的完美博弈的交换图对后面的行动成立，而对于前面的行动则不成立。在“知识博弈”（[van Ditmarsch. 2000]）中有精彩的关于模型决策的例子，其中包含纸牌，问问题和展示纸牌-行动等。

10.5 效力等价

我们已经看到如何处理不完美信息博弈的行动层次的问题。现在我们简要看一下更为全局的结果层次上的问题，以便寻求在 10.2.3 和 10.2.4 之间的类似之处。

10.5.1 统一策略、效力和表示

我们采用前面关于玩家效力的定义：在每一个节点，一个玩家能够迫使一个结果集产生，这个集合是依据她的其中一个统一策略所得。

实例 4 不完美信息博弈中削弱的效力。请看图 10-1 和图 10-2。玩家 A 在前者中有两个策略，E 有四个策略，生成下面的效力集：

A：{1,2}，{3,4}

E：{1,3}，{1,4}，{2,3}，{2,4}

给 E 增加不完美信息，A 的效力不会受影响，但是 E 的效力有变化：她的两个统一策略只能产生下面的两个效力集：

A：{1,2}，{3,4}

E：{1,3}，{2,4}

这可以看作是一种弱点，也说明不完美信息博弈对行动具有更大的模拟效力。

我们可以把这看作是对 10.2.3 中的表示结果的一种扩展。注意超集封闭（C1）和一致性（C2）的条件对于不完美信息的博弈仍然成立。这可以从上面列出的集合看出。但是，确定性的条件不再成立，因为 A 不再有 {1，4}，E 也没有它的补 {2，3}。

命题 5 对于任意两个满足条件（C1）和（C2）的有穷集合簇，可以找到两步的不完美信息博弈使得它们是这个博弈的效力集。

证明：我们不准备给出非常严格的证明，只是举例说明所需要的技巧。假设：

A 的极小效力是：{1，2，3}，{3，4}

E 的极小效力是：{2，3}，{1，4}

从玩家 A 出发，给效力集提供一些连续的后继节点（有可能会有拷贝），然后，E 接着移动。同样，相关的行动可能会包括各种各样的拷贝。首先，我们给每个玩家 E 的集合选择行动的类型，确保它们可以通过统一策略得到表示。E 的效力中可能会有“多余的”结果，我们需要通过拷贝和排列来“稀释”它们，使得结果成为 {2，3}，{1，4} 的超集（见图 10-14）。第三个和第四个统一策略的集合是 {2，3}，{1，4} 的超集。

更为复杂的情形是：当 A 的集合包括一些结果，这些结果没有在 E 的极小序列中被提及。假设我们有：

A 的极小效力是：{1，2，3}，{3，4}

E 的极小效力是：{2，3}，{1，4，5}

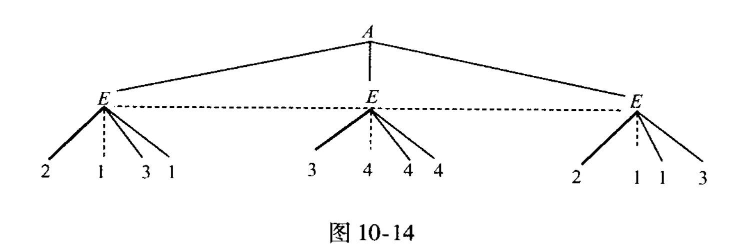


图 10-14

我们仍需要用相同的技巧做更多的“稀释”——这一次，包含额外的 A-的移动使得 E 只能在 1，4，和 5 之间做选择，这样得到的 E 的效力集是 {1，2，3}，{3，4} 的所有扩展。

这是一个更为严格的证明。(a) 首先确保每个原子结果都出现，必要时可以增加“多余的”超集。然后 (b) 生成一个 A 的预备枝以确保它的所有集合都被表示。(c) 确保 E 的每个结果集被表示为一个统一策略，从中间层选择足够的分支，从左向右。这一过程也许包括拷贝节点，像在简单的例子 A {1，2}，E {1，2} 中做的那样。(d) 避免存在多余的结果，重复下面的工作。假设结果 i 出现在某中间层次点 x，而这个节点在步骤 (c) 时不需要，那么固定 E 的任意结果集，它是由统一的策略 σ 生成的。譬如，后者在 x 处选择结果 j。然后拷贝这个节点 x，增加两个新的分支（为所有的中间层的节点）以获得两个新的统一策略：一个在位置 x 选择 j，在自己的拷贝位置选择 i；另一个做相反的事情——在其他的节点上选择 σ。这使得结果 j 看起来像是本应当是由 A 的移动得到的，只生成一个无害的 E 的超集。■

像在完美信息的情形中一样，这一结果表明我们可以找到博弈等价的逻辑演算，它可以帮助我们寻求上面提到的范式，它应当是普通的布尔命题逻辑的一般化。我将会在 10.5.2 中讨论这一问题。

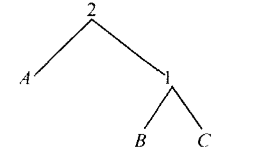
10.5.2 博弈变形

上文对［Osborne & Rubinstein. 1994］的“托普森变形”提供了一个逻辑立场，这一变形使得“规范的形式－等价”的不完美信息博弈可以互相转换。我们逐个来看。

例1（增加多余的移动＝幂等）［Osborne & Rubinstein. 1994］中图206-1说明，我们能够接受通过拷贝行动得到的新的认知不确定关系，像图10-15中展示的在两个博弈树中互相交换。在计算效力关系时候，我们看到在根部从左到右什么都没变化。右边的拷贝没有为玩家2增加任何新的结果，而1可以实施的两个统一策略仍能刻画相同的两个结果集｛A，B｝｛A，C｝。这个情形正像下面的命题幂等律所描述的那样：

$$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \vee A) \wedge (B \vee C)$$

这里，大的析取符表示新的不确定性关系的连接。



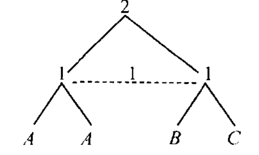


图10-15

当然，我们现在是在非标准意义上使用命题逻辑的，这里拷贝的确起作用，算子能够被“连接”。在某种意义上说，不完美信息的有穷博弈树是命题公式的一个自然扩展。

例2（行动的交换＝变形的分配律）［Osborne & Rubinstein. 1994］中的图208-1说明了如何交换玩家的移动。最主要的变形发生在图10-2和图10-4之间。在这两种情形下，玩家的集合效力（注意与10.5.1的演算比较）是：

A：｛1，2｝，｛3，4｝

E：｛1，3｝，｛2，4｝

这是一种非标准的命题“分配律”：

$$(A \vee B) \wedge (C \vee D) \leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge D)$$

大的符号表示相关的点线连接。对熟悉辛梯卡-桑都的IF-博弈的读者来说，这表现了下面的一阶公式之间的等价关系：

$$\forall x \exists y/x\ Rxy \leftrightarrow \exists y \forall x/y\ Rxy$$

接下来我们考虑其余的两种托普森变形：

（a）膨胀-紧缩会增加一个连接，这个连接不会在博弈中起实质性作用。这是对完美记忆的一种反映，是在10.4.2中阐述的其中一个行动。

（b）联合行动说的是玩家要移动的区域可以被重新解释为一组选择。这反映了我们强调效力的态度——不考虑具体的行动，以及它们之间的顺序。这是选择博弈等价的一个“结果-倾向”的概念（而非行动-倾向），与不完美信息没有任何关系。

总结上面的分析，我们得到下面的命题。

命题6　在不完美信息博弈中玩家的效力在托普森变形中保持不变。

上面已经提到，这个命题指的是托普森变形是一种对一般化命题逻辑的完全演算。从更为逻辑化的角度说，通过对“信息-友好”博弈（以［Hintikka & Sandu. 1997］的三值方法为基础）做一些修改也许可以获得同样的效果。逻辑上有意思的是关于上面这些规则的出现特征。A出现一次与出现多次不一定具有相同的效果，特别是当我们处理统一策略的时候。这让人想到线性逻辑，它的博弈语义通常包含非确定性的博弈（［Abramsky & Jagadeesan . 1994］）。

问题　把有穷的不完美信息博弈的完全演算重新表述为一种命题逻辑。

要进一步理解这里的相似性，我们看看［Osborne & Rubinstein. 1994］中博弈的一系列变形（第210，211页）。它从一个完美的信息树开始（见图10-16）。

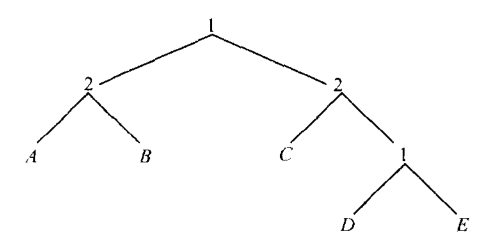


图10-16

根据10.1.4中的计算，我们有

1的极小效力是：{A,B}，{C,D}，{C,E}

2的极小效力是：{A,C}，{B,C}，{A,D,E}，{B,D,E}

做类似于在10.2.3中提到的标准命题变形，它有一个分配范式，仍然是一个完美信息博弈（参见图10-17）。

根据10.2.3中的定义，［Osborne & Rubinstein. 1994］中所有的变形步骤都保持效力，但是，它们得到的是另一种范式（见图10-18）。

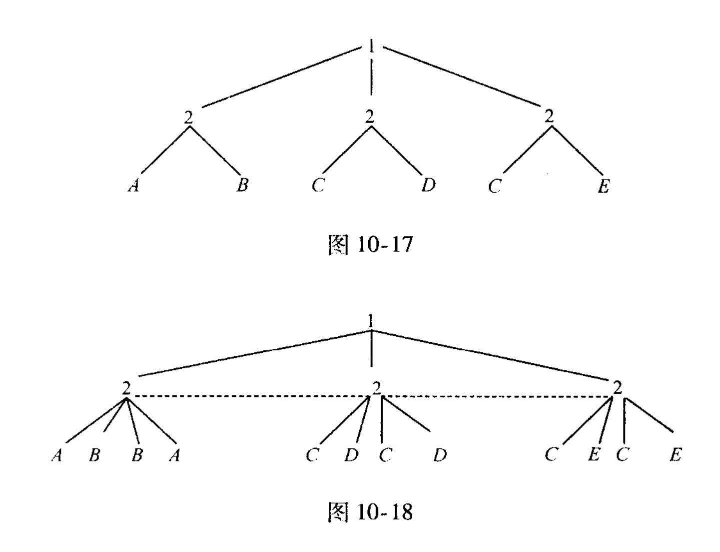


图 10-17

图 10-18

这一分析很接近托普森最初的结果，即，托普森变形恰好是使得博弈的简化范式保持不变的那些变形。

10.5.3 语言、统一策略和知识

本文的主要方法已经充分说明了认知动态逻辑语言的重要性。我们还讨论了比较博弈的“结构上”相似的概念，认知动态的互模拟。但是，在这一节，我将考虑一个比较粗的博弈等价概念：相对于玩家操控结果的效力。要结束对这些问题的讨论，我们提出一个问题：在自然语言中有没有效力等价的对应物？答案是肯定的。我们需要一个 10.2.4 中的迫使语言的合适的认知版本，它应当具有“策略模态词”：

$\mathfrak{M}, s \models \{G, i\}\phi$　玩家 i 对博弈 G 有一个统一的策略，从 s 开始，迫使一个结果集在模型 $\mathfrak{M}$ 中满足 ϕ

但是，关于相关的结果集的微妙之处隐藏在更丰富的认知结构中。假设一个玩家在一个结束点拥有 p，但是她不能区分这个节点和另外一个满足 $\neg p$ 的结束点 y。是不是统一策略“没有做任何事情”迫使 p 在结束点 x 成立？如果我们只看（仅由 x）产生的实际结果，答案是肯定的；但是，如果我们考虑看起来与玩家相关的结果（应当是 x 和 y），答案是否定的。可以用知识的概念来解释这个问题。在博弈状态 s 上，如果公式 $\{G, i\}\phi$ 的真值蕴涵在 s 玩家对最终迫使命题 ϕ 成立的知识，那么我们需要更为宽泛的一个“相关结果”的概念。这也符合博

弈论的一个事实：不完美信息博弈的组合结构不像完美信息博弈的组合结构那样清晰。我们不仅仅对由点 s 生成的行动子树感兴趣，我们也对玩家 i 的所有的“不可区分的变形”感兴趣。因此，我们建议对统一策略 σ，可以这样计算相关的结果：

像往常一样，沿着另一玩家所有可能的移动，加上它们的 σ-反映，而且在博弈的转换到 $\sim_E$-不可区分状态下封闭。

结果是，统一 i-策略模态词似乎是合理的。这看起来像是计算结果集，允许某一第三个玩家任意在 i 的不确定性连接中移动。

最后，我们将对这一概念和我们的行动语言进行比较。我们能否在动态认知逻辑中定义这个策略模态词？这里的动态认知逻辑应当是更为丰富的形式语言。对于完美信息博弈和动态逻辑本身，答案是肯定的。10.2.1 中的总赢位置的“不动点等式”可以很容易地加以扩展，以定义玩家有一个“ϕ 策略”的博弈位置：

$$\langle G,i\rangle\phi \leftrightarrow (end \wedge \phi) \vee (turn_i \wedge \langle\,\rangle\langle G,i\rangle\phi) \vee (turn_j \wedge [\,]\langle G,i\rangle\phi)$$

在这个递归定义中，大的模态词$\langle\,\rangle$，$[\,]$的域是所有的玩家可实施的所有行动——j 表示 i 的对手。但是，在不完美信息博弈中，情况变得更为复杂。动态认知逻辑可以表达对于策略及其属性的细微的差别。这些策略应该只“做正确的事情”；或玩家应当

在每个阶段都知道当下的策略是带着它们到相关的结果状态？

我们称具有特殊认知属性的策略为预言性的策略（见 10.1.2 中有关它的动机的讨论）。要继续下去，我们至少应当假设完美记忆。

命题 7　在具有完美记忆的不完美信息博弈中，所有的统一策略都是预言性的。

证明：有了完美记忆，玩家知道他们处在博弈树的哪个层次。而且，不确定性最初产生的原因是由其他玩家的行动所致，这种行动在博弈树的高处，玩家不可区分。上面的统一策略模态词满足下面的不动点等式：

$$\langle G,i\rangle\phi \leftrightarrow (end \,\&\, K_i\phi) \vee (turn_i \,\&\, \vee_a K_i\langle a\rangle\langle G,i\rangle\phi) \vee$$
$$(turn_j \,\&\, \&_a K_i[a]\langle G,i\rangle\phi)$$

这里的下标“a”是相关博弈树状态上的可行行动。要验证这个等式，从左到右很容易。特别是，反过来，我们必须知道，起源于不同信息集的统一策略在当前层次下可以被“拼凑”成一个在当前节点的统一策略。■

可以这样理解上面的等价式。我们已经阐明，相关的行动是“博弈行动加上不确定性跳跃”。这类似于对完美信息博弈迫使关系的最初分析，这些跳跃和初

始行动的结合可以看作是额外的博弈行动。然后，上面的认知-动态组合 $K_i[a]$ 正好是序列的行动模态词 $[\sim_i; a]$。在这一结构中，完美记忆意味着我们以哪种顺序执行新的组合行动并不重要。另外，我们也可以做不动点的分析，明确把第三个玩家的行动包括进来。但是要注意，统一性仍然要求玩家面对不确定性有统一的反应。

我们还没有解决另一个方向的问题：*是不是所有的预言性策略都是统一的？*即使它们更宽泛，或者与统一策略不可比较，预言性策略就其本身而言似乎是一个有趣的行为类。

10.6　结　　论

本文考察了不完美信息博弈作为描述行为和结果的动态-认知逻辑的模型。一个类似这样的系统分析可以帮助我们给在［Osborne & Rubinstein. 1994］中描述的不同的不完全信息现象找到一致的解释。这也可以应用在讨论很多的辛梯卡和桑都的逻辑“IF-博弈”，像在［van Benthem. 2000A］中证明的那样。最后，这一方法也揭示了许多更为一般的问题，逻辑和博弈论能够联系在一起。我们的下一个紧迫任务是扩展这里的结果到真实的博弈中，表明玩家的偏好，在［Stalnaker. 1999］中追求形式精密的层次。另外，这一方法可以看作是对计算机领域的进程逻辑的扩展，以便处理不完美信息，这是我们真正需要的，因为这可以帮助我们更好地理解现代的诸如网络活动这样的“计算系统”。

参考文献

Abramsky S, Jagadeesan R. 1994. Games and full completeness for multiplicative linear logic. *Journal of Symbolic Logic*, 59: 543 ~ 574.

Baltag A. 1999. A logic for communication. Centre for Mathematics and Computer Science, Amsterdam.

Barwise J, Moss L. 1997. *Vicious Circles*. Stanford: CSLI Publications.

Battigalli P, Bonanno G. 1999. Synchronic information, knowledge and common knowledge in extensive games, *Research in Economics*, 53: 77 ~ 99.

Blackburn P, de Rijke M, Venema Y. 2001. *Modal Logic*. Cambridge: Cambridge University Press.

Bonanno G. 1992. Players' information in extensive games. *Mathematical Social Sciences*, 24: 35 ~ 48.

Bonanno G. 1993. The logical representation of extensive games. *International Journal of Game Theory*, 22: 53 ~ 69.

de Bruin B. 2000. Modeling knowledge in games. Topology and logic. Master's thesis. ILLC, University of Amsterdam.

Fagin R, Halpern J, Moses Y, Vardi M. 1995. *Reasoning about Knowledge.* Cambridge (Mass.): The MIT Press.

Gerbrandy J. 1999. *Bisimulations on Planet Kripke.* PhD thesis. ILLC, University of Amsterdam.

Halpern J, Vardi M. 1989. The complexity of reasoning about knowledge and time. *Journal of Computer and Systems Science*, 38: 195 ~ 237.

Hintikka J, Sandu G. 1997. Game-theoretical semantics. // van Benthem J, ter Meulen A, eds. *Handbook of Logic and Language.* Amsterdam: Elsevier: 361 ~ 410.

Moore R. 1985. A formal theory of knowledge and action. Tech Report. SRI International, Menlo Park.

Osborne M, Rubinstein A. 1994. *A Course in Game Theory.* Cambridge (Mass.): The MIT Press.

Parikh R. 1985. The logic of games and its applications. *Annals of Discrete Mathematics*, 24: 111 ~ 140.

Pauly M. 2001. *Logic for Social Software.* PhD thesis. ILLC, University of Amsterdam.

Stalnaker R. 1999. Extensive and strategic form: games and models for games. *Research in Economics*, 53: 193 ~ 291.

van Benthem J. 1996. *Exploring Logical Dynamics.* Stanford: CSLI Publications.

van Benthem J. 1998. Dynamic odds and ends. ILLC Tech Report ML-1998-08, Amsterdam.

van Benthem J. 1999-onwards. *Logic and Games.* Electronic lecture notes. 1999-2002. Amsterdam & Stanford, http: //staff. science. uva. nl/ ~ johan/.

van Benthem J. 2000A. Hintikka self-applied. Tech Report, ILLC, University of Amsterdam. // Final version, 2006. The epistemic logic of *IF* games. Auxier R, Hahn L, eds. *The Philosophy of Jaakko Hintikka*, Schilpp Series, Open Court Publishers, Chicago: 481 ~ 513.

van Benthem J. 2000B. When are two games the same? Invited Talk at LOFT-III, Torino 1998, ILLC Tech report X-2000-03, Amsterdam. Final version, 2002. Extensive games as process models. *Journal of Logic, Language and Information*, 11: 289 ~ 313.

van Ditmarsch H. 2000. *Knowledge Games.* PhD thesis. ILLC, University of Amsterdam & Department of Informatics, University of Groningen.

11 作为进程模型的扩展博弈*

郭美云　张木春/译　刘奋荣/校

11.1　为交互式进程的博弈：行为和结果

11.1.1　作为进程模型的博弈

一个扩展博弈是一个数学树，它的构成如下：

$$\mathfrak{M} = (\text{NODES}, \text{MOVES}, \text{PLAYERS}, turn, end, VAL)$$

非终节点是某一特定选手的转向处，向外的转移是该选手的移动。终节点就没有向外的行动。从技术上来说，这种结构是一个多元模态逻辑的模型，以节点为状态，以移动作为二元的转移关系，用特殊的命题变元 $turn_i$ 为选手 i 标明转向，用 *end* 标明终点。赋值 *VAL* 也可解释节点上的其他相关的博弈-内部的性质，譬如选手的效用值或者博弈状态的更多外部性质。因而，博弈是两个或者更多个互动主体的进程，而且博弈论和进程逻辑之间的相似性也是值得探索的。在本文里，我们讨论"描述层次"的问题。什么是恰当的博弈形式语言，同时也讨论什么是恰当的语义模拟——从而回答这个基本的问题：

什么时候两个博弈是相同的?

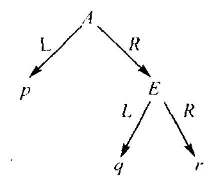
在讨论这些问题时，我们通常仅限于处理有穷双人博弈的情形。在其他的时候我们并不限于此。接下来的大多数结果不仅对于树，对于任意的图也都同样成立。这是有道理的。有两种直观的方法解释通常的博弈图。一种是作为所有可能过程的一棵树，另一种是看作一个抽象的状态自动机，它告诉我们什么样的状态和转移是可能的。从后者来看，我们可以放宽对博弈定义的限制，允许在所有实

* Extensive Games as Process Models. *Journal of Logic*, *Language and Information*, 2002, 11: 289 - 313.

际走步的树中产生无限运转的循环。

11.1.2　博弈等价：行为和效力层次

作为一个引例，我们考虑下面的两个博弈（图 11-1）：



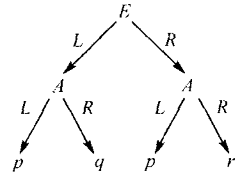


图 11-1

二者是相同的吗？答案取决于我们的兴趣层次：

（a）如果我们集中于转向和移动上，那么这两个博弈就不是等价的。

因为他们在“协议”（谁先实施）和选择结构上不同。这的确是一个看博弈的自然层次，其中包括局部行动和选择。稍后，模态互模拟将更加精确地定义这个比较。

但是人们在另一种意义上也可能称这些博弈是等价的——即使仅仅因为它们代表了下面这个逻辑规律两边的赋值博弈：

$$p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad \text{分配律}$$

那么适当的等价意义就只看可获得的结果：

（b）如果我们仅仅集中在结果上，那么这两个博弈是等价的。

原因是通过这些博弈选手能迫使一样的结果集：

A 能够迫使博弈在集合 $\{p\}$，$\{q, r\}$ 中结束

E 能够迫使博弈在集合 $\{p, q\}$，$\{p, r\}$ 中结束

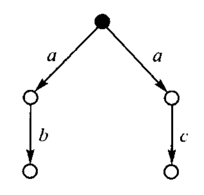
这里“迫使”指由策略保证的结果集（“效力”）。在左边的树中，A 有 2 种策略，产生所列出的集合，E 也一样。在右边的树中，E 还是有 2 种策略，而 A 有 4 种：LL、LR、RL 和 RR。这些策略中，LL 产生结果集 $\{p\}$，RR 产生 $\{q, r\}$。但 LR，RL 只保证 $\{p\}$ 的超集 $\{p, r\}$，$\{q, p\}$：即，较微弱的效力。因此在两个博弈中有相同的“控制”结果。更一般而言，在输入-输出层次下，分配律改变一个博弈的计划但并不影响选手的效力。

因此，博弈等价的种类依赖于你的兴趣层次：更粗的或更细的层次——这个普遍的哲学洞见最初是在莱文斯基意见听证会期间被清楚地阐明的：

克林顿的原则　所有的一切都依赖于你对“是”的理解。

11.1.3 进程逻辑和进程等价

相同的视角分层也为进程理论所熟知，其运行从纯粹观测的等价到更加内部的模仿。这里有个众所周知的例子。考虑以下机器图——或者如果你愿意，你可以把它们看做是只有一个选手的简单博弈（图 11-2）。



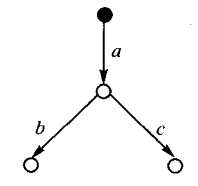


图 11-2

这些机器体现了相同的进程吗？

两者都产生了相同的可见有限路径：{ab，ac}，即使第一个机器确定地启动，另一个也有一个内在的选择。如果你仅仅关心输入-输出行为，那么在*有限路径等价*之下两个机器是一样的。但通常，你也会对一个机器的一些内部工作感兴趣，包括“进程中”的选择。这可被一个更细的结构比较的方法来测定，我们称之为*互模拟*——的确，从这个角度来看，两个机器就不是互模拟的。

因而有一个进程等价的谱系，从较粗的那些（象有限路径等价）到诸如互模拟这样的更细的路径等价，下面将要给出定义。而且，该谱系有一个语法上的对应：结构等价越细相应的逻辑语言的表达力越强。我们将在本文里讨论诸如博弈的可定义性问题，不考虑逻辑的公理化和复杂性问题。

对于博弈和进程，远不止这些（更多可参见［van Benthem. 1999-onward］）。许多进程演算共存于计算机科学中，包括 Hoare-Dijkstra 演算，模态和动态逻辑、进程代数、时序逻辑和线性逻辑。更多的是朝着人工智能的方向发展，逻辑为多主体系统引入知识、信念、主体意图和愿望。所有这种附加的结构与扩展博弈都是相关的：选手考虑，计划和长时间的互动。我们将讨论两个更现实的此类主题：*不完美的信息*，和*偏好/期望*。因为它们影响到了语言设计和博弈等价。这些需要上述模型的进一步丰富以结合不同种类的模态逻辑。对该方法的一个具有挑战性的进一步测试将是*无穷博弈*，它表明从模态逻辑到时序逻辑的一个转变，使得博弈树的分支本身成为主要的研究对象。

11.2　行为层次：模态和动态逻辑

在行为层次里，扩展博弈可以由标准的模态语言来描述，使得模态互模拟更贴近于博弈等价。因此，模态逻辑和动态逻辑它们本身就已经是有意思的策略和博弈演算了！我们将用一系列的例子展示这一点。

11.2.1　博弈的模态动态性质

考虑下面一个选手 A，E 之间的简单的两步博弈（图 11-3）。

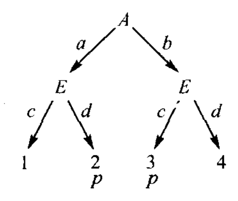


图 11-3

选手 E 明显有一个策略确保可以到达 p 成立的一个状态。这可用下面的真值模态公式表示：形如

$$[a \cup b]\langle c \cup d\rangle p$$

表明对每个选择行为 $a \cup b$ 的实施，都存在一个选择行为 $c \cup d$ 的实施且在状态 p 下结束。因而，模态算子序列可以说明策略的存在。但语言也可以更加明确地处理策略。后者可以看做是定义在选手的转向上的部分转移函数，它是通过一系列条件式的指令给出的，例如：

“如果她实施这一步，那么我实施那一步。”

更一般而言，策略是部分转移关系。后者包括基本的移动，对条件的测试，加上一些复杂的关系——由基本的移动开始，增加“组合；选择∪，迭代 *，测试（ϕ)?”算子，这些策略在动态逻辑里通过关系运算的模型是可以定义的。

因而，一个策略就像一个程序，必须在转向节点处对相关选手实施。例如，在这种语言中，我们可以说，在一个双人博弈中，通过分别实施策略 σ，τ 达到的最终状态具有某一性质 p：

$$[((turn_E)?;\sigma) \cup (turn_A)?;\tau))^*](end \rightarrow p)$$

换句话说，动态逻辑编译了关于策略和它们最终作用的明确推理。我们可以对它进行扩展。首先，丢掉前件 $end \rightarrow$，我们同样能很好地描述策略在中间节点

的作用。其次，相关的设置可以加进来。一个标准的博弈理论策略是一个函数，使得它的选手在每个转向做出唯一的反应，但在实际中关于行动的考虑，完全的菜单总是缺乏的。我们通常有一些更含糊的计划，可以在我们的转向处提供更多的选择，只在我们的行为上设置一些限制。现实中的对手实施这样的计划互相对抗，导致一个可能的结果状态的集合：受限的，但不能通过他们的计划唯一地定义的。这种情况是由上述公式和他们的逻辑关系自动包含的。

11.2.2 作为策略演算的动态逻辑

动态模态逻辑也能讨论只运行部分博弈树的策略，以及他们的组合。因而你就轻易地获得了一个策略演算！在最初的博弈状态不再被定义之前，下面的模态算子描述了部分策略 σ 的对选手 E 运行的作用：

$$\{\sigma,E\}\phi \quad [((turn_E)?;\sigma) \cup (turn_A)?;A))^*]\phi$$

这里 A 是对选手 j 的所有可获得的移动的并。同样，E 将表示对选手 i 的所有移动的并。

在策略上的一个基本运算是并，根据两者来允许所有可能的移动。“并”扮演两个角色。一方面，它融合两个“计划”限制选手进入共同的弱化。然后我们就能在动态逻辑中进行像程序演算一样的计划演算，包括关于效用的推理。

这里有两个例子：

$$\{\sigma,E\}\phi \wedge \{\sigma,E\}\psi \rightarrow \{\sigma,E\}(\phi \wedge \psi) \text{ 是有效的}$$

$$\{\sigma,E\}\phi \wedge \{\tau,E\}\phi \rightarrow \{\sigma \cup \tau,E\}\phi \text{ 是无效的}$$

但合并也有另一种伪装：作为系列的连续策略组合——至少，如果我们作出假定：

σ，τ 是不相交的：它们从未在相同转向下被定义

那么下面的策略演算原则就变成有效的了：

$$\{\sigma,E\}\{\tau,E\}\phi \rightarrow \{\sigma \cup \tau,E\}\phi$$

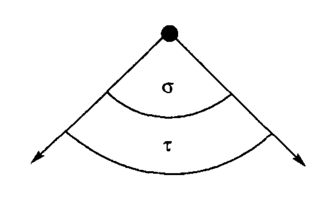


图 11-4

11.2.3　均衡概念的不动点语言

检验一个语言的表达力的测试的好与坏，就在于看它是否有助于一些重要结果的证明。不妨来看下面这个基本的结果：

策梅罗定理　每个有穷的零和博弈都是确定的。

即两个选手之一在这样的有穷博弈里总有一个赢的策略。这是问题的关键。从末端节点上的原子谓词 win_i 开始表明哪个选手已经赢了，我们通过下面递归的方法来定义谓词 win_i（“选手 i 在当前的节点上有一个赢的策略”）：

$$WIN_i \leftrightarrow (end \wedge win_i) \vee (turn_i \wedge \langle E\rangle WIN_i) \vee (turn_j \wedge [A]WIN_i)$$

注意那个特定的图解相当于为谓词 win_i 给出了一个归纳定义，由一个最小的不动点图解得到

$$WIN_i = \mu p \cdot (end \wedge win_i) \vee (turn_i \wedge \langle E\rangle p) \vee (turn_j \wedge [A]p)$$

右边不是特有的动态逻辑公式，但是它属于允许不动点定义模态 μ 演算——假设定义的图解只有原子谓词 p 在语法上确定的发生。因而 μ 演算也是一个好的博弈逻辑。运用它，你可以改变上面的递归图解。例如，

$$\{i\}\phi = \mu p \cdot (end \wedge \phi) \vee (turn_i \wedge \langle E\rangle p) \vee (turn_j \wedge [A]p)$$

定义了存在 i 的一个策略确保得到一个结果集，其中命题 ϕ 成立。并且下面的递归公式：

$$COOP\phi \leftrightarrow \mu p \cdot (end \wedge \phi) \vee (turn_i \wedge \langle E\rangle p) \vee (turn_j \wedge \langle A\rangle p)$$

定义了一个合作的结果 ϕ 的存在。后者仍然能在动态逻辑里明确地定义，通过使用下面的公式

$$\langle(((turn_i)?;E) \cup (turn_j)?;A))^*\rangle(end \wedge \phi)$$

模态不动点定义反映了许多博弈理论概念的均衡特性，它可以通过一些迭代的进程达到。

因而动态逻辑的基本原则给博弈论的一个基本的部分提供了形式化，即博弈形式、行为和策略。

11.2.4　作为博弈等价的互模拟

一种语言反映的是它所讨论的结构特征的详细层次。模态语言是通过后继状态在个体行为层次和进程里局部地讨论博弈。但你也能在更多的结构术语里看这个层次，在相同博弈的不同描述之间寻找不同的概念——正如不同的“机器”可以是相同进程的实施。模态语言的关键等价如下：

定义 1　一个互模拟是边缘标有 $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ 的两个图的状态间的任意二元关系 Z

（即，二元转移关系 R_a），这样，当 xZy，我们就有（1）原子一致，和（2）所有 a 的 Z 字形条件：

（1）x，y 证实相同的命题变元；

（2a）如果 xR_az，那么在 $\mathfrak{N}$ 中存在 u 使得 yR_au 且 zZu；

（2b）反之亦然。

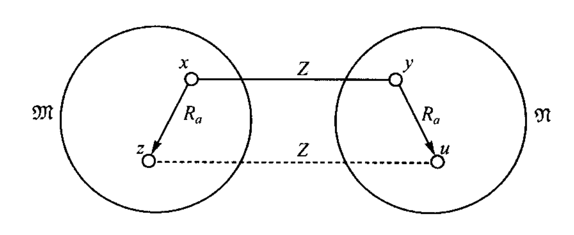


图 11-5

互模拟是典型的进程的“行为相似性”，用来处理局部性质之间，以及在进程任何阶段的可行的选择行为之间的等价。它可以用来把特定的机器收缩到最小的那块实施相同的进程，而且可以把一个图展开成可能施行序列的完全树。

互模拟对模态和动态公式具有保真性，直到完全的 μ 演算——而且也有逆命题。三个关键的结果［van Benthem. 1996；1997；Barwise，et al. 1997］建立了这种联系：

定理 1 对于图 $\mathfrak{M}$，$\mathfrak{N}$ 的节点 s，t，条件（a）蕴涵条件（b）：

（a）在 $\mathfrak{M}$，$\mathfrak{N}$ 之间，存在一个互模拟 $\mathfrak{Z}$，使得 $s\mathfrak{Z}t$；

（b）$\mathfrak{M}$、s 和 $\mathfrak{N}$，t 满足相同的 μ 演算公式。

特别是模态或动态公式在互模拟下是不变的。

定理 2 对于有限图表 $\mathfrak{M}$，$\mathfrak{N}$ 和节点 s，t，下列是等价的：

（a）$\mathfrak{M}$、s 和 $\mathfrak{N}$，t 满足相同的模态公式；

（b）在 $\mathfrak{M}$，$\mathfrak{N}$ 之间，存在一个互模拟 Z，使得 sZt。

这部分逆命题指的是基本的模态语言和有穷模型上的相似性关系是匹配的。

第三个结果指的是，在相同的描述层次，动态语言甚至为任何有限的图表提供完全的描述：

定理 3 对每个有限图表 $\mathfrak{M}$ 和状态 s，都存在着一个动态逻辑公式 $\beta_{\mathfrak{M},s}$，使得下列对所有图表 $\mathfrak{N}$，t 都等价：

（a）$\mathfrak{N}$，$t \models \beta_{\mathfrak{M},s}$；

（b）$\mathfrak{N}$，t 与 $\mathfrak{M}$，s 是互模拟的。

证明：在我们的基本语言里，任意有穷模型 $\mathfrak{M}$，s 落入最大的状态区都满足相同的模态公式。结果的划分是可定义的：

声明 1　存在一个有穷的模态公式集 ϕ_i（$1 \leqslant i \leqslant$ k）使得

（a）每个状态只满足他们当中的一个；

（b）满足相同的公式 ϕ_i 的状态与所有的模态公式一致。

为了弄明白这个，在模型里任取一个状态 s，对不满足相同模态公式的任意状态 t 取一个在 s 中为真且在 t 中为假的"区分公式" $\delta^{s,t}$。所有 $\delta^{s,t}$ 的合取都是 ϕ_i 中的一个公式，它只有在 s 和相同的模态理论状态才为真。不失一般性地，我们假定 ϕ_i 列出的所有关于命题字母的信息在他们的整个划分区域中都是真的和假的。我们对这些区域之间的行为联系也做一个快速有效的观测：

\# 如果任一满足 ϕ_i 的状态和一个满足 ϕ_j 的状态有 R_a-联系，

那么所有满足 ϕ_i 的状态也满足 $\langle a \rangle \phi_j$

接着，下面是对 $\mathfrak{M}$，s 的 $\beta_{\mathfrak{M},s}$ 的描述：

（a）所有命题在 s 中是真的，在 $\mathfrak{M}$，s 中加上唯一的 ϕ_i 是真的；

（b）把"全模态词" $[(E \cup A)^*]$ 加到以下公式的合取前面；

（b1）所有 ϕ_i 的析取，加上所有的 $\neg(\phi_i \wedge \phi_j)$（$i \neq j$）；

（b2）所有的蕴涵式 $\phi_i \rightarrow \langle a \rangle \phi_j$ 对于情况#出现时；

（b3）所有的蕴涵式 $\phi_i \rightarrow [a] \vee \phi_j$ 其中析取超过前面所列条件的所有情况。

声明 2　$\mathfrak{M}$，$s \models \beta_{\mathfrak{M},s}$。

声明 3　如果 $\mathfrak{N}$，$t \models \beta_{\mathfrak{M},s}$，那么在 $\mathfrak{N}$，t 和 $\mathfrak{M}$，s 之间存在一个互模拟。

假设 $\mathfrak{N}$，t 是 $\beta_{\mathfrak{M},s}$ 的任意模型。ϕ_i 把 $\mathfrak{N}$ 划分为满足它们的不相交的状态区。把这样一个区域里的所有状态与 $\mathfrak{M}$ 中满足 ϕ_i 的所有状态相联系。特别是，t 与 s 相联系。我们验证这是个互模拟。初始条件是很清楚的。Z 字形条件随着特定的描述而产生。（a）在 $\mathfrak{M}$ 中的任意 R_a 后继步都被编入公式 $\phi_i \rightarrow \langle a \rangle \phi_j$ 中且在 $\mathfrak{N}$ 中处处成立，在那里产生需要的后继者。（b）相反地，如果在 $\mathfrak{M}$ 中没有 R_a 后继者，这表明是在限制的公式 $\phi_i \rightarrow [a] \vee \phi_j$ 中且在 $\mathfrak{N}$ 中也成立，从而阻止了"多余的"后继者产生。■

定理 2 和定理 3 对任意图表都成立，只要我们大大增加基本模态语言的表达力，允许构造任意无穷的合取和析取形式。互模拟在树上几乎没有什么区别，接近于图表同构。但我们的分析同样适用于更宽泛的博弈概念，诸如图表自动机。

11.2.5 进一步的模态语言

前面的结果是有代表性的一个类型。对许多有着更丰富的模态语言的进程等价概念，类似的可定义性和表达力的定理可以被证明（[van Benthem. 1996]）——对博弈等价同样也是如此。因而，博弈结构可以被描述为：或者是在两个陈述间通过适当的语义等价，或者更加语形地，根据相应的形式语言定义“博弈公式”（[Bonanno. 1993；van Benthem. 1999]）。

特别是，用过去算子来扩展模态语言是很有用的，因为用它可以看当前状态之前的博弈过程。最一般的，将

关系的逆 $A^{\cup}$

运用到迄今为止的所有复合动作 A 上，通过反向的移动回到过去。重复进行，这就产生了可以普遍到达树中任意节点的模态算子，从当前状态通过倒退然后向下移动即可达到。这需要考虑到从未出现过的节点的反事实推理。对这种语言，互模拟只是把在某一状态下*接踵而来*的移动的 Z 字形条件加到先前的向外移动的那部分。上述结果由相同的证明完成。这是一个有关表达力的附加观察（[Rodenhäuser. 2001]）：

事实 1 所有策略在一个确定的有穷博弈树里使用行为逆算子的动态模态语言都是可定义的。

证明： 如果移动是确定性的部分函数，这种语言可以通过公式 δ_s 列举所有移动的方法，从而唯一地定义博弈树里的每个节点 s。那么在 R_a 型树里的每个从节点 s 到节点 t 的转移都可用如下动态语言定义：

$$(\delta_s)?;a$$

通过这样的一些有限合并，任何关系都是可定义的。特别是，选手的任何策略在我们的语言里都成为可定义的。 ■

通过逆向看的节点释义来定义策略，使它们只依赖于到目前为止的博弈过程；但更早的“逆向归纳”策略是通过看当前节点的未来，定义他们的移动。这就把我们带回到了先前的部分。考虑一个有穷博弈模型的*互模拟收缩*，即：和它互模拟的最小图表。在这样的博弈模型里我们最初顺向看的语言是策略的充分表达：

事实 2 在一个博弈的有穷互模拟收缩里，每个策略都可以由动态模态语言按它的立场来定义。

证明： 众所周知，在这样一个收缩里的每个状态都是由一些标准模态公式唯一定义的（[Blackburn, et al. 2001]）。现在，只列举策略中的所有状态转移，用

有限的模态合并行为表示

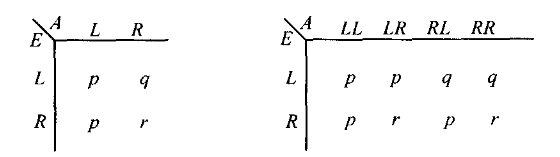
$$(\phi)?;a\ ;(\psi)?$$

其中 ϕ 表示移动的起点，ψ 表示移动的终点。 ■

把过去算子加到我们的语言里是讨论相同博弈的一个更加有雄心的方法。但当我们改变博弈本身时上述方法也有效。典型例子将是博弈的模态研究，该博弈是带有同时移动且由转向来定义积极的选手群的博弈。

11.3　效力层次：作为输入——输出关系的博弈

粗糙得多的博弈描述层次也可能是重要的。例如，在博弈论中，策略的形式只是把在矩阵里的所有可能的策略和结果都列举出来。比如，对于 11.1.2 部分的两个博弈，它们的矩阵表示如图 11-6。



E \ A	L	R
L	p	q
R	p	r

E \ A	LL	LR	RL	RR
L	p	p	q	q
R	p	r	p	r

图 11-6

这只记录了全局的行为和结果。一个更加经济的描述是直接看选手对迫使博弈在某一结果集里结束的效力。我们下面将定义它，寻找一些基本的特征，并将进一步展示广义模态语言怎样处理这个博弈层次（包括一个适当的互模拟)。

11.3.1　迫使和效力

我们下面定义迫使关系：

$\rho_G^i s,X$　选手 i 在博弈 G 中从状态 s 出发有一个策略，它的结果状态总是在集合 X 里。

迫使关系是在博弈的根上对选手们的效力编码，以便确定对抗其对手的任意反击的结果。数学上，他们是交互式进程中的广义可达关系，将状态与状态集关联起来，而不是上述博弈模型的状态对状态的转移关系。从此我们将运行博弈结构的这个输入-输出概念，由策略迫使的效力是容易计算的，证明例子在 11.1.2 部分 。

11.3.2 效力的一个简单表示

严格说来，接下来的内容虽然不是非常有必要的，但它有助于理解当前的博弈层次。为了简单起见，只考虑两个选手 A，E 间的博弈。这里有一些限制，效力关系显然是在超集之下封闭的：

C1 如果 $\rho_C^i s$，Y 且 $Y \subseteq Z$，那么 $\rho_C^i s$，Z

另一明显的限制是一致性。选手不能迫使博弈进入不相交的结果集，否则将导致一个矛盾：

C2 如果 $\rho_C^A s$，Y 且 $\rho_C^E s$，Z，那么 Y，Z 重叠

而且，策梅罗定理说的是所有有穷的双人博弈都是确定的：对任何赢的约定，两个选手中的一个选手必有一个赢的策略。这是一个完全性结果。令 S 是总的结果状态集：

C3 如果不是 $\rho_C^A s$，Y，那么 $\rho_C^E s$，S-Y；且 E 对 A 同样成立①

相反地，这些情况也是全部都必须成立，下面是这个结果的证明：

命题 1 集合 S 的子集的任何两个家族 $F1$，$F2$，如果它们满足 $C1$，$C2$，$C3$ 情况，那么它们一定是某个两步博弈的根效力。

证明： 选手 A 开始，且让他在相应于 $F1$ 里的集合的后继者之间选择。在这些节点上，选手 E 开始移动，且能选那个集合的任一成员。显然，选手 A 有效力在 $F1$ 中做具体指定。现在看选手 E。在刚才指定的博弈里：她能迫使出任何与 $F1$ 里的每个集合重叠的结果集。但根据 $C2$，$C3$，这些恰好是她的初始家族 $F2$ 里的集合。例如，如果结果集 U 与 $F1$ 里所有集重叠，它的补集 S-U 不可能在那个 $F1$ 家族里，因此由完全性，U 自身一定在 $F2$ 里。 ■

由于这些限制，在一个双人博弈中，一个选手的效力由 $C2$，$C3$ 自动地确定另一个选手的效力。我们的结果为博弈给出了一个结果层范式，与他们通常的策略形式相关（虽然不是完全相同的）。它有两次移动，并且无论从哪个选手开始都没关系，这就像是标准命题逻辑的分配范式。的确，主要的布尔运算形成一个博弈等价的逻辑演算[van Benthem. 2001C] 允许我们扭转选手的顺序，并通过他们压制重复的移动。

在只有一个选手的情况下，若这两个集合族一样时，上述关于两个族的条件坍塌成一个标准集合论的概念——超滤。这个有限行为说明我们有一个自然的概念。博弈理论的背景为经典逻辑概念的系统概括提供了一个竞技场。现在你可以

① 原文 S-Z 有误，应为 S-Y——译者注。

自由地为选手做出单独的规定，并且以不同的方式把它们联系起来。

11.3.3　一种模态迫使语言

在这个层次，博弈仍然有一种相应的模态语言，包括命题变元、布尔算子，现在还添加了模态算子：

$\mathfrak{M},s\models\{G,i\}\phi$　当且仅当　存在一个集合 X 有 $\rho^i_G s,X$ 且 $\forall s\in X$　$\mathfrak{M},s\models\phi$

在一个固定博弈的语境里，我们不需要在模态词里对最初的论证编码，只写 $\{i\}\phi$。这是所谓的模态逻辑领域语义学，从状态到状态集。除了对 $\{i\}\phi$ 析取的分配外，它的普遍有效性是所有最小模态逻辑的原则。特别是，上述 $C1$，$C2$，$C3$ 现在以逻辑的原则出现：

如果 $\models\phi\to\psi$，那么 $\models\{G,i\}\phi\to\{G,i\}\psi$　　　向上单调性

$\{G,A\}\phi\leftrightarrow\neg\{G,E\}\neg\phi$　　　一致性 + 确定性

分配的失败意味着下面的是无效的：

$$\{G,i\}(\phi\vee\psi)\to\{G,i\}\phi\vee\{G,i\}\psi$$

这恰好是迫使的意义所在。其他选手的效力可以阻止我们唯一地确定结果。例如，在11.1.2的博弈中，选手 A 可能迫使 $\{q,r\}$，但不会是 $\{q\}$ 和 $\{r\}$，因为 E 在这里有决定性的发言权。

11.3.4　互模拟、不变性和可定义性

考虑任意一个博弈模型 $\mathfrak{M}$ 和上面定义的迫使关系。下面给出标准模态互模拟的适当推广。

定义2　在博弈模型 $\mathfrak{M}$，$\mathfrak{N}$ 之间的一个效力互模拟是博弈状态间的一个关系 Z，满足以下两个条件：

(1) 如果 xZy，那么 x，y 满足相同的命题变元；

(2a) 对每个 i，如果 xZy 且 $\rho^i_{\mathfrak{M}}x,U$，那么存在一个集合 V 有 $\rho^i_{\mathfrak{N}}y$，V 且 $\forall v\in V\,\exists u\in U$：$uZv$；

(2b) 反之亦然。

这个概念很自然，它已经在并行动态逻辑([van Benthem, et al. 1994])，拓扑模态逻辑学([Aiello, et al. 2001])，选手的策略效力的博弈逻辑([Parikh. 1985; Pauly. 2001])，和共余代数([Baltag. 2000])中被单独地提出来。把11.2的所有结果概括如下：

定理4　对于效力互模拟而言，在模态迫使的语言里公式是不变的。

证明：对迫使算子解释上述 Z 字形条件施归纳步；考虑二个博弈模型 $\mathfrak{M}$，

$\mathfrak{N}$。假设 $\mathfrak{M}$，s $\models \{i\}\phi$ 且 sZt。通过真值定义，存在一个集合 U 有 $\rho^i_{\mathfrak{M}}s$，U 且对所有的 $u \in U$：$\mathfrak{M}$，$u \models \phi$。现在通过 Z 字形条件（2），在 $\mathfrak{N}$ 中存在一个集合 V 有 $\rho^i_{\mathfrak{N}}t$，V 且 $\forall v \in V \exists u \in U$：$uZv$。因此，每个 $v \in V$ 与某一 $u \in U$ 是 Z 相关的。且根据归纳假设：$\mathfrak{N}$，$v \models \phi$。还有，$\mathfrak{N}$，$t \models \{i\}\phi$。

定理 5 若有穷模型 $\mathfrak{M}$，x 和 $\mathfrak{N}$，y 满足相同的迫使公式，在他们之间有一个带 xZy 的效力互模拟 Z。

证明：在模型中的状态间如下定义关系 Z：

uZv 当且仅当 $\mathfrak{M}$，u 和 $\mathfrak{N}$，v 满足同样的模态迫使公式。 ■

声明 4 Z 是一个效力互模拟。

从定义看，原子条件是清楚的。现在，假设 sRt，而同样，对 $\mathfrak{M}$ 的某一子集 U，$\rho^i_{\mathfrak{M}}s$，U。我们需要找到 V 有

$$\rho^i_{\mathfrak{N}}t, V \text{ 且 } \forall v \in V \exists u \in U: uZv$$

假设不存在这样的集合，那就对在 $\mathfrak{N}$ 中的每个集合 V 有 $\rho^i_{\mathfrak{N}}t$，V，存在一个状态 $v^V \in V$ 与任意的 $u \in U$ 不是 Z 相关的。让我们来分析后者，通过关系 Z 的定义，对每个 $u \in U$，在某一迫使公式 ψ^u 上 v^V 不同意 u：即它在 u 中是真的，且在 v^V 中是假的。但另一方面，所有这些公式的析取 ψ^V 在 U 中的每个元素都是真的，且在 v^V 中仍为假。现令 ψ 是所有后者公式的合取，那里 V 超过集合限度满足 $\rho^i_{\mathfrak{N}}t$，V。显然我们易得：

$$\mathfrak{M},s \models \psi \text{ 对每个 } u \in U \text{ 因此 } \mathfrak{M},t \models \{i\}\psi$$

但另一方面，通过上述 Z 的定义，$\mathfrak{N}$，$t \models \{i\}\psi$。这意味着存在一个集合 V 有 $\rho^i_N t$，V 的所有元素都满足公式 ψ。这与 ψ 的构造相矛盾，因为 v^V 一定不满足它的合取肢 ψ^V。 ■

我们甚至能为任何博弈找到真实的"策略恒定"，即：无穷迫使公式定义的所有博弈类都与它们有一个迫使的互模拟。这些结果在一般进程模型上也成立，不一定是博弈树。

定理 6 对每个有穷图表 $\mathfrak{M}$，s，都存在一个模态迫使公式 $\beta_{\mathfrak{M},s}$，使得下列对所有图 $\mathfrak{N}$，t 都是等价的：

(a) $\mathfrak{N}$，$t \models \beta_{\mathfrak{M},s}$；

(b) $\mathfrak{N}$，t 与 $\mathfrak{M}$，s 是效力互模拟的。

证明：相似的结果在 11.2 中已经给出证明，这里只说明必要性的改变。这里，在模型中无论何时 $\rho^i_{\mathfrak{M}}t$，U 都成立，在全局的描述公式 $\beta_{\mathfrak{M},s}$ 里，我们设定一个合取式：

$$\phi_t \to \{i\} \bigvee_{u \in U} \phi_u$$

但是，如果 $\rho^i_{\mathfrak{M}} t$，U 不成立，我们就设定

$$\phi_t \to \neg \{i\} \bigvee_{u \in U} \phi_u$$

这个论证与 11.2.4 中给出的论证基本上是相似的，它所产生的公式的真实性保证了一个与初始模型一致的效力互模拟。 ■

11.3.5　与模态行为语言的联系

在 11.2 的模态 μ-演算里已经表明上述迫使模态是可定义的。下面说明在模仿层次中相同的蕴涵式成立：

事实 3　如果在二个模型之间存在一个行为互模拟，s 连接 t，那么也存在一个效力互模拟做同样的事。

在博弈上的行为和效力的两个角度共存：一个例子是一阶赋值博弈在（[van Benthem. 2001A：第七章] 看来，一个一阶语句 ϕ 的真（关于一个模型被看成“博弈牌”的一个模态行为断言）等同于证实者有一个赢的策略：即在 ϕ-博弈里一个选手在博弈棋盘上的一个效力；另一个例子是图表博弈，选手根据某一协议挑选后继者，这里赢的策略是与图表自身的模态行为性质相联系的。另一个联系是一个更加冒险的博弈语言的设计问题。*

11.4　博弈结构的中间层次

模态行为互模拟和效力互模拟是一个谱系的两个极端。对于博弈来说，也有吸引人的中间可能性，它不直接与已知的进程等价相对应。我们分两种方式来讨论。

---

* 二种类模态分解

你也可以把标准模态语言用来重新设计迫使语言。迫使模态词 $\{i\}\phi$ 结合了二个逻辑量词，其形式是：

存在一个策略使得它的所有结果都有性质 ϕ

其中存在模态词〈1〉在当前状态的可能策略上变化，全称模态词［2］的论域则是前者可及的输出状态，这是〈1〉和［2］一个二种类模态结合。这就需要一个有状态作为论域的二种类模型，还需要有她们自己的二种类互模拟的一个策略。这样的话，就更简洁了，因为我们不仅可以陈述策略本身的性质，还可以用一种较不含蓄的方式对一个博弈的可能策略进行推理。

11.4.1　迫使的中间位置

效力告诉我们选手最终能成就什么，但有时我们想要描述他们在中间阶段的效力。例如，在 11.1.2 中两个效力等价的局部动态分配博弈是相当不同的。在左边，选手 A 能传递给选手 E 在达到 q 和 r 之间一个选择，但这在右边是不可能的。这个性质也可用一个简单的记法来表达：

$$\{\{A\}\}(\{\{E\}\}q \wedge \{\{E\}\}r)$$

在左边的根部为真，在右边的根部为假。这是一个新的迫使模态词

> $\{\{E\}\}\phi$ 选手 E 有效力把博弈带入一个最后的或中间的状态集，且所有状态都证实命题 ϕ。

模仿/语言系列的这个新层次并不记录具体行为的路径（如同互模拟），但是它关注内部动态。且在我们的行为语言中新的模态词也有简单的递归定义：

$$\{\{E\}\}\phi \leftrightarrow \phi \vee (turn_E \wedge \langle E\rangle\{\{E\}\}\phi) \vee (turn_A \wedge [A]\{\{E\}\}\phi$$

对于这个新的语言，你可以寻找一个对应的互模拟。在这种情况下，基于 11.3 的一个简单变形就足够了：

仅仅只需去掉所有迫使集合由末端节点组成这一要求。

不变性和可定义性结果依然像前面那样。普遍有效性也与迫使的逻辑相似。但你得到下面两个有趣的新性质：

$\{\{E\}\}\{\{E\}\}\phi \rightarrow \{\{E\}\}\phi$	连续策略构成
$[A]\{\{E\}\}\phi \rightarrow \{\{E\}\}\phi$	一串回应对于任意移动的策略可以打在一起成为一个整体策略

但这里不是所有的都是常规的概括。一个有趣的尚未解决的问题是中间的迫使互模拟是否也可以用一种更接近于普通模态互模拟的方法来定义。你可根据界线通过一个能被选手迫使的博弈再阐述它，在另一边要求相似的界线。这个概念站在图论的观点看（[Wagner. 1970]）是自然的。下面是另一个尝试，在行为层次上它更接近于标准的互模拟。

离题讨论　选手依赖的互模拟

普通的互模拟不关注选手的转向。但假若我们用后者对得到下列精炼的概念作一个新的区分呢？如果它满足以下 Z 字形条件，则称一个关系 Z 为一个博弈互模拟：

(a) 每当 xZy，且在这两个状态中相同的选手都将移动，则要求通常的 Z 字形条件；

(b) 但当 E 将在 x 上且 A 将在 y 上移动时，那么，每当 $xR_a z$，则对所有 y 的后继者都有 zZu——且在另一方向反之亦然。

因此，当 E 开始某一策略可在 x 移动时，在 A 作出任何移动之后，她有类似的反应。这与中间效力互模拟并不是非常相称，看 11.1.2 的分配例子。在左边，A 可移动到一个 E 能迫使 q 或 r 的状态：但在右边没有这样的状态，因此连接后继者状态的任意方法一定出错。但上述概念似乎恰好是令人感兴趣的，特别是，它能被表明它与一种只允许形式模态词的模态语言相匹配

$$(turn_E \wedge \langle E\rangle\phi) \vee (turn_A \wedge [A]\phi)$$

且对另一个选手也是相似的。我们对这个分析不是完全满意的，但是把这一分析的进一步改进留给读者。

11.4.2　交替的互模拟

另一个中间博弈模仿开始于标准的进程等价，混合选择意识（互模拟）和输出的观点（有限的路径等价）。能够结合以上两个方面是利用下面的事实，即，我们能对两个选手作独立规定。直观地，我们不关心一个选手在她自己的“控制区”里作出的选择，但是当控制从一个选手转移到另一个选手时我们会特别关注。这表现在共同的思想里，不失一般性的，扩展博弈应该有一个选手不断转换的交替日程表。考虑一个从 11.1 改编的例子（图 11-7）：

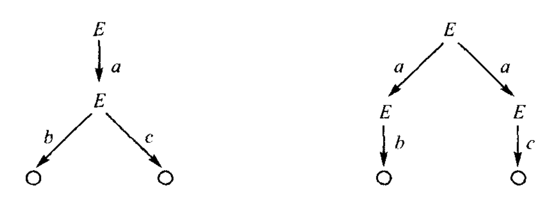


图 11-7

根据所能达到的情况，即使没有模态互模拟，只有有限的路径等价，选手 E 的选择在两个博弈里也是相同的。但如果选手 A 着手选择第二次移动，策略作用是相当不同的！

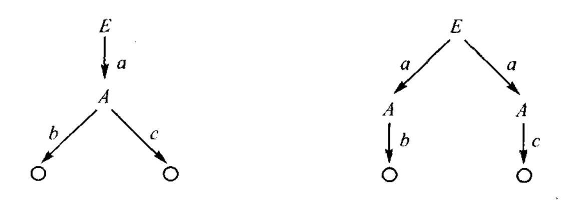


图 11-8

E 控制右边的结果，而 A 控制左边。两个博弈对可做如下区分。首先，把选手 i 的一个极大的移动定义为：

选手 i 沿着连续的转向的一个有限的移动序列，它或在终点结束，或是另一选手的一个状态转向处。

现在，像一个普通的模态互模拟一样定义一个交替互模拟，但其中 Z 字形条件只是关于极大的移动。

这样的博弈比较要比 11.3 中的那个比较更有识别力：

事实 4 一个有交替互模拟的博弈也有一个效力互模拟。

证明： 追踪两边的步骤可以得到结论。任何策略都可用上述定义中与那些相对应的组集来描述：实施某人移动的极大有限序列，对抗来自其对手的序列。■

反过来是不正确的，例如在 11.1.2 中两个非交替互模拟的分配博弈中，两个选手有着相等的效力。

这是 11.4.1 的一个反例。我们由表面上合理的博弈模仿开始——并且寻找一种特征语言。答案又是完全模态行为语言的一个片断。令 *switch* 是复合行为的普通名字，且 $MOVE_i$ 是选手 i 的所有移动的合并，考虑：

$$((turn_i)?;MOVE_i)^*;(end)?$$

$$((turn_i)?;MOVE_i)^*;(turn_j)? \quad j \text{是另一选手}$$

使用模态词 $\langle switch \rangle$ 相对的只是这些“转换关系”，就表达效力而言，我们能匹配交替的互模拟，获得类似前面的结果。

11.5 不完美信息

到目前为止所有结果只涉及行为—结果的博弈结构（“博弈形式”）。当面对现实博弈的一些更丰富更现实的特征时，这种方式又会怎样呢？以下部分提出两个挑战。首先，考虑不完美信息博弈，其选手不必知道他们在博弈树上的确切位置。这种情形发生在纸牌博弈、电子通信，以及涉及我们的记忆界限，或者观察力的现实生活中。像这样的博弈对于我们的方法是一个很好的测试（[van Benthem. 2001A]）。

11.5.1 在动态认知逻辑中的行为和知识

一个典型的博弈树在这个意义上扩展 11.2.1 的例子，以一条虚线表示选手 E 当转向到来时其位置的不确定性。

因此，她不知道由选手 A 实施的移动，对任何原因：

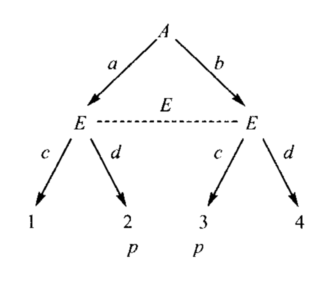


图 11-9

像这样的结构是更早类型的博弈模型，但现在有另外的不确定性关系

$$\sim_i$$

对于每个选手 i。在标准的认知逻辑意义上，我们在任意博弈状态 s 下都有，

$K_i\phi$　　选手 i 知道那些断言 ϕ 是真的

在每个状态 $\sim_i$ 不可区分于 s

因此，对于一个联合的动态认知语言我们可以建立模型。例如，A 在根部实施移动 c 后，在两个中间状态里，E 知道实施 a 或 b 将给她 p——因为析取式 $\langle a\rangle p \vee \langle b\rangle p$ 在两个中间状态下是真的：

$$K_E(\langle a\rangle p \vee \langle b\rangle p)$$

另一方面，E 不知道有具体的移动保证 p-结果——用公式的真值表示为

$$\neg K_E\langle a\rangle p \wedge \neg K_E\langle b\rangle p$$

因此，在“从言”的意义上 E 知道有一个保证 p 的策略，但在“从物”的意义上她不知道保证 p 的任何具体策略。这种细微的不同是一种典型的主体行为和认知语言。上述博弈的另一个新的方面是它的非确定性。在初始的博弈中 E 的实施“从选手 A 选择的相反方向”是保证结果 p 的一个策略——但现在不能再用了。因为，E 无法告诉我们条件是否成立！这里博弈理论家只接受统一策略，在不可区分的节点上描述同样的移动。但另一方面没有一个选手有赢的策略，当我们解释“p”为选手 E 赢的表述（因此$\neg p$ 就作为选手 A 赢）。选手 A 开始时没有赢的策略，尽管 E 现在已经失去了她赢的策略。

11.5.2 效力、知识和统一策略

你也可以更加粗糙地从结果的层面上看这些博弈。例如，根据可能的统一策略，我们的博弈与两个选手互换加上一些结果的博弈是结果等价的：

行为层次的正确语言是动态认知语言。因为它是两种标准模态语言的总和，其刻画互模拟是可预测的：

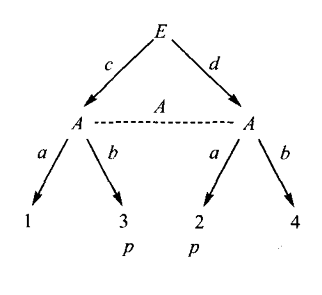


图 11-10

只需对两种类型的关系增加 Z 字形条件：行为移动，和不确定性跳跃。

对于效力，情况更加微妙（[van Benthem. 2001A]）。你可通过统一策略让迫使模态词适用于它们，并得到像 11.3 的那些结果。但是有更加有趣的选择。例如，你会认为，统一策略是选手*知道*他们有结果的那些普通策略。一个非常自然的形式化方法将使用认知算子结合 11.3 的普通策略模态词，允许我们表达

$K_i\{i\}\phi$　　i 知道，她有一个策略保证 ϕ，

$\{i\}K_i\phi$　　i 有一个策略使得她知道 ϕ。

在这个层次，我们能表达博弈实施的特殊认知族。下面的*完美记忆*的版本是一个好例子：

$K_i\{i\}\phi\rightarrow\{i\}K_i\phi$　　如果我知道我有一个策略到达 ϕ，那么我有一个策略使我知道 ϕ。

对这种语言适当的互模拟必须同时结合 11.3 的效力和 11.2 的行为思想，即"不确定性跳跃"。他们的公式化是明显的，且对于上述的语言来说，不变性和表现力结果也是显然的。

11.5.3　定义统一策略

这是统一策略的又一个有趣的认知特点。直观而言，尽管选手们不知道他们的精确位置，但在行为层次之下，那些知道他们移动的方法应当总其作用。根据计划，这包括行为条件的一个语法上的变化。下面的指示不再是足够好的：

如果条件 C 成立，那么实施 a

但下列的条件甚至对具有不确定性的选手也是有用的：

如果你*知道* C 成立，那么实施 a

因为我们从不怀疑我们的知识或无知——至少在通常的 **S5**-型认知博弈模型中是这样的。我们称这个特殊类型的情况是*认知安全的*。在有穷博弈里，假设我们用

一种也能看过去的双边模态语言来运行，那么对于先前的策略的可定义性而言，相应的有：

事实 5　在有限的不完美信息博弈中的统一策略，只需用认知安全的条件就能在带有过去算子的动态认知语言中精确地定义。

证明： 在这种有穷博弈里任意策略都可以用这种语言来定义的。现在只需注意，对于统一策略，“在” $\sim_i$-相关节点的某一极大集 X 里的一个统一的移动，包括一个形如 $K_i\delta_X$ 的条件，其中 δ_X 是 X 中所有节点唯一定义的析取。与 11.2.5 一样，一个类似的分析对互模拟收缩里的纯模态语言同样有效，只不过既根据行动又根据不确定性跳跃而已。 ■

因此，不完美信息不会使得模态逻辑和互模拟观点无效——但它确实提出了自己另外的问题。

11.6　偏好和期望

只有当选手对结果赋予价值且力争最大效用，或与博弈状态赋值相关的其他东西时，才真正进入的博弈论的高潮阶段。在某种程度上，其争论仍然是如何在逻辑里找到这个更加丰富设置的最佳模型[Osborne, et al. 1994; Battigalli et al. 1999; Board, 2001]。最简单的方式是在节点增加一串原子命题作价值判定，对所有东西都用 11.2 的模态动态语言编码。但这种没有遗漏的方法不强调智能主体的做法，他在状态间有偏好，且对博弈的将来路线有期望。

11.6.1　似乎合理性和期望，第一个版本

也许更加醒目的问题是期望——它在选手的理解行为中扮演一个重要的角色。收益和价值在背景中是重要的，因为在竞争或合作方式下，关于最大的价值，理性的选手有他们与假设一致的期望。期望通过具有相对似乎合理性的二元关系对每个选手 i 编码：

$s \leq_i t$　　i 认为状态 t 至少与状态 s 一样似乎合理的

在通常的反事实逻辑中，这些关系是三元的，因为随着某人的有利位置的比较，相对似乎合理性依赖于当前状态 x：$s \leq_{i,x} t$。那么你就能像给出的命题 ϕ 的条件信念一样定义算子 ψ：

$\mathfrak{M}, x \models B_i(\phi \mid \psi)$　　在所有多数 $\leq_{i,x}$-似乎合理的 ψ 状态中 ϕ 都为真

注意这是一个极大性原则，它在博弈论中反映了极大效用的典型用途。为了说明的目的，这里我们考虑一个更加简单的例子，关于下一个移动的期望。在那

个情况下，关系$\leqslant_i$指令当前的节点的后继者，且我们可以说i相信ϕ如果

$\mathfrak{M},x\models B_i\phi$　　在所有多数$\leqslant_{i,x}$-似乎合理的x的后继者中ϕ都为真

关于进一步的未来的信念可用这个单步信念模态的迭代来描述。更具体地，［de Bruin. 2000］告诉你如何能在一个框架里像这样定义逆向归纳路径，起源于理性的共同信念。因此，这种博弈理论模型自然支持信念和条件句语言，它的性质是相当好理解的。

这种新语言仍然承认*互模拟*分析。考虑存在的信念模态词关于下一个移动（通过一个关系$NEXT$考虑）：

$\mathfrak{M}, s\models\langle i\rangle\phi$　　存在一个t有$sNEXTt$且$\mathfrak{M}, s\models\phi$，
而对u没有$t<_iu$，$\mathfrak{M}, u\models\phi$

这是一个双量词条件——它出现在相应的互模拟的Z字形条件中：

*　从任意连接xZy开始。考虑x的一个$NEXT$后继者z，对于y必定存在相应的一个u是*极大的*。它仍然在相同的模仿步里——任意状态u'比u更加i-似乎合理的一定与某一状态z'比z更加i-似乎合理的是Z-连接的。

可选择地，我们能把两步分开，且通过分开模态词，采取一种稍微丰富些的语言处理后继者步和“似乎合理性跳跃”

$\langle NEXT\rangle$　一个标准的行为模态词

$\langle <_i\rangle$　　一个似乎合理性模态词：“在某一更好的状态”

因此，简单的似乎合理性概念和信念可通过像前面那样结合二元模态语言和他们的互模拟来处理。

11.6.2　似乎合理性和期望，以及语言再设计

真正的相对似乎合理性的三元关系会使事情变得更加复杂。例如，采取反事实类型的一个存在模态词：

$\mathfrak{M},s\models\langle\rangle(\phi,\psi)$　存在一个t有$\mathfrak{M}, t\models\phi$且$\mathfrak{M}, t\models\psi$
且没有u，$u<_st$，$\mathfrak{M}, u\models\psi$

像这样为含有极大算子的语言找刻画它的互模拟并不容易，因为我们正在结合二元和三元关系。一个类似的挑战是对于带有$UNTIL$算子的时序语言的互模拟（［Kurtonina, et al. 1997］）。这一问题通常通过下面的方法来解决，即，重新设计我们的语言以适应更加标准的互模拟。一种可能的方式是*二维的方法*，用互模拟联系单个状态，而且也联系状态的序对。参见［van Benthem. 1996］关于更丰富的同类例子，时序语言，和一阶逻辑的有穷的变元部分。但你也可挑选一个更加有用的二元模态词。例如，在前面基础上，下面一个小的变形就表现得相当好：

$\mathfrak{M}, s \models U(\phi, \psi)$ 存在一个 t 有 $\mathfrak{M}$，$t \models \phi$ 且对每个 u 都有 $u <_s t$，$\mathfrak{M}$，$u \models \psi$

这个模态词具有令人高兴的特征，诸如左边变目的分配性，和右边变目的单调性：

$$U(\phi_1 \vee \phi_2, \psi) \leftrightarrow U(\phi_1, \psi) \vee U(\phi_2, \psi)$$

$$U(\phi, \psi) \rightarrow U(\phi, \psi \vee \xi)$$

它通过 $U(\phi \wedge \psi, \neg\phi)$ 定义上面〈〉。也要注意这种语言可定义一个全局的存在模态词：

$U(\phi, T)$ ϕ 在某个点上是真的

对于这种语言的互模拟概念正如 11.6.1（*）中一样，但是在第二阶段选择更加合理的后继者还需要从最初的优势位置来看（图 11-11）。

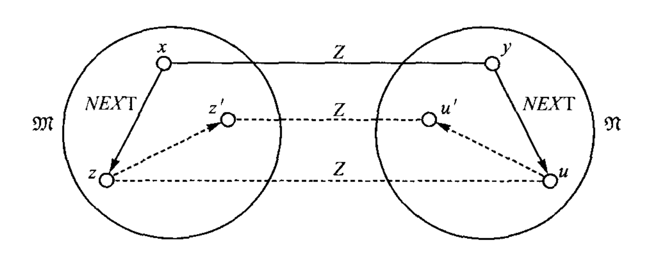


图 11-11

与前面一样，你可以用这些概念进行如下推理：

命题 2　对于有穷模型 $\mathfrak{M}$，x 和 $\mathfrak{N}$，y 下列是等价的：

（a）$\mathfrak{M}$，x 和 $\mathfrak{N}$，y 满足相同的公式；

（b）在 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{N}$ 之间 x 连接 y 存在一个互模拟。

证明：（b）⇒（a）是模态公式上的常规归纳。对于（a）⇒（b），通常，需要的互模拟是对于语言的模态等价关系，考虑后者类型的任意连接 xZy。令 z 是 $\mathfrak{M}$ 中的任意点。假设在 $\mathfrak{N}$ 中不存在相对应的点 u 满足我们的二种类 Z 字形条件。这可能是，对 $\mathfrak{N}$ 中的任意 u，有两个原因中的一个：

（a）z，u 不满足相同的模态公式；

（b）在 $\mathfrak{N}$ 中存在一个点 v 有 $v <_y u$ 同时在 $\mathfrak{M}$ 中没有相对应的点 w 有 $w <_x z$。在情形（a）中，在 z 中存在一个公式 ϕ_u 为真但在 u 中为假。因此，在 z 中所有这些公式 ϕ 的合取都成立。在情形（b）中，在 $\mathfrak{M}$ 中每个 w 有 $w <_x z$ 都满足某一公式 ψ_w 且在 v 中为假。因此，在 $\mathfrak{M}$ 中后者公式 ψ_v 的析取在所有 w 有 $w <_x z$ 里都成立。令 ψ 是所有这些公式的合取，且是所有的 v 举例证明例（b）的一个事件。把这两个东西放在一起，我们下列的语言公式在 $\mathfrak{M}$ 中的 x 下是真的：

$$U(\Phi,\Psi)$$

因为 y 与 x 一样满足相同的公式，在 $\mathfrak{N}$，y 中 $U(\Phi,\psi)$ 也成立。因此，在 $\mathfrak{N}$ 中存在某个 u 满足 Φ 使得所有 $v <_{y} u$ 满足 Φ。但这是相矛盾的！首先，这样的一个点 u 不是情形(a)的例证：否则，它的区分公式 z 将在 Φ 之列。但它也不是第二个例子的例证，因为更加合理的世界都满足 Ψ——且这排除了（b）型的一个模态区分。

因此在博弈里的偏好结构，和基于它之上的博弈论的极大性原则，使得模态逻辑更加复杂——但互模拟分析仍然可以运用，特别是当我们允许自己有一些语言设计的自由时。

11.7 结　论

我们的分析提出了两个主要的断言。第一，扩展博弈是自然进程模型，它支持许多熟悉的模态逻辑而不需要新的外来的形式；而且，互模拟分析，作为逻辑进程理论的检验证明，能应用到各种博弈结构中，并且似乎恰好为研究各种不同的博弈等价提供了正确的工具。这里我们为有穷的双人博弈表明了这点——但是无穷博弈也是可以做到的（[van Benthem. 1999-on ward; 2001B]）。就这个程度而言，你也可以用其方法把当代博弈论和进程逻辑联系在一起。我们的解释主要限于移动、策略和对博弈状态有命题注释的这些博弈形式。但理性主体间的许多相互作用的更深方面在这两个领域中也有同等的意义——包括诸如联合（[Pauly. 2001]），机制设计和行为进化等特征。

致谢

我要感谢德布朗（Boudewijn de Bruin），哈仁斯坦（Paul Harrenstein），黑特曼（Hanno Hildmann），泡利（Marc Pauly），罗德豪斯尔（Ben Rodenhäuser）和 JoLLI 杂志的两位匿名的审阅人给予各种帮助。

参 考 文 献

Aiello M, van Benthem J. 2001. Logical patterns in space. // Scotto di Luzio P, et al. eds. *Logic, Language and Diagrams*, Stanford: CSLI Publications.

Baltag A. 2000. Co-algebra and modal logic. Manuscript. Amsterdam: Centre for Mathematics and Computer Science.

Barwise J, Moss L. 1997. *Vicious Circles*. Stanford: CSLI Publications.

Battigalli P, Bonanno, G. 1999. Synchronic information, knowledge and common knowledge in exten-

sive games. *Research in Economics*, 53: 77 ~ 99.

Blackburn P, de Rijke M, Venema Y. 2001. *Modal Logic*. Cambridge: Cambridge University Press.

Board O. 2001. Dynamic reasoning about knowledge and belief. Paper presented at Italian Meeting on Game Theory and Its Applications, Ischia.

Bonanno G. 1993. The logical representation of extensive games. *International Journal of Game Theory*, 22: 153 ~ 169.

de Bruin B. 2000. Modeling knowledge in games. Topology and logic, Master's Thesis, ILLC, University of Amsterdam.

Goranko V. 2001. Coalition games and alternating temporal logics. // van Benthem J, ed. *Proceedings TARK* Siena: 259 ~ 272.

Halpern J. 2001. A computer scientist looks at game theory. Paper presented at Siena Summer School on Cognitive Processes and Rationality in Economics.

Harrenstein P. 2000. A modal interpretation of Nash equilibria and some related concepts. // Bonanno G, ed. *Proceedings LOFT-4*. Torino.

Kurtonina N, de Rijke M. 1997. Bisimulations for temporal logic. *Journal of Logic, Language and Information*, 6: 403 ~ 425.

Osborne M, Rubinstein A. 1994. *A Course in Game Theory*. Cambridge (Mass.): The MIT Press.

Parikh R. 1985. The logic of games and its applications. *Annals of Discrete Mathematics*, 24: 111 ~ 140.

Pauly M. 2001. *Logic for Social Software*. PhD thesis. ILLC, University of Amsterdam.

Rodenhäuser B. 2001. Updating epistemic uncertainty. Master's thesis. *ILLC, University of Amsterdam.*

Stalnaker R. 1999. Extensive and strategic form: games and models for games. *Research in Economics*, 53: 193 ~ 291.

Stirling C. 1999. Bisimulation, modal logic, and model checking games. *Logic Journal of the IGPL*, 7: 103 ~ 124.

van Benthem J. 1996. *Exploring Logical Dynamics*. Stanford: CSLI Publications.

van Benthem J. 1997. Dynamic bits and pieces. Tech Report LP-97-01. ILLC, University of Amsterdam.

van Benthem J. 1999. When are two games the same? ILLC, University of Amsterdam. Final version, 2002. Extensive games as process models. *Journal of Logic, Language and Information*, 11: 289 ~ 313

van Benthem. J. 1999-onward. *Logic in Games*. Electronic Lecture Notes. ILLC. University of Amsterdam.

van Benthem J. 2001A. Games in dynamic-epistemic logic, *Bulletin of Economic Research*, 53: 219 ~ 248.

van Benthem J. 2001B. Games over time. Manuscript, ILLC, University of Amsterdam.

van Benthem J. 2001C. Logic games are complete for game logics. *Tech Report*, *ILLC*, *University of Amsterdam*. Final version, 2003, *Studia Logica*, 75: 183 ~ 203.

van Benthem J, van Eijck J, Stebletsova V. 1994. Modal logic, transition systems and processes. *Journal of Logic and Computation*, 4: 811 ~ 855.

Wagner K. 1970. *Graphentheorie*. Mannheim: Bibliographisches Institut.

12 逻辑博弈对博弈逻辑是完全的*

刘奋荣/译　郭佳宏/校

12.1　逻辑赋值博弈

我们可以把许多逻辑概念很自然地看做是一种双人博弈。例如，维护方和反对方对一个陈述的论辩（洛伦岑博弈），人们对相似性进行模型比较（埃伦芬赫特 - 弗雷斯博弈）。也许更基本的是，在某种给定的情形下，对某一断定进行语义赋值。本文主要讨论后一种博弈，试图从中找到抽象的本质特征。在下文中，我们将采纳经典的博弈概念。*扩展型博弈*指的是下面的树型结构：它的节点是所有可能的博弈状态，加标的箭头从一个节点指向它的子节点，表示可能的移动。有两种类型的节点，一种是“在博弈中”的节点，表明轮到哪个玩家移动，另一种节点是结束点，说明博弈已经成功结束。但是，博弈也可能以“不成功”告终。譬如，当轮到某一玩家移动，但她却没有可行的策略。博弈的节点也可以包含更多的信息来表示博弈的其他属性，例如，在结束点玩家会赢或输，或更为详细的效益值的标记。下面我们将定义较为一般的行为模式。玩家 i 的*策略*是博弈树的一个子树，其中每次轮到 i 移动时，有唯一一个输出的移动，在其他节点，子树保持从原始博弈树带来的所有输出箭头。

12.1.1　一阶赋值博弈

下面考虑两个玩家争论一个公式在给定模型 $\mathfrak{M}$ 中是否为真的情况。这一过程从最基本的真值指派开始，即利用*指派* s 给变元指定论域中的一个对象。*证实者*（V）坚持说公式在 $\mathfrak{M}$，s 中是真的，*证伪者*（F）则说公式是假的。这种博

---

* Logic Games are Complete for Game Logics. *Studia Logica*, 2003, 75: 183 ~ 203.

弈 $eval(\phi, \mathfrak{M}, s)$ 的规则可以表述如下：

(a) 如果 ϕ 是原子公式，若 ϕ 是真的，V 赢，否则 F 赢

(b1) 对于公式 $\phi \vee \psi$，由 V 选择一个析取肢，博弈继续进行

(b2) 对于公式 $\phi \wedge \psi$，由 F 选择一个合取肢，博弈继续进行

(c) 对于否定式 $\neg \phi$，两个玩家交换角色

(d1) 对存在量化公式 $\exists x\psi$，V 在 $\mathfrak{M}$ 中挑一个对象 d，博弈继续，相对于 ψ 和新的指派 $s[x:=d]$

(d2) 对全称量化公式 $\forall x\psi$，F 在 $\mathfrak{M}$ 中挑一个对象 d，博弈继续，相对于 ψ 和新的指派 $s[x:=d]$

更精确地说，我们可以把赋值博弈归纳定义为一个博弈树。其中，节点是形如（t，ϕ）的序对，这里 t 是当下的指派，ψ 是公式的剩余部分以供博弈继续。

(a) $eval(Px, \mathfrak{M}, s)$ 有一个最上面的节点（t，Px）：由 V 先移动。如果 $\mathfrak{M}, s \models Px$，博弈转到一个结束点（$t$，$-$），$V$ 赢。否则，博弈在最上面的节点停止，出现“僵局”，V 输。

(b) $eval(\phi \vee \psi, \mathfrak{M}, s)$ 由两个部分博弈 $eval(\phi, \mathfrak{M}, s)$ 和 $eval(\psi, \mathfrak{M}, s)$ 构成，把它们分别放在最初的节点（s，$\phi \vee \psi$）之下，由 V 先移动。同时，用“向左”和“向右”的移动指向部分博弈的顶点。以同样的方式处理相对 F 而言的博弈 $eval(\phi \wedge \psi, \mathfrak{M}, s)$。

(c) $eval(\neg \phi, \mathfrak{M}, s)$ 是 $eval(\phi, \mathfrak{M}, s)$ 的对偶，后者互换玩家的博弈位置，调换输赢的标志。而且，在博弈节点上的公式取其对偶，即互换合取/析取，存在/全称量词和原子公式的正负值。

(d) $eval(\exists x\psi, \mathfrak{M}, s)$ 从最上面的节点开始，由 V 先移动，接着经可能的移动转到所有博弈 $eval(\psi, \mathfrak{M}, s[x:=d])$ 的顶点，这里的 d 可以是 $\mathfrak{M}$ 中的任意对象。博弈 $eval(\forall x\psi, \mathfrak{M}, s)$ 完全类似，只是由 F 的移动开始。

上面的定义只是一种可能的定义，它具有一些特别之处。例如，关于原子博弈的解释，为今后的便利我们采取了相当技术化的格式。而且，对于否定式的解释也在本质上不同于其他的句子，因为对偶可以剔除掉先前的信息，博弈（$\neg \phi$，$\mathfrak{M}$，s）不再是对到目前为止所玩博弈的精确记录。我们也可以给出其他不同的定义。但是，上面的这一定义足以满足目前的需要。

不考虑这里提到的格式方面的细节，一阶赋值博弈具有一般的博弈论特征。例如，最长的比赛具有固定的长度，它受限于初始公式的逻辑算子的深度。从而，这种博弈也满足策梅罗定理，即

对有穷树而言，完美信息下的双人零和博弈是可确定的，即其中一个玩家有总赢的策略。

这样，在赋值博弈中 V 或者 F 肯定有总赢的策略。这一观察结果是更为一般事实的一个特例。经典的一阶逻辑公式在一个模型中为真相当于说证实者在相关的博弈中确保能赢：

命题1　下面的两个断定是等价的：

(a) V 在 $eval(\phi, \mathfrak{M}, s)$ 中有总赢的策略；

(b) $\mathfrak{M}, s \models \phi$。

证明：证明很简单，可以施归纳于公式结构——捷径是施归纳于 F 的对偶断定上。例如，V 在对偶博弈 $\neg\psi$ 中有总赢的策略当且仅当 F 在 ψ 中有总赢的策略。另一个典型的例子是，V 在 $\phi \vee \psi$ 中有总赢的策略当且仅当她在子博弈之一中有总赢的策略，而 F 在 $\phi \vee \psi$ 中有总赢的策略当且仅当她在两个子博弈中都有总赢的策略。 ■

在此命题中，逻辑规律正好表示一些博弈论命题。譬如，确定性说的是排中律对博弈是有效的。我们将在下面回到这种对应的讨论中来。

12.1.2　模态博弈

赋值博弈也适用于在一阶逻辑中加入二阶量词或不动点算子扩展的情形（参见注释1）。它们也适用于弱一点的语言，例如，模态命题逻辑。我们将在下面引入，

命题字母 p，q，…，布尔算子和模态算子 $\Diamond$，$\Box$

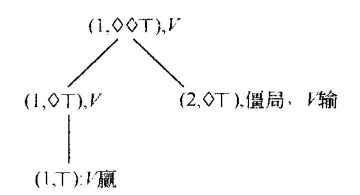
像上面一样，博弈的状态是一个序对 (s, ϕ)，s 是相关模型 $\mathfrak{M}$ 的一个状态，ϕ 是当下的模态公式。

关于模态词的新规则是：

(a) 在状态 $(s, \Diamond\phi)$，V 必须挑一个当下状态 s 的 R-后继 t，博弈在 (t, ϕ) 中继续。如果找不到 R-后继，则 V 输；

(b) 在状态 $(s, \Box\phi)$，F 必须挑一个当下状态 s 的 R-后继 t，博弈在 (t, ϕ) 中继续。如果找不到 R-后继，则 F 输。

模态词的作用类似于受限的量词公式 $\exists y(Rxy \wedge$ 和 $\forall y(Rxy \rightarrow$。它们的移动不同于那些在一阶博弈中的量词公式所对应的博弈，因为那里的博弈总是可以实施的。与此不同，模态博弈可能发生下面的情况：轮到玩家移动，但她却没有可行的策略。例如，一个模型有两个状态 $\{1, 2\}$，它们的关系是 $\{(1, 1), (1, 2)\}$。显然，在状态1，模态公式 $\Diamond\Diamond\top$ 成立。这是关于这个公式的博弈树：



V有总赢的策略，即使她在状态图12-1（2，◇⊤）上永远都不能移动。上面的命题对于一阶赋值博弈也成立（参见注释2）。

12.2　从逻辑博弈到博弈逻辑

逻辑博弈，尽管是为具体目标服务的，它还是有许多一般的博弈结构的性质。沿着这个思路，我们得到更为一般的博弈逻辑。此后，我们用数字1，2表示任意的博弈玩家，用字母i，j表示不同玩家的变元。

12.2.1　行为和效力

扩展型博弈能够记录所有可能的移动。但是上面的命题对博弈中玩家能否确保某种效果（譬如总赢的结果）产生的策略做了更为全局的陈述。试想玩家i的任意策略σ，我们把它看做是整个博弈的一个子树。这个策略能够使i确信，针对对手任一可能的行为，博弈会在子树的其中一个叶子上结束；对整个博弈来说，这意味着存在某个结果集O_σ。所有i的策略结果集簇决定了玩家在博弈中的"效力"：

$\rho_G^i s$，X　玩家i有一个玩博弈G的策略，从s出发，其结果集会包含在X中。

这些效力关系是互动的双-主体进程中一般化的转换关系，把状态和状态的集合联系起来，而不仅仅是状态和状态之间的联系。

对这样的状态-集合关系也可以做更为一般的定义。关于赋值博弈的命题把玩家在博弈中的效力与在模型$\mathfrak{M}$的状态s上的普通断定联系起来。后者可以看做是一个外在的博弈棋盘。而且，我们已经有一个明显的映射F从内在的博弈状态（s，ψ）到外在的棋盘状态s（参见注释3）。另外，给定任意这样的映射，我们可以在博弈棋盘上定义玩家的效力：

$\rho_M^i F(s), A$　　如果对某一博弈状态X且$F[X]\subseteq A$，$\rho_G^i s, X$成立

事实1　无论怎样定义，玩家的效力满足下面的三个性质：

（C1）如果$\rho_G^i s$，Y且$Y\subseteq Z$，那么$\rho_G^i s$，Z　　单调性

（C2）如果$\rho_G^i s$，Y且$\rho_G^j s$，Z，那么Y，Z重叠　　一致性

（C3）如果不是$\rho_G^i s$，Y，那么$\rho_G^j s$，$-Y$　　确定性

证明： C1 说的是大一点的集合代表弱一点的效力。C2 说的是，如果两个玩家根据他们的策略玩，博弈一定会有结果。C3 说的是关于确定性的一个具体性质，不过它具有抽象的集合论形式。■

12.2.2　博弈运算和代数

赋值博弈给出了基于博弈的几个一般运算。除了经典的布尔算子，我们有新的动态运算：

选择　对某一具体的玩家而言的选择。譬如，对玩家 1 来说，$G \cup H$ 是把两个分离的博弈 G 和 H 放在一个新的根节点下面，由 1 来选择首先玩哪一个。$G \cap H$ 表示类似的构造，但是相对于玩家 2 而言。

对偶　对偶 G^d 改变 G 中所有的机会和赢/输标记。

还有第三个作用在一阶赋值博弈上的博弈运算。我们不是在谈论早先的为量词挑选对象，那只是在特定语义结构中的具体移动，而是把量词粘在它的矩阵上的那种胶合：

组合　组合 G; H：首先玩 G，接着从第一个博弈成功结束的状态开始玩 H。

例如，一个模态公式 $\Diamond\Box p$ 是由三个博弈构成的："V 选一个后继"；"F 选一个后继"；"原子检验"。我们会在后面对此做更为精确的定义。

这些运算支持自然的博弈代数。例如，容易看出德摩根律在博弈解释下的直观有效性：

$$G \cap H = (G^d \cup H^d)^d$$

这只是博弈代数的许多规律中的其中一个，我们会在下文中对此做更为精确的表述。依据目前的分析我们可以说，谓词逻辑是序列博弈构造的一个一般理论，其中包括两个基本的基础博弈，即，挑选对象和事实验证。我们在后面会看到由此视角引发的一些惊人结论。

12.2.3　博弈语言

要更一般地研究上面的情境，我们采取［Parikh. 1985］提出来的观点，即基于命题动态逻辑模式。逻辑语言包括命题表达式 P 和博弈表达式 G，合式公式依据下面的语法规则形成：

$$P \qquad AtP \mid \vee \mid \wedge \mid \neg \mid \{G,i\}P$$
$$G \qquad AtG \mid \cup \mid \cap \mid {}^d \mid ; \mid P?$$

公式是由原子公式 p，q，…利用布尔算子，加上博弈模态词 $\{G,i\}P$ 构成的，

博弈模态词$\{G,i\}P$表示玩家有效力获得某一类型的结果状态。博弈表达式是由原子博弈g，h，…利用上面的算子构成，加上一个？的运算对命题进行“验证博弈”。此语言的第一个语义是这样定义的：博弈模型是这样的结构

$$\mathfrak{M} = (S, game, V)$$

其中S是状态的集合，函数$game(g, s)$给基本的博弈表达式在每个S的状态上指派具体的博弈，V对各个状态中的原子命题进行指派。上述语义一方面对命题做解释，同时也对任意的博弈表达式指派博弈，依据下面给定的运算：

$$\mathfrak{M}, s \models \phi \qquad game(G, s, \mathfrak{M})$$

唯一的两个非-常规的句子如下：

(a) $\mathfrak{M}, s \models \{G,i\}\phi$ 当且仅当 在$game(G, s, \mathfrak{M})$中i有一个策略可以获得结果x的集合，且$\mathfrak{M}$，$x \models \phi$；

(b) $game(\phi?, s, \mathfrak{M})$ 如果$\mathfrak{M}$，$s \models \phi$，它是玩家1实施的一个移动，到结束点，否则，它是玩家1的一个是“僵局”。

（注释5）。这种模型对许多目的而言还是太过详细。更为便利的第二种语义只看博弈-棋盘上的效力关系，在前面我们已用映射F把博弈状态定义到棋盘状态：

$\rho_G^{\mathfrak{M},i}$ s，X 如果，对于某个博弈状态集A，$\rho^i_{game(G,s,\mathfrak{M})}$ s，A $\wedge$ F[X] $\subseteq$ A

事实2 这样的效力关系满足下面的归纳句子

$\rho^1_{G\cup H}$ s，Y 当且仅当 ρ^1_G s，Y 或 ρ^1_H s，Y

$\rho^2_{G\cap H}$ s，Y 当且仅当 ρ^2_G s，Y 且 ρ^2_H s，Y

$\rho^1_{G^d}$ s，Y 当且仅当 ρ^2_G s，Y

$\rho^2_{G^d}$ s，Y 当且仅当 ρ^1_G s，Y

$\rho^1_{G;H}$ s，Y 当且仅当 存在Z：ρ^1_G s，Z $\wedge \forall z \in$ Z：ρ^1_H z，Y

$\rho^2_{G;H}$ s，Y 当且仅当 存在Z：ρ^2_G s，Z $\wedge \forall z \in$ Z：ρ^2_H z，Y

证明：实际上，上述归纳句子的意思已经十分明确。我们只看关于组合的情况。假定$\rho^1_{G;H}$ s，Y。这意味着在博弈$game(G;H, s, \mathfrak{M})$中玩家1能够促使结果集$A$产生且$F[A] \subseteq Y$——假设它是利用策略$\sigma$获得的。在$s$实施$\sigma|G$，即，把$\sigma$限制到$G$上的策略能够保证得到一个结果位置的集合$U$。从这些点出发，剩下的策略$\sigma|H$促使某个$A$的子集产生。但是，$F[U]$是所求的集合$Z$。对每个状态$z \in Z$，根据单调性我们可以得到$\rho^1_H z$，$Z$。反过来，令$\exists Z$：$\rho^1_G s$，$Z \wedge \forall z \in Z$：$\rho^1_H z$，$Y$。玩家1有策略$\sigma$玩$game(G, s, \mathfrak{M})$促使结果集$A$产生且$F[A] \subseteq Z$。根据第二个合取肢，在每个$game(H, z, \mathfrak{M})$中，玩家1有策略$\tau_z$促使集合$B_z$产生且$F[B_z] \subseteq Y$。$\sigma$和所有$\tau_z$的组合就是一个玩$G;H$的策略，它能够促使一个结果集产生，这一结果集通过$F$映射到$Y$中。 ■

对于确定的博弈，我们只需说明玩家 1 的效力：

$\rho_{G\cup H}\ s,\ Y$　当且仅当　$\rho_G\ s,\ Y$ 或 $\rho_H\ s,\ Y$

$\rho_{G^d}\ s,\ Y$　当且仅当　$\neg\rho_G\ s,\ S-Y$

$\rho_{G;H}\ s,\ Y$　当且仅当　$\exists Z:\ \rho_G\ s,\ Z\wedge\forall z\in Z:\ \rho_H\ z,\ Y$

12.2.4　在博弈棋盘上的逻辑

我们现在定义本文的最后一种博弈模型，它是下面的结构

$$\mathfrak{M}=(S,\{\rho_g\mid g\in BG\},V)$$

其中 S 是状态集，V 是对命题字母的赋值，BG 是基本博弈的集合，它们的效力关系 ρ_g 已经蕴涵在博弈棋盘的结构中了。在 12.2.1 的三个条件中，我们要求其中一个成立：即，向上的单调性（C1）——其他两个可以从博弈的确定性中自动推出。而且，我们利用上面的归纳句子定义所有博弈的效力关系。这样，博弈语义看起来像是动态逻辑的语义，下面是两个具体的句子：

(a) $\mathfrak{M},\ s\models\{G,i\}\phi$　当且仅当　$\exists X:\ \rho_G^{\ i,\mathfrak{M}}\ s,\ X$ 并且 $\forall x\in X:\ \mathfrak{M},\ x\models\phi$；

(b) $\rho_{\phi?}^{\ i,\mathfrak{M}}s,\ Y$　　当且仅当 $\mathfrak{M},\ s\models\phi$ 且 $s\in Y$。

此后我们将省略 i，在确定的博弈中只标明其中一个玩家的行为。

赋值博弈为我们提供了一个具体的实例。在一阶结构中，博弈棋盘要给变元指派论域中的个体。在两个基本博弈中，证实者的效力关系分别是：

$\rho^V_{Px}\ s,\ X$　当且仅当 $P^{\mathfrak{M}}(s(x))=1$ 且 $s\in X$

$\rho^V_{\exists x}\ s,\ X$　当且仅当 对在 $|\mathfrak{M}|$ 中的某个 d，$s[x:=d]\ \in X$

前面的归纳句子可以定义所有的复杂公式。模态博弈以模态模型本身作为它的棋盘，基本效力关系被定义为：

$\rho^V_p\ s,\ X$　当且仅当 $V(p,s)=1$ 且 $s\in X$

$\rho^V_{\Diamond}s,\ X$　当且仅当 存在 t，Rst，且 $t\in X$

由这种一般的语义得到的系统称为动态博弈逻辑（*DGL*），参见 [Parikh. 1985；Pauly. 2001]。关于这个逻辑的一个基本结果是：

定理 1　*DGL* 是可判定的，它的有效式可以被公理化为

(a) 命题逻辑的所有有效式：包括公理和推理规则；

(b) 单调性：如果 $\phi\to\psi$ 是可证的，那么 $\{G\}\phi\to\{G\}\psi$ 也是可证的。

(c) 在组合博弈中对策略存在性的归约规则：

$\{G;H\}\phi\ \leftrightarrow\ \{G\}\{H\}\phi$

$\{G\cup H\}\phi\leftrightarrow\ \{G\}\phi\vee\{H\}\phi$

$$\{G^d\}\phi \quad \leftrightarrow \neg\{G\}\neg\phi$$
$$\{P?\}\phi \quad \leftrightarrow P\wedge\phi$$

这些公理是关于博弈中效力的基本推理（参见注释 6）。例如，它们是对 12.1 中的赋值博弈命题的证明的形式化。归纳步骤可以依据上面的公理得到，基本步骤则恰好是在原子博弈中对玩家赢这一谓词的定义。

如果假设博弈不是确定的，我们也可以给出类似的 *DGL* 的公理。不同的是，我们需要使用两个模态词 $\{G, 1\}\phi$，$\{G, 2\}\phi$，像前面一样对两个玩家的效力关系加以定义。

12.2.5　博弈代数

DGL 也可以表达关于两个博弈等价的概念，通过说明断定 $\{G\}p\leftrightarrow\{H\}p$ 的有效性。这说的是，对于两个玩家来说，博弈 G 和 H 的效力关系 $\rho_G{}^{i,\mathfrak{M}}$ 在每一博弈棋盘 $\mathfrak{M}$ 上都是相同的。等价的概念可以从不同的背景来论证。由它可以得到一个博弈等价的代数，其公理化见［van Benthem. 2001］中最初的猜想。下面的结果来自于［Goranko. 2000，Venema. 2001］，为方便起见，我们省略验证博弈：

定理 2　博弈代数是由下面的规则完全公理化的：

（1）对于选择和对偶的德摩根代数（参见注释 7）

（2）$G;(G';G'') = (G;G');G''$　结合律

$(G\vee G');G'' = (G;G'')\cup(G;G')$　左分配律

$(G;G')^d = G^d;G'^d$　对偶化

（3）$G\leqslant G' \rightarrow H;G\leqslant H;G'$　右单调性

通常，组合对选择的右分配律不成立：

$$G;(H\cup K) = (G;H)\cup(G;K)$$

在左边，玩家 1 可以选择 H 或 K，但这对右边不成立，因为右边可能要用到 G 的性质。至于跟前面博弈逻辑的联系，所有这些代数公理都可以从 *DGL* 的公理中推导出来。

12.3　从效力到赋值博弈

在 12.2 中，博弈棋盘和效力关系是作为赋值博弈的一般化加以介绍的，重点在于得到一般的博弈逻辑和博弈代数。现在，我们开始考虑另一个方向，表明这些一般的结构早已存在于赋值博弈中了。

12.3.1　一个简单表示结果

下面的内容不是完全必要的，但是它可以帮助理解我们的方法。确定的双人博弈给玩家 i 指派效力 P_i 的簇，它满足 12.2.1 中的约束条件：

（C1）如果 $Y \in P_i$ 且 $Y \subseteq Z$，那么 $Z \in P_i$；

（C2）如果 $Y \in P_i$ 且 $Z \in P_j$，那么 Y，Z 重叠；

（C3）如果 $Y \notin P_i$，那么 $S - Y \in P_j$。

在目前的情形下，这些条件一定成立。请看下面的命题：

命题 2　由集合 S 的子集构成的任意两个簇 P_1 和 P_2，如果它们满足上面的三个条件，那么它们一定是某个双步博弈的根节点的效力集。

证明： 由玩家 1 开始，她可以选择 P_1 中的集合。在这些节点，玩家 2 接着移动，挑选那个集合的任意元素。显然，1 的效力已经体现在 P_1 中。现在看玩家 2，在刚刚定义的博弈中，她可以促使任意的结果集产生，使得它与 P_1 中的每个集合重叠。但是根据（C2）、（C3），这些恰好是在最初的簇 P_2 中的那些集合。例如，如果结果集 A 与 P_1 中所有的集合重叠，她的补 S-A 不能在那个簇中，因此，根据（C3），集合 A 本身在 P_2 中。 ■

上述命题表明，我们能够在博弈树的不同结束点上获得相同的结果。这里我们又看到了博弈-棋盘的一些味道，存在一个恒等映射。如果想要在博弈的每个枝上都得到唯一的结果，我们需要强化条件（C2），使得它既充分又必要：

（$C2^+$）如果 $Y \in P_i$ 且 $Z \in P_j$，那么 Y，Z 只在一个点上重叠。

12.3.2　效力的模态表示

从效力的角度看，一般的博弈仍然很接近逻辑的赋值博弈。这样，基本的博弈代数与谓词逻辑，甚至和命题模态逻辑的赋值博弈代数也恰好一致。下面的分析受到了 [Parikh. 1985] 的启发，是 [van Benthem. 2000B] 的简化形式。给定任意的博弈棋盘 $\mathfrak{M} = (S, \{\rho_g \mid g \in BG\}, V)$，定义相关的标准的模态模型如下：

$$\mathfrak{M}^* = (S \cup POW(S), \{R_g \mid g \in BG\}, V)$$

它的状态是 $\mathfrak{M}$ 的所有状态加上这些状态构成的所有集合。对象 s 和对象集合 X 之间的二元关系 R_g 成立，当且仅当 $\rho_g s$，X 在 $\mathfrak{M}$ 中成立。二元关系 $\in$ 是标准的集合隶属关系。根据赋值 V 命题字母在状态 s 上为真当且仅当它们在 $\mathfrak{M}$ 中为真。我们可以把 $\mathfrak{M}^*$ 看做 $\mathfrak{M}$ 的双-种类的一阶形式。

接下来，我们定义翻译 t，它把（a）DGL 的公式 ϕ 翻译为模态公式 $t(\phi)$，而且（b）DGL 的博弈表达式 G 翻译到 $t(G)$，其原子公式是模态赋值博弈。后者可以

看做是一般化的赋值博弈。下面将用模态词 [∋] 表示当前对象的所有元素。

$$
\begin{aligned}
t(p) &= p \\
t(\neg\phi) &= \neg t(\phi) \\
t(\phi \vee \psi) &= t(\phi) \vee t(\psi) \\
t(\{g\}\phi) &= \langle g\rangle[\ni]t(\phi) \\
t(\{G\cup H\}\phi) &= t(\{G\})\phi \vee t(\{H\}\phi) \\
t(\{G^d\}\phi) &= \neg t(\{G\}\neg\phi) \\
t(\{G;H\}\phi) &= t(\{G\}\{H\}\phi) \\
t(g) &= \langle g\rangle[\ni] \\
t(G\cup H) &= t(G)\cup t(H) \\
t(G^d) &= t(G)^d \\
t(G;H) &= t(G);t(H)
\end{aligned}
$$

使用简单的归纳即可看出这个翻译可行的原因：

命题 3 下面的两个断定是等价的。其中，一个是对所有的 *DGL* 公式而言的，一个是对博弈表达式 G 而言的：

(a) $\mathfrak{M}, s \models \phi$　　　(a′) $\mathfrak{M}^*, s \models t(\phi)$

(b) $\rho_G^{i,\mathfrak{M}} s, X$　　　(b′) $\rho_{t(G)}^{i,\mathfrak{M}} s, X$

证明：问题的核心是要理解一个事实，它反映了 12.3.1 中的那个简单表示。博弈的效力关系正好与相关的赋值博弈的效力相同。假设 $\rho_G^{i,\mathfrak{M}} s, X$，那么证实者可以在对 $\langle g\rangle[\ni]$ 的博弈中选择 X，然后，证伪者的每一步移动都会给出集合 X 中的一个对象 x。因此，X 是赋值博弈中 V 的效力。反过来，如果 X 是赋值博弈中 V 的效力，那么存在 s 的 R_g-后继，其元素都在 X 中。根据单调性，我们可以得到 $\rho_G^{i,\mathfrak{M}} s, X$。■

实际上，这不仅适用于模态前缀 $\langle g\rangle[\ni]$ 的情况，对于完全的模态公式 $\langle g\rangle[\ni]\top$ 我们也可以在博弈 $t(G)$ 中得到类似的结果。这里，$\top$ 表示博弈总能成功。下面是关于模态归约的进一步结论。

命题 4 对任意的博弈表达式 G 和模态效力公式 ϕ，给定模型 $\mathfrak{M}^*$ 中的任意状态 s 中的任意解释，下面的等式一定成立：

$$eval(t(\{G\})\phi) = t(G); eval(t(\phi))$$

证明：使用归纳证明。我们只证两种情形。

(a)
$$
\begin{aligned}
eval(t(\{g\})\phi) &= eval(\langle g\rangle[\ni]t(\phi)) \\
&= t(g); eval(t(\phi))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(b)\, eval(t(\{G;H\})\phi) &= eval(t(\{G\}\{H\})\phi) \\
&= t(G);(t(H);eval(t(\phi))) \\
&= (t(G);(t(H));eval(t(\phi)) \\
&= t(G;\ H);eval(t(\phi))
\end{aligned}
$$
■

最后，我们看一种考虑后一类博弈的不同想法：它混淆了公式和赋值博弈，但是没有什么不好的影响：

命题 5　$t(G);\ eval(t(\phi))$是下面公式的模态赋值博弈，即，在博弈表达式$t(G)$中，把ϕ贴到原子博弈$\langle g\rangle[\ni]$的所有"最终出现"之后。

证明：这一命题可以根据下面的博弈代数有效式加以证明：

$$
\begin{aligned}
(G\cup H);K &= (G;\ K)\cup(H;\ K) \\
(G;\ H);K &= G;(H;\ K) \\
(G^d);H &= (G;\ H^d)^d
\end{aligned}
$$
■

12.3.3　一般的博弈代数是赋值博弈的代数

前面的简化表明了如何能够把博弈逻辑和博弈代数的模型看做是标准的模态语言和它的赋值博弈的模型。这一观点导出了下面的重要结论，也是本文的主要结果——这受到了［Visser. 1995］中的动态谓词逻辑分析的启发（参见注释 8）

定理 3　下面的两个断定对于任意的两个博弈表达式G，H是等价的

（a）$G=H$在一般的博弈代数中是有效的

（b）$G=H$在模态赋值博弈的代数中是有效的

证明：从（a）到（b）是显然的。从（b）到（a），假设G和H的解释在博弈棋盘上具有不同的迫使关系。那么，在某一状态s它们有不同的效力，不妨设$\rho_G^{\mathfrak{M}}s,\ X$但是并非$\rho_H^{\mathfrak{M}}s,\ X$。取一个新的命题字母$p$，它只在$X$中为真。根据这个赋值，$\mathfrak{M},\ s\models\{G\}p$但是并非$\mathfrak{M},\ s\models\{H\}p$。像在 12.3.2 中，存在两个模态赋值博弈，它们恰好包含与G和H相同的运算结构——具有合适的模态词和命题字母来形成原子公式——这对于模型$\mathfrak{M}^*$的博弈棋盘是不同的。■

这里想要说明的是，非常特殊的一类逻辑博弈的博弈代数是十分丰富的，它们足以展示一般博弈代数的所有结构特征。这也说明逻辑赋值博弈在一般博弈逻辑中具有举足轻重的地位。

同样，我们可以得到下面的关于博弈逻辑的模态嵌入的类似的结论。

事实 3　对于任意的模态效力公式而言，如果它在抽象博弈中是可证伪的，那么它在一阶逻辑赋值博弈的棋盘上也可以被证伪。

原因在于，上面的归纳同样适用于博弈逻辑的模型——参见［Parikh. 1985］中有关与μ-演算联系的论述。

12.3.4　与一阶博弈的联系

在本文早期的版本（［van Benthem. 2000B］）中，我们提出了一种复杂的构造，把博弈代数的不成立的等价式与一阶赋值博弈的不成立的等价式联系起来。我们现在对此进行逐步的分析。首先，12.3.3 中的模态表示需要提升为一阶表示。那么，模态命题公式 ϕ 可以被翻译成一阶语言公式，量词的域是所有的状态，模态词成为受限的量词：

$$\Diamond p \text{ 成为 } \exists y \cdot Rxy\text{：}Py$$

$$\Box p \text{ 成为 } \forall y \cdot Rxy\text{：}Py$$

这一翻译适用于真值的层次。但是两类赋值博弈是不同的（参见 12.1）。对模态词的博弈或许会导致僵局，而对量词的博弈总能成功。这一区别可以从对 $\Diamond p$ 和 $\exists y(Rxy \wedge Py)$ 的博弈中看出（注释 9）。但是如果考虑任意状态 s 的效力关系，两者没有什么区别。在对 $\Diamond p$ 的模态博弈中，证实者可以迫使集合 X 产生，其包含 s 的 R-后继 t，其满足 p。同样地，在对 $\exists y(Rxy \wedge Py)$ 的一阶博弈中，证实者可以迫使那些变元指派集产生，其包含 s 的一个变形 $s[y:=d]$ 使得 $Rs(x)d$ 和 Pd 都成立。这似乎表明我们可以做下面的形式简化。我们把上面的模型 $\mathfrak{M}^*$ 中的模态反例翻译成博弈棋盘上的一阶赋值博弈，它的状态集是

对两个变元 x 和 y 的 S^*-对象的指派

原子博弈不是被$\langle g\rangle[\ni]$，而是被下面的博弈所替换，

$$\exists y;\ Rxy;\ \forall x;\ x \in y$$

这使得所有的状态-转换行为在 x-自变元中实现。

推论　一阶赋值博弈对于博弈代数是完全的。

（注释 10，11）

12.4　经典逻辑可以看做是博弈逻辑

与博弈的联系并非只是重新解释现有的逻辑系统，它也为我们提供了看待逻辑结构的新视角。赋值博弈是一阶逻辑的一种新语义，比传统的真值语义或指派集具有更为丰富的外延。——这也许对命题的更为内涵的理论有用（注释 12）。这是看待一阶逻辑不同的一种哲学视角。如果把公式看做是赋值博弈，那么塔斯基语义的关键成分就是其动态的程序。从最简单的原子事实验证和为量词挑选对

象开始。进一步的博弈运算构造更为复杂的程序，例如，选择和对偶（布尔结构）和序列组合（介于量词符与紧随其后的公式之间隐藏的结构）。这改变了我们对逻辑有效性的一贯看法，因为经典的一阶逻辑现在成为两种事物的混合：在特定模型上具体的语义运算，加上一般的博弈结构，后者对很多其他的语义行为的基本集都有意义。

更为技术地说，在标准的谓词逻辑中，逻辑常项（命题连结词和量词）的意义是固定的，其他表达式的所指随着定义域和谓词的不同而变化。但是在新的视角下，量词符号是可以改变的，可以被任意的博弈表达式所代替，例如，一阶分配律

$$\exists x\ (Px \vee Qx) \leftrightarrow \exists xPx \vee \exists xQx$$

在更严格的意义上说不是有效的，——只要用“$\forall x$”替换“$\exists x$”我们就得到一个反例。因此，如果我们不考虑更细致的结构，经典的一阶逻辑有效律至少有下面三个不同的层次：

（a）博弈代数的一般规律。

这些规律在用具体博弈替换量词符，用具体的陈述替换原子子公式之后仍然成立。这可以看做是一阶逻辑的博弈论核心，是*可判定的*——因为它们的动态博弈逻辑的母系统是可判定的。

（b）特殊的规律但能展示一般的博弈论性质。

例如，我们刚刚提到的存在量词对析取式的*右分配律*。在一般的博弈代数中它不是有效的——但是对很大的一类博弈它仍然可以成立，即，“分配博弈”，其中证实者可以迫使得到一个单元素的结果集。

（c）原子博弈的特质。

例如，量词和原子事实博弈的*幂等性*：其满足 $G;\ G = G$。这表现了以上三个层次之间的互动，它导致了经典一阶逻辑的不可判定性——也许，一个博弈论的“解构”可以帮助我们更好地理解这一现象。

12.5　扩　　展

借助基本的序列运算，可以看出，逻辑赋值博弈对博弈逻辑是完全普遍的——至少，在玩家效力的全局层面上讲（注释 13）。但是，这一观察普遍的程度到底有多大？能否做直接的推广，譬如，加入“空闲博弈” ⊤？或加入任意的验证博弈？更具挑战性的扩张还有很多种。首先，存在更强的序列运算，像我们在不动点语言的赋值博弈中看到的模态 μ-演算。如[Parikh. 1985；Pauly. 2001]中不受限的博弈叠置，那里玩家可能会开展博弈的有穷多个新拷贝。对这种情况，是否存在完全的博弈代数仍然是一个开放的问题。[Berwanger &

Grädel. 2002] 表明如何把任意的μ-演算赋值博弈解释为动态的博弈逻辑，这似乎说明基本的博弈代数加上克里尼迭代是很有力的工具。不动点博弈可能会出现无穷运转的合理结果，这是对我们分析的另一挑战。

另一种扩展是并行博弈组合，允许有同步进行的博弈。我们知道，在模态或一阶语言中我们无法表达这一现象，我们也许需要更为复杂的语言。此外，有一些博弈算子只存在于无穷博弈中（参见 [Abramsky. 1996; Hodges. 1998]）。特别地，我们需要进一步理解本文讨论的动态视角与线性逻辑博弈之间的密切关系（参见 [Abramsky. 1997]）。

最后，实际的博弈论中充斥着非-确定的博弈，例如，纸牌博弈，或现实生活的决策问题——玩家不一定知道他们处在扩展型博弈树的哪个位置。我们给出的一般定义可以解释这种现象，但是问题是，有没有特定的一类逻辑博弈？非-确定性的一个典型源泉是不完美信息（[van Benthem. 2001]）。这正是 [Hintikka & Sandu. 1997] 中 IF-博弈的要点。对本文的结果加以扩展将会使 IF-博弈成为体现不完美信息的基本博弈论的“普遍格式”。在附录中我们会对此继续进行讨论，因为我们不希望只是空洞地重复一个美好的意愿。

12.6 尾声：乘积博弈

下面，我们仅仅讨论并行博弈运算的一个方面—— [Abramsky. 1996; 1997] 通过线性逻辑作了更为系统的探讨。在博弈论中，矩阵博弈实际上比本文讨论的扩展型博弈更有名，

		玩家 1	
		a	b
玩家 2	c	1	2
	d	3	4

上面的矩阵表示两个玩家并行移动，有四种可能的结果。实际上，类似的现象偶尔也出现在逻辑当中。例如，所谓的“分枝量化”，它具有以下的二维模式

$$\begin{matrix} \forall x \exists y & \searrow & \\ & & Rxyzu \\ \forall z \exists u & \nearrow & \end{matrix}$$

先使对前缀部分的选择独立进行——等它们结束后把结果放到一起再对$Rxyzu$赋值。这种博弈包含着不完美信息：一个玩家在移动的同时不知道其他玩家的动作。这一博弈运算可以更一般地定义为

乘积 $G \times H$

它的运行是由两个单独的博弈 G 和 H 的运行构成的一个序对，G 和 H 各自的结束状态的乘积是整个博弈的结束状态。用效力的术语说，这就是：

$$\rho^i_{G\times H}(s,t)\ X \text{ 当且仅当 } \exists U{:}\rho^i_G\ s,U,\ \exists V{:}\ \rho^i_H\ t,V{:}\ U\times V\subseteq X$$

如果玩家得知在两个博弈中早先的移动，上面的等价式不再成立——这为乘积博弈定义了一个更为丰富的策略空间（注释 14）。玩家在博弈 $G\times H$ 中的效力不再是确定的，但是它们仍然满足条件 C1 和 C2。我们甚至可以得到类似 12.3.1 的结果：

事实 4　单调性和一致性刻画了乘积博弈的效力。

证明：［van Benthem. 2001］证明了这些条件对于双步不完美信息博弈中玩家的效力是充分而必要的。但是，事实上，在［van Benthem. 2001］中的表示方式直接产生了上面的这类乘积博弈！ ■

如果我们希望结果是唯一的，像在矩阵博弈中做的那样，我们需要强化一致性条件以确保两个玩家的效力的交集是单元素集。我们可以考虑没有确定性的情形，那样可以提供更多的灵活性以模拟部分互动的主体的行为（注释 15）。

接下来，关于在效力模型上的博弈代数，下面我们只写出几个有效规律。

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$
$$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$$
$$(A\times B)^d\quad =A^d\times B^d$$

在有穷博弈的直积中，这些规律帮助我们计算玩家所有的效力。× 和序列组合运算；之间似乎没有十分重要的交互规律——这也反映了迭代博弈的复杂性。

开放的问题　对带乘积的完全博弈代数如何进行公理化。

同样，这样的博弈代数存在于带博弈迫使模态词的更为丰富的语言中。要表述乘积结果的一些基本问题，我们需要引进一些关于状态组合的谓词 $Cx,\ yz$，它说得是"x 是 y 和 z 的序对"。对于状态的序对也有一些辅助的乘积模态词：

$$\mathfrak{M},s\models\ \diamond\phi\psi \quad \text{当且仅当 } \exists y,z{:}C\ s,yz\wedge\mathfrak{M},y\models\phi\wedge\mathfrak{M},z\models\psi$$

$$\mathfrak{M},s\models\ \diamond_l\phi \quad \text{当且仅当 } \exists y,z{:}C\ y,sz\wedge\mathfrak{M},y\models\phi\wedge\mathfrak{M},z\models\top$$

$$\mathfrak{M},s\models\ \diamond_r\phi \quad \text{当且仅当 } \exists y,z{:}C\ y,zs\wedge\mathfrak{M},y\models\phi\wedge\mathfrak{M},z\models\top$$

不考虑确定性的情况下，模态博弈逻辑需要一个模态算子 $\{G,\ i\}\phi$ 来标明哪个玩家在移动。它的有效规律包括，例如

$$\{G,i\}\phi\wedge\{H,i\}\psi\rightarrow\{G\times H,i\}\diamond\phi\psi$$

$$\{G\times H,i\}\phi\qquad\rightarrow\{G,i\}\diamond_l\phi\wedge\{H,i\}\diamond_r\phi$$

像在前面的情况，这不是乘积模态的一种自动归约。我们没有等价式 $\{G\times H\}\phi\leftrightarrow\{G\}\langle L\rangle\phi\wedge\{H\}\langle T\rangle\psi$。代数规律的推导并不是显然的，也不是完全的。

最后，我们可以把逻辑博弈看做是表示一般的乘积博弈的一个候选者。玩赋值博弈 $\phi\times\psi$ 是什么意思？想想上面提到的分支量词博弈。IF 逻辑([Hintikka & Sandu. 1997])是一般化的一阶逻辑，可以考虑意义的这种类型，通过一个“斜线公式”：

$$\forall x\exists y\forall z/\{x,y\}\exists u/\{x,y\}\ Rxyzu$$

它压缩了两个前缀之间的所有信息流动。(注释 16) 如果采用我们的博弈代数语言的话，可以写成如下这种形式：

$$(\forall x;\ \exists y)\times(\forall z;\ \exists u));Rxyzu\ ?$$

像经典的一阶逻辑一样，IF 逻辑是一般的博弈代数和语义程序的具体事实的一个混合。博弈-代数规律具有 IF-特例，允许我们改变量词的前缀，譬如

$(\forall x;\exists y)\times((\forall z;\forall u)\cup(\exists v;\exists u))=(\forall x;\exists y)\times(\forall z;\forall u)\cup(\forall x;\exists y)\times(\exists v;\exists u)$

而且，IF 逻辑有效的规律也可以看做是代数的有效式，例如，下面的量词交换律是有效的（[van Benthem. 2000A]）：

$$\forall x\exists y/x\ Rxy\leftrightarrow\exists y\forall x/y\ Rxy$$

用博弈-代数的术语可以表示为，

$$(G\times H)\ ;\ K=(H\times G)\ ;\ K$$

这一规律没有出现在我们前面的列表中。它的核心是 $G\times H=H\times G$，这等于状态乘积的交换律：这意味着，序对中组合的顺序无关紧要。但是，IF 逻辑也发现了一些无效的代数规律。这里是一个在一般博弈中可被反驳的例子：

$$(A\times B)\ ;\ C=(A;\ C)\times(B;\ C)$$

一个 IF-反例是 $\exists x\forall y/x\ Rxy$，它的赋值博弈不同于对公式 $\exists x\ Rxy\times\forall y\ Rxy$ 的赋值博弈。总之，对于乘积博弈，我们可以采取之前对序列博弈的分析方法对其进行分析——但是，对完全性结果和表示结果的扩展并没有那么简单。

12.7 注　　释

(1) 不动点语言的赋值博弈会涉及无穷的运行。这出现在模态 μ-演算的博弈中，我们知道，模态 μ-演算是解释不动点算子的（参看 [Stirling. 1999]）。同样，埃伦芬赫特-弗雷斯博弈也可能有无穷的运行，我们可以利用互模拟或同态等概念解释玩家的总赢策略。这要求分析博弈运行本身，而不仅仅是作为博弈结

果的结束状态。

(2) 这里有一些细微的差别。一阶的模型验证的计算复杂性相对于模型的大小和输入公式的大小是 PSPACE 的。但是，同样的任务对于模态逻辑则是 PTIME 的。这与博弈树的大小有关。模态博弈中的节点不包含那种随着变元数，从而公式大小而增加的指派 s。

(3) 这一对偶视角的另一实例是图形博弈，那里，玩家沿着某个图的边交替移动卵石。

(4) 也有一些很自然的非序列的并行博弈算子，我们会在结尾讨论这样的例子。它们只出现在“非标准的”一阶逻辑中，像辛梯卡-桑都的博弈论语义（参看 12.6）。

(5) 验证博弈有一些特别的性质。例如，一般的验证博弈 $(\neg\phi)?$ 跟博弈的对偶 $(\phi)^d$ 是不同的。如果 ϕ 是真的，在先前的博弈中，V 首先移动，以“僵局”结束——而后者，则是由 F 先移动。这一区别影响到与此相关的迫使关系。在前一个博弈中 V 的成功条件是$\neg\phi\wedge x\in Y$，而在后一博弈中，是$\neg\phi\vee x\in Y$。我们只在必要的时候使用验证博弈。

(6) 对于对象-到-集合的转换关系，动态博弈语言也存在一个刻画它的博弈互模拟，从而可以解释在什么情况下两个博弈棋盘指的是同一个断定（[van Benthem. 2001；2002B；Pauly. 2001]）。

(7) 德摩根代数是由标准的分配格的公理，加上一个等幂否定（$x^{dd}=x$）构成的：

$$
\begin{array}{ll}
x\cup x = x & x\cap x = x \\
x\cup y = y\cup x & x\cap y = y\cap x \\
x\cup(y\cup z) = (x\cup y)\cup z & x\cap(y\cap z) = (x\cap y)\cap z \\
x\cup(y\cap z) = (x\cup y)\cap(x\cup)z & x\cap(y\cup z) = (x\cap y)\cup(x\cap)z \\
(x\cup y)^d = x^d\cap y^d & (x\cap y)^d = x^d\cup y^d
\end{array}
$$

这是布尔代数的基本部分，不包括关于 **0**，**1** 的任何特殊的规律。

(8) 动态谓词逻辑是一阶逻辑的指派-变化的语义，是基于程序动态逻辑的。读者可以在 [van Benthem. 1996] 中找到更多的技术细节，那里有对 [Visser. 1995] 中提到的一些结果的简要证明。一阶逻辑的博弈-语义在本质上与此类似，但是，是从输入指派到输出指派集的转换。确切的联系可以根据 [van den Berg. 1996] 的思路获得，那里把动态语义提升到一个集合变化的层面。

(9) 这说明了博弈语义中受限量词的真正更多的表现力——这一点在标准逻辑中是不明显的。

（10）我们可以把最后一步看做是对博弈模型的一种独立的表示。取一个新的模型，它的状态是一些序对（s，X），我们说 ρ_g（s，X）A（这里 A 是序对的簇）当且仅当最初的迫使关系 ρ_g 在 $\mathfrak{M}$ 中对于 s 和 A 中所有序对的左-映射集之间成立。结果实际上是两个模型之间的博弈-互模拟。

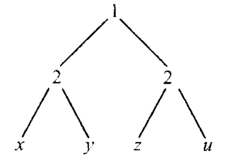
（11）用算子模仿模态赋值的算子，需要新的技巧。我们需要把模型 $\mathfrak{M}$ 的模态博弈与同一模型的一阶博弈联系起来，对于状态 $\{(x, s), (y, t)\}$ 而言，这意味着要把后者映射到它们在模态模型的 x-值 s。然后我们用 $\exists y$；Rxy；$\exists x$；$x = y$；$\exists y$；$\top$ 模拟模态词◇。

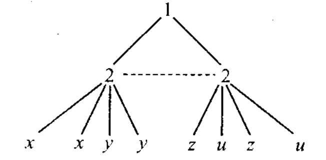
（12）博弈也以不同的视角看待标准的一阶语法。例如，需要解释的表达式的类通常比“合式公式”的类要大。它也包括后者与博弈算子的组合，加上自由独立的算子。因此，下面是正确的博弈表达式：Px；$\exists x$；$(Rxy \vee Py)$；$(\forall x \wedge \exists z)$。这为推理表达式的更大的类提供了独立的外延。这似乎还表明，逻辑推演也许可以不仅仅局限于合式公式。类似的结论也出现在“解放语法”的旗号下展开的自然语言的动态语义中。

（13）我们也可能用不同的方法来证明本文的题目。在局部行为的层次上说，任意有穷的博弈是与赋值博弈类似的！相关的结论也在博弈树中起作用。我们可以把结果翻译成唯一的命题字母。把模态词 ⓐ（a 是可行的移动）写在已有公式表述的节点上——如果是由 1 先移动，就它们写成析取式，否则写成合取式。结果得到的公式赋值博弈基本上是博弈树本身。

（14）［van Benthem. 2002B］给出了有关迭代的乘积博弈情形的更多细节——包括与无穷的囚徒困境的无穷重复博弈的联系，这一问题会在乘积 $G \times H$ 的博弈迭代中产生。

（15）这一结果说明，从效力的角度说，完美信息博弈至少可以被模拟为乘积博弈。请看下面的例子，玩家 2 有 4 种行为：





（16）一般而言，IF 语法更为丰富。例如，一个带斜线的公式 $\forall x \exists y \forall z \exists u/x$ $Rxyzu$ 允许证实者在第二个前缀 $\forall z \exists u$ 的位置知道她在前面已经玩过什么。它的赋值很像允许有限互动的乘积博弈。

参考文献

Abramsky S. 1996. Semantics of interaction: an introduction to game semantics. // Dybjer P, Pitts A, eds. *Proceedings of the* 1996 *CLiCS Summer School*, Isaac Newton Institute. Cambridge University Press: 1 ~ 31.

Abramsky S. 1997. Games in the semantics of programming languages. // Dekker P, Stokhof M, Venema Y, eds. *Proceedings of the* 11*th Amsterdam Colloquium*. ILLC, University of Amsterdam: 1 ~ 6.

Berwanger D, Grädel E. 2002. The variable hierarchy of the μ-calculus. Department of Informatics, RWTH Aachen.

Goranko V. 2000. The basic algebra of game equivalence. Preprint 2000-12, ILLC, University of Amsterdam.

Hintikka J. 1973. *Logic, Language Games, and Information*. Oxford: Clarendon Press.

Hintikka J, Sandu G. 1997. Game-theoretical semantics. // van Benthem J, ter Meulen A, eds. *Handbook of Logic and Language*. Amsterdam: Elsevier: 361 ~ 410.

Hodges W. 1998. An invitation to logical games. Lecture Notes. Department of Mathematics, Queen Mary's College, London.

Parikh R. 1985. The logic of games and its applications. *Annals of Discrete Mathematics*, 24: 111 ~ 140.

Pauly M. 2001. *Logic for Social Software*. PhD thesis. ILLC, University of Amsterdam.

Stirling C. 1999. Bisimulation, modal logic, and model checking games. *Logic Journal of the LGPL*, 7: 103 ~ 124.

van Benthem J. 1996. *Exploring Logical Dynamics*. Stanford: CSLI Publications.

van Benthem J. 1999-onward. *Logic in Games*. Electronic lecture notes. ILLC Amsterdam & CSLI Stanford.

van Benthem J. 2000A. Hintikka self-applied. Tech report, ILLC, University of Amsterdam. // Final version, 2006. The epistemic logic of IF games. Auxier R, Hahn L, eds. *The Philosophy of Jaakko Hintikka*, Schilpp Series, Open Court Publishers, Chicago: 481 ~ 513.

van Benthem J. 2000B. Logical evaluation games are complete for the game algebra of forcing relations. Tech Report, ILLC, University of Amsterdam, the original version of this paper. Final version 2003, *Studia Logica*, 75: 183 ~ 203.

van Benthem J. 2001. Games in dynamic epistemic logic. *Bulletin of Economic Research*, 53: 219 ~ 248.

van Benthem J. 2002A. Extensive games as process models. *Journal of Logic, Language and Information*, 11: 289 ~ 313.

van Benthem J. 2002B. Notes on product games. Manuscript. ILLC, University of Amsterdam.

van den Berg M. 1996. *The Dynamics of Nominal Anaphora*. PhD thesis. ILLC, University of Amsterdam.

Venema Y. 2001. Representation of game algebra. Manuscript. ILLC, University of Amsterdam.

Visser A. 1995. Relational validity and dynamic predicate logic. Preprint 144. Logic Group, Department of Philosophy, Utrecht University

13 博弈中的理性动态和认知逻辑*

郭佳宏/译 郭美云 崔建英/校

13.1 在认知进程中达到均衡

13.1.1 博弈的归纳求解算法

博弈的求解通常涉及某个逐步的算法进程。例如，著名的逆向归纳法以自下而上的方式计算扩展博弈中玩家所有节点的效用值。在以矩阵形式出现的策略博弈中，递归算法也同样突出。下面将是一个贯穿于本文始末的例子：

例1 严格受控策略的迭代消除（SD^w）。

请看下列矩阵，横竖坐标分别表示 E-值和 A-值（图13-1）。

A \ E	a	b	c
d	2,3	2,2	1,1
e	0,2	4,0	1,0
f	0,1	1,4	2,0

图13-1

以下是它的解释：首先消除受控的右边的一列（E 的行为 c），然后底行 A 的行为 f 变成严格受控了，于是可以消除它；接下来，同理可连续移除 E 的行为 b，A 的行为 e，最后到达唯一的纳什博弈均衡（d，a）。

* Rational Dynamics and Epistemic Logic in Games. *International Game Theory Review*, 2007, 9: 13~45

在上例中，SD^w到达了一个唯一的均衡概况。不过，一般而言，我们可能在矩阵条目中的某个更大的“求解地带”上结束，在那里不能再消除任何行列。

13.1.2　求解方案和标准认知逻辑

不难找到，相当多的文献采用认知逻辑的办法来分析博弈论的求解概念，主要贡献者有奥曼（Aumann），斯托内克尔（Stalnaker）及其他。正如上述的简单例子，［Binmore. 1992］采用合理性的迭代相互知识为上述 SD^w 的演进步骤做辩护：

比如既然 A 知道 E 是理性的；A 确信 E 会忽视右边的列。同样由于 E 知道 A 的理性（导致放弃动作 c），E 可以在接下来删除第二列；于是又可删除最底行。如此这般……

矩阵越复杂，删除越多，玩家之间的相互知识的深度需要也越大。上述剧情背后的技术性刻画结果表明，满足给定求解概念的概况集正好就是认知模型中的某些适当的合理性断定，这样的断定涉及玩家的相互知识和信念。［De Bruin. 2003］对 20 年来的上述结果作了一番数学和哲学意义的综述。本文试图对上述充分研究过的现象提出一种新的思路，强调算法的动态特征。这也反映 20 世纪 80 年代以来认知逻辑的一个变化。

13.1.3　认知逻辑中的动态转向：用更新解决“泥孩难题”

标准的认知逻辑描述某个固定情境的世界中主体所知道的或不知道的内容。但一般来说，知识是行为的结果：比如观察、学习或者交流等。在现代的认知逻辑中，这样的行为已经在系统设计中变成了一等公民。［van Benthem. 1996］对 20 世纪 80 年代以来的这一“动态转向”作了一番概要的研究，同时还展示了它对人工智能中的信念修正理论、计算机科学中有关交互作用的线性逻辑及语言学中的“动态语义学”等问题的影响。在本文中我们把解决众所周知的泥孩难题作为演示的例子：

例 2　“泥孩难题”（［Fagin, et al. 1995］）。

在外面玩耍之后，三个小孩中的其中两个的额头沾上了泥巴。他们都能彼此看到其他人，但看不到自己，所以他们不知道自己的状态。现在他们的父亲回来并且向他们说道：“你们中至少一人的额头是脏的”。然后他问：“有没有人知道他的额头是否是脏的？”孩子们接着真实地回答。随着父亲发问和孩子们回答的重复进行，请问将会发生什么？

在第一轮没有人知道他的额头是否脏。但是在第二轮，每一脏小孩可以这样

推理："如果我是干净的，我看到的那个脏小孩看到的将会都是干净的小孩；所以他应该马上知道他是脏的。但是他并没有这样做。所以我一定也是脏的！"

在上述情境的初始模型中，8 个可能世界指派每一小孩的状态 D（表示脏）或 C（表示干净）。正如图 13-2 中可达关系反映的那样，孩子们知道其他小孩额头的情况，但不知道自己的；这是对主体不确定性的一种编码方式。现在，剧情中出现的连续断定开始更新上述信息。

例 2（续 1）"泥孩"的更新

更新从父亲的公开宣告"至少有一孩子是脏的"开始。这是最简单的交流行为，因为它仅仅消除初始模型中不能满足此宣告的世界，即 CCC 消失了（图 13-2）。

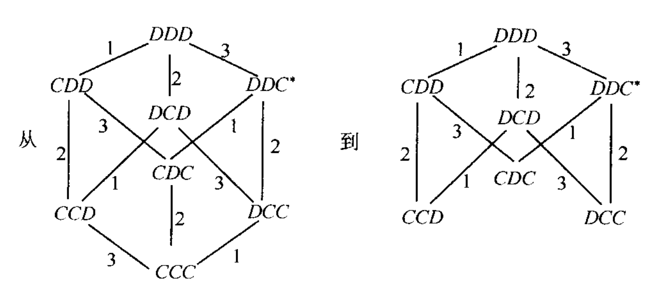


图 13-2

在没有小孩知道他们的状态的情况下，最下面的三个世界也被消除，于是模型变为：

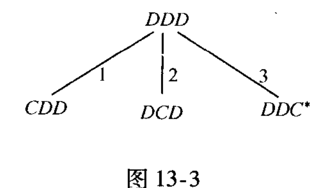


图 13-3

最终的更新是：DDC^*

在上述四个认知模型的序列中，论域的大小依次减小：8，7，4，1。一般地，在 k 个泥孩的情况下，关于无知"我不知道自己情况"的 k 轮断定将导致有关泥孩信息的公共知识，外加在整个情形下获取 D 和 C 在群体中的实际分布的公共知识的一些断定。值得注意的是，这一求解过程主要是由主体对相同无知信息的重复宣告驱动的，尽管它的每次重复对模型的作用是不一样的。接下来我们将用技术手段详细分析上述的认知过程。当然跟上述仅仅涉及公开宣告的例子

相比，还有更复杂、更精致的认知行为——不过本文的剩余部分还是继续采用这一简单例子。

13.1.4　作为认知过程的求解方案

在前面提到的两个例子之间显然有相似之处。人们可能会把博弈论的求解算法作为计算纳什均衡或者某个更大求解地带的纯粹的工具。不过 SD^w 和它的同类本身也具有有趣的进程结构，它们的连续步骤是把博弈模型变小的认知行为。初始阶段，所有的选项都在模型中；但逐渐地，模型变小了；在相应的模型中，玩家拥有的有关可能理性结果的知识也增加了。

例 1（续）　SD^w 轮次的更新。

请看相关算法轮次的连续更新序列：

1 2 3
4 5 6
7 8 9

1 2
4 5
7 8

1 2
4 5

1
4

1

图 13-4

上述每一盒子可以看做为一个认知模型。每一步都增加玩家的知识，直到达到某个均衡集，因为那里玩家知道了他们到达了“所能知道的最大状态”。

在 13.3，我们将研究哪些断定能够消除上述这些步骤。详细分析这样的算法会同时涉及认知逻辑和动态动作逻辑。特别的，在现代动态认知逻辑（参阅 13.2）中，从模型中消除世界过程的基本行为同对某些事实的公开宣告相对应。

13.1.5　探索相似性

博弈求解算法和认知交流之间的这一相似性是本文的主要思想。尽管它不是解决所有理性行为问题的万能药，它还是有令人吃惊的反响，所以非常值得我们认真研究。首先在 13.2，我们解释动态-认知逻辑的机制，包括重复宣告的特殊行为。13.3 主要研究含有偏好结构的认知博弈模型，我们还考察相应的逻辑。在 13.4，我们为玩家的“理性”定义两种主要类型，试图为相应兴趣点的有穷模型找到完全的描述。然后在 13.5，我们分析 SD^w，把它作为“弱理性”的重复宣告；同时也展示如何能够把求解算法和宣告过程引发的另一算法联系起来，后者受“强理性”驱动，它同“理性化”（Rationalizability）相匹配。13.6 用一般的术语分析由此获得的博弈框架结构，证明重复宣告的求解地带在认知不动点逻辑中是可定义的。这就把博弈论均衡理论同当前的不动点逻辑的计算联系起来

了。13.7 将指出跟泥孩难题剧情的进一步相关特征，考虑修正玩家信念的认知过程。最后 13.8 讨论把我们的动态认知风格的分析方法概括至扩展博弈和逆向归纳法中。

13.2 动态认知逻辑

13.2.1 作为核心的标准认知逻辑

标准认知逻辑的语言是在经典命题语言的基础上加上模态算子 $K_i\phi$（i 知道 ϕ）和 $C_G\phi$（ϕ 是群体 G 中的公共知识）：

$$p \mid \neg \phi \mid \phi \vee \psi \mid K_i\phi \mid C_G\phi$$

我们也用 $\langle j \rangle \phi$ 表示对偶模态，它的真表示 ϕ 至少在一个可达的世界中为真。本文采用标准的多主体-**S5** 模型，它们相对每个主体的可达关系是等价关系。我们用（$\mathfrak{M}$, s）表示含有当前世界 s 的模型，在方便的时候省略括号。而且如果没有特别指出，所有的模型都是有穷的。标准认知逻辑的核心语义定义如下：

$\mathfrak{M}, s \models K_i\phi$ 当且仅当对所有 t 满足 $s \sim_i t$：$\mathfrak{M}, t \models \phi$

$\mathfrak{M}, s \models C_G\phi$ 当且仅当对所有可从 s 通过 $\sim_i$（任意 $i \in G$）的有穷步通达 t：$\mathfrak{M}, t \models \phi$

一个有用的技术创新是“相对化的公共知识”(relativized common knowledge) C_G（ϕ, ψ）（[van Benthem, van Eijck & Kooi 2004]）：在主体只经过 ϕ-世界的每一有穷可达步骤序列以后，ψ 成立。这一概念已经超出了基本语言的范围。

接下来，引入一个基本的模型论概念，它从我们标准的认知语言的观点去看，陈述两个认知模型表达相同信息的情形。

定义 1（认知互模拟关系） 认知模型 $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ 之间的一个互模拟关系是指模型 $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ 中的状态 m, n 之间的二元关系 $\equiv$ 使得，只要 $m \equiv n$，那么（a）m, n 满足相同的命题变元，（b1）如果 $m\ R\ m'$，那么存在世界 n' 满足 $n\ R\ n'$ 并且 $m' \equiv n'$，（b2）相同的 Z 字形条件中的反方向也成立。

每一模型（$\mathfrak{M}$, s）有一个最小的互模拟模型（$\mathfrak{N}$, s），即它的“互模拟收缩”。后者是（$\mathfrak{M}$, s）中认知信息的最简单表达。接下来的结果容易通过对公式结构的递归证明得到。

命题 1（互模拟的不变性） 两模型 $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ 之间的每一互模拟关系 E 且 $s\ E\ t$：s, t满足含有公共知识认知语言中的相同公式集。

这里还有命题 1 的逆。

定理 1（模型的认知可定义性）　每一有穷模型（$\mathfrak{M}$, s）有一认知公式 $\delta(\mathfrak{M}, s)$（含公共知识）使得对所有模型 $\mathfrak{N}$, t，下列两者是等价的。

(a)　$\mathfrak{N}, t \models \delta(\mathfrak{M}, s)$

(b)　$\mathfrak{N}, t$ 同 $\mathfrak{M}, s$ 有一个互模拟关系 $\equiv$ 使得 $s \equiv t$

有关它的简单证明请参阅 [van Benthem. 2002B]。所以在当前模型中，我们可以对状态作出最强的认知断定。具体地说，互模拟关系收缩中的每一世界在相应的模型中具有唯一的认知定义。如想了解认知有效性的完全公理化，请参阅 [Meyer & van der Hoek. 1995]。

有时，我们也需要在群体 G 中引入分布式知识（distributed knowledge）：

$\mathfrak{M}, s \models D_G\phi$ 当且仅当，对所有 t 满足 $s \cap_{i \in G} \sim_i t$：$\mathfrak{M}, t \models \phi$[①]

13.2.2　公开宣告和基于世界消除的模型变化

现在我们扩展认知语言，使它能够描述像信息流这样的事情。每当交流发生的时候，主体的认知模型就发生变化。在"动态化"的认知逻辑([van Benthem. 2002B]）中这样的变化是至关重要的。它的最简单例子是通过公开宣告某个命题 P 从模型中消除相关的世界。

例 3　问与答。

以下是一个例子。某事实 p 是真的，主体 1 不知道，但 2 知道。不难有上述情况的标准认知模型图 13-5：

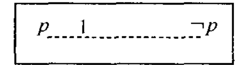


图 13-5

在现实世界 p，主体 1 不知道是否 p，但他知道主体 2 知道。于是，1 就向 2 发问"p?"。2 真实地回答"是的"，然后上述的模型更新为图 13-6

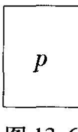


图 13-6

① 互模拟关系不变性质对分布式知识不成立([van Benthem, 1996])。

那里 p 成了群体 $\{1, 2\}$ 中的公共知识。

下面我们介绍这一简单认知模型变化背后的一般原则。

定义 2（公开宣告的消除性更新） 令命题 P 在某个当前模型 $\mathfrak{M}$ 的现实世界中为真（图 13-7）。于是对 P 的真实公开宣告消除 $\mathfrak{M}$ 中所有 P 不成立的世界，从而获得新模型（$\mathfrak{M}|P, s$）。它的域限制在 $\{t \in \mathfrak{M} \mid \mathfrak{M}, t \models P\}$：

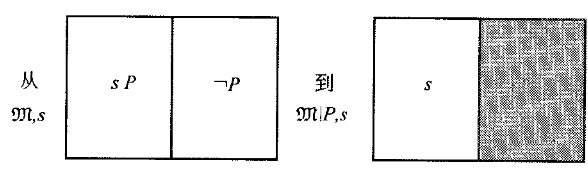


图 13-7

通过模型收缩来描述现实世界的知识增长，状态消除是最简单的更新行为。原子事实在这样的过程中保持原来的真值。不过消除性更新可能改变复杂的认知断定 ϕ 在世界上的真值，既然我们在新的较小的模型中需要对模态公式重新赋值。例如，在例 2“泥孩难题”中，关于无知的真实陈述随着世界的消除逐渐变成假的了。最后，我们获得了公共知识。

13.2.3 公开宣告逻辑

我们可以从动态认知逻辑的角度来研究更新，利用来自动态逻辑有关程序的思想形成混合的断定，以明确指称认知行为：

定义 3（公开宣告逻辑） 在标准认知逻辑基础上，我们增加动态模态词

$[P!]\phi$　　在真实地公开宣告 P 后，公式 ϕ 成立

它的真值条件是 $\mathfrak{M}, s \models [P!]\phi$ 当且仅当，如果 $\mathfrak{M}, s \models P$，那么 $\mathfrak{M}|P, s \models \phi$。

这样的语言可以表述 $[A!]K_jB$ 之类的事情，表示在真实地公开宣告 A 后，主体 j 知道 B；或者 $[A!]C_GA$：宣告它之后，A 成了主体群 G 中的公共知识。我们可以对公开宣告逻辑做完全的公理化。典型的有效规则描述更新行为和知识的相互交换，把所谓的行为“事后条件”同它们的“事前条件”联系起来。

定理 2（公开宣告逻辑的完全性） 公开宣告逻辑可以由下列两者完全地公理化：(a) 标准认知逻辑中所有有效式，(b) 下述五条等价模式：

$[P!]q \leftrightarrow P \to q$　　对原子事实 q

$[P!]\neg\phi \leftrightarrow P \to \neg[P!]\phi$

$[P!]\phi \wedge \psi \leftrightarrow [P!]\phi \wedge [P!]\psi$

$[P!]K_i\phi \quad \leftrightarrow \quad P \rightarrow K_i[P!]\phi$

$[P!]C_G(\phi,\psi) \quad \leftrightarrow \quad C_G(P \wedge [P!]\phi,[P!]\psi)$

本文不会使用这个形式系统，不过它确实为我们提供了对本文所讨论内容进行形式化的手段（想了解它的完全性的证明及应用，请参阅 [van Benthem, van Eijck & Kooi. 2004]）。当然我们还需要扩张它的语法。

13.2.4 程序结构和迭代宣告极限

交流不仅仅涉及简单的公开宣告。在表示泥孩故事的时候，还需要考察多个序列算子，如组合、安保选择和特别地，迭代。本文在此方面的主要兴趣是研究把公共陈述推到极限的情况。不妨考查认知语言中任意的陈述 ϕ。对于任意的模型 $\mathfrak{M}$，我们可以持续不断地宣告 ϕ，只保留那些 ϕ 成立的世界。这会导致产生嵌套的递减集，它一定在有穷模型中停止。在无穷模型中，可以通过采取到目前为止的所有阶段的交跨过极限序数。不管哪种情况，这样的步骤一定会到达一个*不动点*，也就是，取那些不再改变模型并且满足 ϕ 的世界组成的子模型。

定义 4（模型中的宣告极限）　任意模型 $\mathfrak{M}$ 和公式 ϕ，*宣告极限* $\#(\phi, \mathfrak{M})$ 首先是重复宣告序列中的子模型使得在那里宣告 ϕ 没有任何进一步的效果。如果 $\#(\phi, \mathfrak{M})$ 是非空的，可以用已把 ϕ 变成公共知识的模型作为结束。称这样的陈述在给定的模型中是*自我实现的*。如果 $\#(\phi, \mathfrak{M})$ 是空的，那么称 ϕ 是*自我反驳的*。

13.4 中有关博弈的理性断定是自我实现的。在泥孩难题中，对无知的联合宣告是自我反驳的：导致了宣告内容否定的公共知识。所以，两种宣告极限都有积极的意义[①]。

13.2.5 最大的群体交流

如果泥孩相互告知他们所看到的内容，关于现实世界的公共知识立刻获得。现在描述在最大的公开宣告的情况下，群体能获得什么。模型（$\mathfrak{M}$, s）中的主体能够相互告知他们知道的其他事情，进而把原来的模型缩小，直到不再变化。

---

① 有必要考察模型中的现实世界所扮演的角色。真实宣告陈述命题 ϕ 在 $\mathfrak{M}$ 的 s 中为真。如果 ϕ 是自我实现的，则它的迭代宣告序列可以从 $\#(\phi, \mathfrak{M})$ 中的任意世界 s 开始。既然 s 在所有的时间内逗留在当前的模型中，ϕ 在所有时间内在那里为真。宣告的极限正好包括那些相应迭代宣告序列的所有曾经是现实世界的世界。有了这样的说明，我们在接下来大部分情况下省掉具体的现实世界 s 。

定理 3　根据所有主体间有关他们所知命题的最大交流，每一模型（$\mathfrak{M}$, s）有唯一可达的极小子模型。从互模拟关系考虑，它的域是集合 $COM(\mathfrak{M}, s) = \{t \mid s \bigcap_{i \in G} \sim_i t\}$。

证明：因为这一结果可以很好的演示本文后面涉及的对话剧情，有必要给出它的证明，主要来自［van Benthem. 2002］。首先假设主体到达子模型（$\mathfrak{N}$, s），在那里进一步宣告他们所知道的内容没有任何效果。不失一般性，令（$\mathfrak{N}$, s）为收缩后的具有互模拟关系的同类模型。然后，根据定理 2，有每一世界、每一子集都有外在的认知定义。把此应用到世界集 $\{t \mid s \sim_i t\}$ 的子集中，主体 i 知道他们定义的命题，所以他可以陈述它。但既然这样的陈述并不改变模型，模型的整个域已经包含在上述集合中。所以，（$\mathfrak{N}$, s）包含于 $COM(\mathfrak{M}, s)$ 中。反过来，既然主体只在所有他们可达的世界上使陈述为真，所有 $COM(\mathfrak{M}, s)$ 的元素会在每一公开更新的情节中幸存。① $COM(\mathfrak{M}, s)$ 也正是赋于群体分布式知识的世界集——尽管在它内部赋值不能马上得到概念 $D_G\phi$②。■

13.2.6　其他认知行为

公开宣告是最简单的交流形式。以上述风格出现的更复杂的动态认知逻辑还描述部分观察、隐匿、误导，甚至欺骗。不过本文中的简单剧情并不涉及这些观察([Baltag, et al. 1998; van Ditmarsch, et al. 2007])。

13.3　策略博弈形式的认知逻辑

以模型变化形式出现的博弈求解的一个动态认知分析预设了把静态认知博弈模型作为群体信息状态这样的前提。本文选择其中一个非常简单的版本——试图尽可能简单地展示一般的想法，并且把动态性本身看做是核心特征。

---

①　实际上，主体只需通过一次宣告就能到达 $COM(\mathfrak{M}, s)$。一般地，我们插入带有更新的互模拟关系，并且保证所有的子集都是认知可定义的。首先，主体 1 通过向所有他认为与现实世界不可区分的世界陈述析取式 $\vee\delta_\tau$，表示他知道的所有内容。这一初始移动把模型剪切为集合 $\{t \mid s \sim_1 t\}$。接下来轮到 2。但第一次更新可能已经把那些同其他相似世界可以区分的世界移除掉了。所以我们采用互模拟关系的收缩，让 2 说出他所知道的最强的内容，从而把 $\{t \mid s \sim_1 t\}$ 剪切成同时还满足从现实世界 $\sim_2$ 可达的世界组成的集合。重复上述过程导致子模型 $COM(\mathfrak{M}, s)$。

②　更精巧的计划包括在某些主体公开宣告现实世界的事实但对群体中的其他成员保持秘密（参阅［van Ditmarsch. 2002］的“莫斯科难题”（Moscow Puzzle））。

13.3.1　认知博弈模型

策略模型 $G = (I, \{A_j \mid j \in I\}, \{P_j \mid j \in I\})$，分别表示玩家集、每个玩家 $j \in I$ 的对应行为集。我们主要讨论有穷的双玩家博弈——尽管大多数结果概括性更强。每个玩家的有关行为的三元组称之为策略概况，每一个这样的三元组确定唯一的（输出）结果——并且每一玩家在这些结果上有他自己的偏好关系 P_j。在本文中，我们将采用上述博弈上的极小认知超-结构来研究它。

定义 5　G 上的完整模型是一个多主体-S5 认知结构 $\mathfrak{M}(G)$，它的所有世界都是策略概况，每一玩家 j 的认知可达关系 $\sim_j$定义为第 j 个坐标上的概况的等价关系。■

这样的约定意味着玩家知道他们自己的行为，但不知道其他人的。所以，模型可以描述主体（拥有所有相关证据）的决策时刻。为了模拟主体深思熟虑的真实过程，还需要更丰富的模型——虑及其他特征的主体的无知。文献中可以找到这样的模型，不过我们这里依然研究最简单的情形。同理，我们忽视跟行为的概率组合相关的所有问题。从最低纲领主义角度出发，我们直接把博弈矩阵理解成认知模型。

例 4　矩阵博弈模型。

例 1 中的矩阵博弈模型如下：

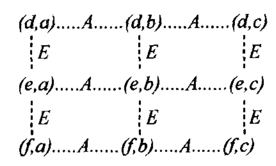


图 13-8

E 的不确定关系 $\sim_E$沿着列起作用，因为 E 知道她自己的行为，但不知道 A 的。同理，A 的不确定关系沿着行起作用。

类似 SD^w的求解算法可以把上述完整博弈模型改变成较小的：

定义 6　广义博弈模型以 $\mathfrak{M}$ 是完整博弈模型中的任意子模型。

省略某些策略概况表示玩家在全局决策情境下的受限的公共知识。这样的做法可以有完整的逻辑概括力，因为我们有下面的结果（[van Benthem. 1996]）：

定理 4　每一多主体-S5 模型与某个广义的博弈模型有互模拟关系。

推论 1 广义博弈模型的完全逻辑正是多主体-**S5**。

13.3.2 博弈模型的认知逻辑

完整的或广义的博弈模型支持 13.2.1 中语言的任意类型的认知陈述。13.3.3 将会介绍一些例子。尽管本文不涉及完全的逻辑，但这里我们想提及一些在完整博弈模型中有趣的有效式。首先，模态汇合公理（Confluence Axiom）$K_AK_E\phi \to K_EK_A\phi$ 在矩阵格子模式中有效。因为对两个玩家来说，任何世界都可以通过关系 $\sim_A$ 和 $\sim_E$ 的组合通达到任一其他世界：所以 K_AK_E 和 K_EK_A 表达全通的可达关系。接下来，我们模型的有穷性蕴涵两步关系 $\sim_A$；$\sim_E$ 具有向上的良基性，这样的关系只有有穷长度的上升序列。所以模态 K_AK_E 使得格热高奇克公理（Grzegorczyk Axiom）有效（参阅［Blackburn，et al. 2001］）。这样的原则对玩家认知情境的模态推理来说是至关重要的[1]。

13.3.3 最佳回应和纳什均衡

为了讨论求解方案和均衡，我们需要博弈模型中某些更深层次的结构，具体的比如某些反映偏好基础的原子断定。

定义 7（扩张的博弈语言） 不管是完整的还是一般，给定某个博弈的任意认知模型 $\mathfrak{M}$。令 $w(j)$ 为在世界 w 由玩家 j 执行的行为。令 $w(j/a)$ 为策略概况 w，其中行为 a 取代了 $w(j)$。下面我们定义 j 的最佳回应为：在固定其他玩家行为的前提下，j 的效用不能通过改变他在 w 中当前的行为而得到提高：

$$\mathfrak{M},w \models B_j \quad 当且仅当 \quad \&_{\{a\in Aj \mid a\neq w(j)\}}\ w(j/a) \leqslant_j w$$

纳什均衡（NE）可简单地表示成所有上述命题的合取 $NE = \& B_j$。

这样，最佳回应是一种绝对的性质，它的合取作用于原博弈 G 中出现的所有行为（不管这些出现或不出现在模型 $\mathfrak{M}$ 中）上。所以我们把 B_j 作为语言中的原子命题符号，它并不随着模型的改变而改变真值。

例 5（扩张的博弈模型） 著名的博弈可给我们提供了认知模型的简单例子。请看含有两个纳什均衡的“性别之战”博弈。右边的简化图形表示玩家在那些原子命题为真的世界上有最佳回应：

---

① 实际上，从计算复杂性的角度看，如果加上公共知识或全模态词，任意完整博弈模型（有穷或无穷）的逻辑就成了不可判定的。其中的原因是我们在上述格子中可以编入铺砖问题。不过对于有穷模型的情况，看来还是个开放问题。

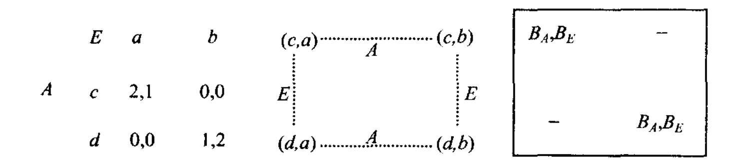


图 13-9

接着，对例 1 可作出如下含有 9 个世界的完整认知博弈模型：

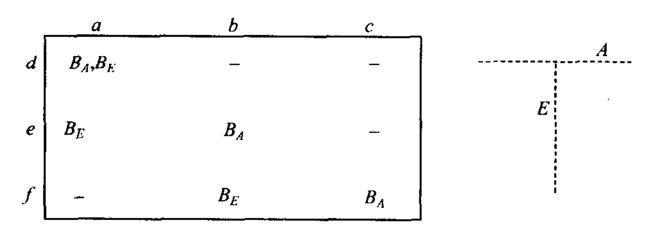


图 13-10

根据上面的定义，由于 B_j-原子的分配性质，不难看出，完整博弈模型中的每一列都须有 B_A的出现，每一行中则出现 B_E。

在上述模型中，可以确定更复杂的认知命题的赋值。

例 5（续）认知博弈陈述的赋值

(a) 公式 $\langle E\rangle B_E \wedge \langle A\rangle B_A$ 表示每一玩家认为他的当前行为对他来说可能是最佳的。在上面实例的 9 个-世界模型中，这在最左边的两列（a，b 两列）的 6 个世界中为真。(b) 上述模型还强调了一个重要的区别。B_j表示 j 的当前行为确实是 ω 的最佳回应。不过 j 并不需要知道这个，因为他不需要知道其他玩家正在做的内容。实际上，陈述 K_EB_E在上述模型的所有世界中都假，尽管 B_E在 3 个世界中为真。

而且，有关理性的公共知识陈述通常在完整博弈模型的每个世界都是假的，即使相应的模型有纳什均衡也一样。在上述丰富语言的描述下，博弈模型的逻辑变得更加有趣了。

例 6　涉及最佳回应的有效博弈法则。

原则 $\langle E\rangle B_A \wedge \langle A\rangle B_E$ 在所有完整博弈模型中成立。它表示了例 5 的最终结果。我们会在晚些时候进一步考察有效的原则。

当然对博弈模型来说，还有其他可选的逻辑语言。特别的，上述词汇“最

佳”是依赖于语境的。广义博弈模型 $\mathfrak{M}$ 中的最佳回应的一个自然相对版本 B_j^* 看起来只能在 $\mathfrak{M}$ 内部的策略概况中。毕竟，在那个模型中，玩家知道只有这些行为模式会发生。

定义 8（相对的最佳回应） 广义博弈模型 $\mathfrak{M}$ 中的相对的最佳回应命题 B_j^* 只在这样的策略概况中为真：当对照集是 $\mathfrak{M}$ 中所有可选的策略概况时，j 的行为是对他的对手的最佳回应。

j 的最佳概况 B_j^* 可能随着模型改变而改变。例如，在只有一个世界的博弈模型中，单一的概况对所有玩家来说都是相对最佳的，尽管从绝对意义上讲可能根本就没有最佳的。相对的版本有其独立的研究兴趣：①

评论 1 相对的最佳回应和隐含知识。

可用认知术语来解释相对的最佳回应。在双玩家的情况下，它真实表示另一玩家知道 j 的当前行为对 j 来说至多同在 w 中的 j 的行为一样好！更一般地说，B_j^* 表示命题“j 的当前行为至少同 j 在 w 的行为一样好”是 G 组的其他成员 G-$\{j\}$ 在 w 的分布式知识。直观地说，是其他玩家在共享他们信息的情况下可能学到的事实。这一结果还在扩展的认知偏好逻辑中用来定义纳什均衡，请参阅［van Benthem，van Otterloo & Roy，2006］。

在本文 13.4 有关认知断定驱动 SD^w 的分析中，我们会再次考虑断定 B_j^*。最后它们的关系是：绝对-最佳蕴涵相对-最佳，但是反过来不一定成立。

例 7 所有模型都有相对的最佳位置。

为了理解上述两概念的区别，请比较下列两模型②：

1，1（B_A）	0，2（B_E）
0，2（B_E）	1，1（B_A）

1，1（B_A，B_E^*）	
0，2（B_E）	1，1（B_A）

图 13-11

① 关于绝对最佳和相对最佳回应的区别还可见于爱普特［Apt. 2005］的博弈转换的格-理论分析，那里把它作为系统选择要点。

② 本文的原始版本［van Benthem. 2002C］为博弈模型提供了更丰富的语言，其中包括偏好模态、具体世界的名字、世界上的全模态词、分布式群体知识等内容。这些模态工具可以产生出 $K_A\downarrow\langle E\rangle act_E \geqslant_E \downarrow act_E$ 这样的公式，用来形式化各种合理化原则。［van Benthem，van Otterloo & Roy. 2006］从博弈的角度研究了上述偏好逻辑。不过这里我们以比较非形式的方法用本文提到的模型处理它。

13.4 理性断定

“理性”通常被用来表示玩家在知道或相信某些内容的情况下所做出的最佳回应。但是我们的模型还支持各种区别，比如绝对最佳和相对最佳。更进一步说，即使事实上玩家在做出最佳的行为，他们不必知道他们正在这样做。所以，如果合理性具有自我反思的性质，那么他们能够知道什么？这个问题对博弈求解的认知对话剧情（13.2.5）也同样重要。正常情况下，我们约定玩家只说那些他们知道为真的事情。

13.4.1 弱理性

玩家们可能不知道他们的活动是最佳的（即使它们是），但他们能够知道并不存在可供选择的已知更好的活动。简短地说，“他们中没有笨蛋”。

定义 9（弱理性） 模型 $\mathfrak{M}$ 中的世界 w 上的弱理性表示这样的断定：对每一可供选择的活动，j 认为当前的那个可能是至少跟它一样好或者符合下面半形式的记法：

WR_j $\&_{a\neq w(j)}\langle j\rangle$ “j 的当前活动对 j 来说至少跟 a 一样好”

如 13.3.3 中相对最佳 B_j^* 那样，合取的索引集作用于当前模型的世界上[①]。

给定双玩家博弈模型，根据定义，弱理性断定 WR_j 只在由 j 严格控制的那些行列中为假。例如，除去定义 9 中的量词，在例 1 中，WR_E 表示：对列 x 及任一其他列 y，至少有一行使得 E 的值在 x 中至少跟在 y 中一样好。显然这样的列总是存在的。

定理 5 每一有穷广义博弈模型含有这样的世界：使得对每个玩家 j，WR_j 在其上为真。

证明：为了方便，只考察双人博弈。我们证明一个更强的结果，即，此模型有 WR-环形式 $s_1\sim_A s_2\sim_E\cdots\sim_A s_n\sim_E s_1$，并且 $s_1\models B_E^*$，$s_2\models B_A^*$，$s_3\models B_E^*$，… 比如，一个纳什均衡本身就是只含一个世界的 WR-环。下面首先在矩阵的位置（列，行）中选取极大值，下列两个陈述一定在博弈模型的任何地方成立（参阅 13.3）：

① 另一种版本是让索引集作用于整个初始博弈的所有策略概况上——如绝对最佳断定 B_j 处理的那样。我们可以用类似的方法。

$$\langle E\rangle B_A^* \qquad \langle A\rangle B_E^*$$

例如，前面的公式表示，给定一个含有某个 E 行为的世界，模型中一定存在含有相同的 E 行为的某个世界使得 A 的效用在那里是最高的（它的绝对版本 B_A不一定成立，因为我们已经排除了它的“证据世界”）。重复上述做法，这样就有永不停止的世界序列 $B_E^* \sim_E B_A^* \sim_A B_E^* \sim_E B_A^* \ldots$ 既然这个模型是有穷的，上述序列一定循环。所以，此序列上（比如 B_A^* 成立）的某个世界一定跟某个早期的世界 w 具有 $\sim_A$关系。现在 w 有 B_E^*，或者在序列中 w 有一个含有 B_E^* 的 $\sim_A$后继。前一种情况可以通过 $\sim_A$的传递性还原到后一种。但另一方面，沿着这样的环向后看，并且采用可达关系的对称性，不难获得 WR-环。显然，双玩家的弱合理性都在它的每个世界中成立：$\langle E\rangle B_E^* \wedge \langle A\rangle B_A^*$。 ■

命题 2　弱合理性是认知自省的。

证明：根据定义 9 和认知博弈模型中的可达关系，如果 WR_j在模型的某个世界 w 中成立，它也在 j 无法同 w 区分的所有世界中成立。所以，认知原则 $WR_j \to K_j WR_j$在广义博弈模型中有效。 ■

所以，$WR_j \to K_j WR_j$是扩张了最佳回应和合理性的博弈模型的逻辑法则。这也使得弱合理性可以作为公开宣告的适当断定，当玩家每次说出它时，可以排除那些严格受控行列的世界。

13.4.2　强理性

弱理性是认知可能算子的逻辑合取：$\&\langle j\rangle$。有关理性断定的较强形式会颠倒上述顺序，用来表达玩家们认为他们的真实行为可能是最佳的。用行话来说，相对于原来的“没有笨蛋”，他们现在可以有理由“希望他们是聪明的”。

定义 10（强理性）　模型 $\mathfrak{M}$ 的世界 w 上的 j 的强理性是这样的断定：j 认为它的当前行为可能至少跟所有其他的一样好：

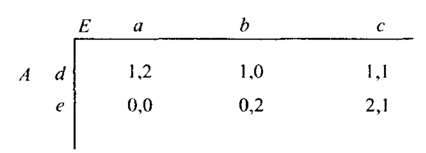
SR_j　　$\langle j\rangle\ \&_{a\neq w(j)}$ “对 j 而言，她当前的行为至少跟 a 一样好”

这次我们采用绝对的索引集，它作用于博弈的所有行为概况上。这意味着上述断定可以等价地表示为前面提到的模态 $\langle j\rangle B_j$。整个群体玩家的强理性是合取式 $\&_j\ SR_j$。

根据 **S5** 中规则，有 $\langle j\rangle\phi \to K_j\langle j\rangle\phi$，表示 SR_j是这样的命题：如果它是真的，那么玩家 j 会知道它。所以，在这个意义上它像 WR_j。此外，我们还有下面的比较结果：

命题 3　SR_j蕴涵 WR_j，但反过来不一定成立。

证明：请看下面的博弈模型，我们标出了 B-原子：



	E	a	b	c
A	d	1,2	1,0	1,1
	e	0,0	0,2	2,1

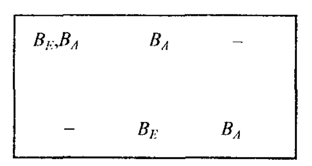


图 13-12

没有列或行支配其他任何行列，对两个玩家而言，WR_j始终是成立的。但 SR_E只在最左边的两列成立。原因是它否决了那些从来不是最佳的行为，即使在没有较好的可供选择的情况下也一样。■

相比弱合理性 WR_j，SR_j 的优点是涉及了命题变元 B_j的绝对性。一旦它们获得了赋值，我们就不再需要为了计算迭代宣告的进一步阶段而回到数字效用价值上去。在本文 13. 5. 5 的动态分析中，这一特征正是 SR 定义的集合转换的语义单调性的基础；这也是爱普特[Apt. 2005]的文章中独立作出的结果。

强理性有直接的博弈论意义。它说的是：

玩家的当前行为相对于对手的至少一个可能行为来说是最佳回应。

根据波恩海姆（Bernheim）和佩尔斯（Pearce）（参阅［de Bruin. 2003；Apt 2005］），这正是博弈求解的“理性化”观点背后的断定；在所有的环境下，如有更好的回应，玩家会放弃原先打算的行为。我们在晚些时候再回到此问题。

强理性在广义博弈模型中不一定能得到满足。不过它确实在完整的博弈模型中成立，我们可以通过检查行列中的极大效用价值来证明。

定理 6　每一有穷的完整博弈模型中存在使得强理性在其中成立的世界。

证明：类似定理 5 的证明，因为有下述形式的 SR-环：$s_1 \sim_A s_2 \sim_E \cdots \sim_A s_n \sim_E s_1$，满足 $s_1 \models B_E$，$s_2 \models B_A$，$s_3 \models B_E$，…我们给出扩展的演示：每一有穷完整博弈模型有三个玩家的 SR-环。在这样的模型中，根据早期得到的关于行列中的极大结果，下列公式在各处成立：

$$\langle B,C\rangle B_A,\langle A,C\rangle B_B,\langle A,B\rangle B_C$$

模态 $\langle i, j\rangle$ 具有可达关系 $\sim_{\{i,j\}}$，它保持 i 和 j 的坐标相同——即 $\sim_i$和 $\sim_j$ 的交。同理，如果重复它，我们就一定有环形 $B_A \sim_{\{A,C\}} B_B \sim_{\{A,B\}} B_C \sim_{\{B,C\}} B_A \sim_{\{A,C\}} \cdots$ 回到初始世界 B_A。于是，此环中的任一世界满足$\langle A\rangle B_A \wedge \langle B\rangle B_B \wedge \langle C\rangle B_C$，即，如果世界本身有 B_A，那么根据自返性，它满足$\langle A\rangle B_A$。然后通

过 $\sim_{\{B,C\}}$ 往回看得到它的母公式 B_C，根据对称性，此世界满足 $\langle C\rangle B_C$。然后再通过 $\sim_{\{B,C\}}$ 和 $\sim_{\{A,B\}}$ 看它的祖母公式 B_B，根据传递性，它还满足 $\langle B\rangle B_B$。 ■

评论 2 无穷博弈模型。

无穷博弈模型中 *SR*-环不一定出现。考虑以形式 $N\times N$ 出现的格子：假设最佳回应模式按下列的对角线方式运行：

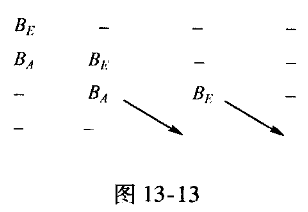


图 13-13

于是，每个序列 $B_E\sim_A B_A\sim_E B_E\sim_A B_A\cdots$ 必须在顶部断裂。现在我们回到这些断定的动态认知所扮演的角色①。

13.5 理性的迭代宣告与博弈求解

13.5.1 虚拟会话剧情

下面是我们提议的迭代求解算法背后的剧情。假定我们在当前博弈模型的某个现实世界（$\mathfrak{M}$, s）上。现在玩家开始相互告知他们所知道的自己在 s 中的行为，从而缩小已有的选择范围。此外，由于来自另一玩家的信息可能改变当前的博弈模型，重复这样的断定过程就更有意义了——如果它还仍然是真的。不妨把这样的情节作为真正的交流，但我们的偏好是以个体玩家为中心的*虚拟会话*。所以，不同于“泥孩”（它发生于真实时间中），我们的博弈求解剧情发生于虚拟的“影像时间”中。

那么，*玩家可以真实地说什么呢*？这里有一个平凡的方案：只告诉其他人你所选择的行为。但是，用来“解决”纸牌游戏（告诉每一位你手中的牌）这是不合适的。有必要找出那些在早期模型（即含有某个现实世界 s 的模型 $\mathfrak{M}$, s）中为真的认知断定。类似“泥孩”，我们试图找出那些能够在最佳回应和理性的语言中能够形式化的一般断定，而不需要具体行为的名字。本文 13.4 为此提供了解答。

---

① 在我们的认知基础语言，或者再加上第 365 页脚注②的技术性结果，公理化广义的和完整的博弈模型逻辑（用 B_j，B_j^*，WR_j、SR_j 扩张后）将会是很有意思的事。

13.5.2　弱理性和严格受控策略的迭代移除

本文的第一个重要结果是对 SD^w 通常刻画内容的重新表达，内容如下。

定理 7　以下两命题相对于完整博弈模型 $\mathfrak{M}(G)$ 中的世界 s 是等价的：

(a) 世界 s 在 $\mathfrak{M}(G)$ 的求解地带 SD^w 中

(b) 关于玩家的弱合理性的反复连续宣告稳定于子模型（$\mathfrak{N}$，s）中使得它的域正好就是求解地带

证明：既然 13.4 已经提到了，根据定义，WR_j 在那些所有的不位于严格受控行（或者列，根据可能情况）的博弈位置中为真。我们可以把 WR_E，WR_A，…的交替更新序列应用到例 1 中，很容易可以验证我们要证的论题。■

13.5.3　广义程序

从概念上说，定理 7 在数学上很初步，它很大程度上重述了我们已经知道的内容。不过重要的是上述更新分析的风格。现在可以从两个方向来理解博弈和认知逻辑。

从博弈到逻辑

给定某个定义求解概念的算法，试图找到驱使它的动态过程的行为。

这正是我们在有关 SD^w 的分析中所演示出来的方向。但还有一个相反的方向：

从逻辑到博弈

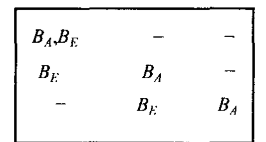
认知断定的任意类型定义一个迭代的具有独立兴趣的求解过程。

原则上说，这表示了博弈论和逻辑之间的一个一般的通行关系，已经超出了现存的一批认知刻画结果；那里它们把博弈论求解方案看做是给定的指令。下一例子试图说明这样的想法——虽然在结束时，它最终还是与现存的一个博弈论概念相符合。

13.5.4　另一种剧情：宣告强理性

把 WR 换掉，我们也可在前述的剧情中宣告强理性。这就产生了一个新的博弈论求解过程，它的行为可能会不一样。

例 8　SR 的迭代宣告。例 1 正好产生含有 SD^w 的相同模型序列：



B_A,B_E	–
–	B_A
–	B_E

B_A,B_E	–
B_E	B_A

B_A,B_E
B_E



图 13-14

在这一具体的序列中，最后到达了一个-世界的纳什均衡模型。但把对例子进行修改后，不难发现 *SR* 跟 *WR* 是有区别的：

	E	a	b	c			
A	d	2,3	1,0	1,1	B_E	–	–
	e	0,0	4,2	1,1	–	B_E, B_A	–
	f	3,1	1,2	2,1	B_A	B_E	B_A

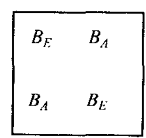
图 13-15

WR 并不消除任何行或列，但 *SR* 消除了上述博弈模型中的顶行和右边列。一般说来，类似 *WR*，*SR* 的迭代宣告有可能在某一点上陷入循环。

例 9　在 *SR*-环中结束。

关于 *SR* 的连续宣告在 4-循环中结束：

B_E	–	B_A
–	B_A	B_E
B_A	–	B_E



B_E	B_A
B_A	B_E

图 13-16

上述更新序列的解释：单一宣告"*j* 是强理性的"导致只留下那些使得 SR_j 为真的状态：它把 *j* 的理性变成了公共知识。但是这样的宣告可能消除模型中的世界，从而使其他玩家 *k* 的 SR_k 无效，既然他们的存在性模态缺乏目击者（后继者）。由于同样的原因，关于每个人的理性的宣告也不一定导致联合理性的公共知识。所以，*SR* 的重复宣告有意义。

命题 4　强理性在有穷的完整博弈模型中是自我实现的。

证明： 每一有穷的博弈模型有 *SR*-环（定理 7）。*SR*-环中的世界满足强理性，

它们永远不会被消除掉。在有穷模型中，当所有上述环上的世界具有 $\sim_E$和 $\sim_A$ 后继时，消除程序就停止，于是整个群体的强理性便成了公共知识。 ■

具体来说，出现在博弈中的纳什均衡会幸存于不动点中，成为长度为 0 的 *SR*-环。即使当它们存在时，我们也不能期望正好得到这些，因为前面的描述也考虑了那些具有足够链接直到纳什均衡的状态。

例 10　两个著名的博弈

囚徒困境有下列的博弈方阵和认知博弈模型（图 13-17）：

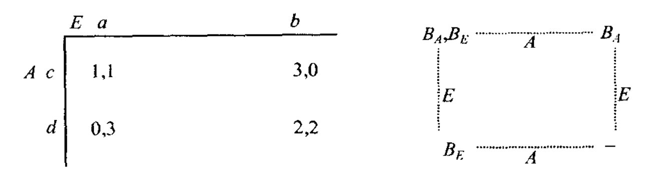


图 13-17

SR-宣告的等一轮就能把上述内容变为单一世界的纳什均衡——因为$\langle E\rangle B_E \wedge \langle A\rangle B_A$只在左顶部为真。下面，请看例子“性别战役”（参阅例 5）：（图 13-18）

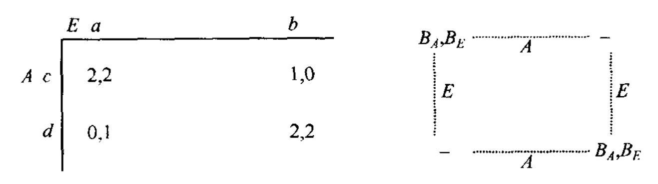


图 13-18

上面的例子一开始就立刻陷入了 *SR*-环，因为$\langle E\rangle B_E \wedge \langle A\rangle B_A$在各处都是真的：于是重复宣告 *SR* 没有任何效果。

上述我们所说的和所做的，实际上是对已有的博弈论求解方法的再次描述！在给定当前可用输出集的情况下，对 *SR* 的迭代宣告导致那些永远不是最佳回应的行为被连续消除。而这样的过程正好就是有关理性化的佩尔斯博弈论算法[①]。

① 跟［Apt. 2005］相符，这里确实有两种选项。我们的方法采用相对于原始模型中所有可能动作的“最佳”概念，正如编码的命题变元那样。另外，13.3.3 还提到了“最佳回应”的相对版本，它对 *SR* 的迭代宣告的应用更像是对应于理性化算法的波恩海姆版本。

13.5.5 比较迭代的 *WR* 和 *SR*

怎样从标准的博弈论算法 SD^{w} 中比较强理性和弱理性的消除过程呢？根据第 13.4 结果，断定 *SR* 一定蕴涵 *WR*，但反过来不一定成立；它们的更新可以得到不同的结果，我们已经看到例 8。不过，它们的迭代宣告产生的长期影响则较难预测，因为 *SR* 的消除步骤的移动速度要快于 *WR* 的相应操作，所以随着模型的改变，会导致认知公式的赋值不可比较。例如，*WR* 在任意有穷的广义博弈模型中是自我实现的，而 *SR* 不是，因为它在某些广义博弈模型中不成立。当然，它们两者之间还是有一个清晰的联系：

定理 8 对任意认知模型 $\mathfrak{M}$, $\#(SR, \mathfrak{M}) \subseteq \#(WR, \mathfrak{M})$。

这个结果不是明显的，在 13.6 我们会采用不动点技术证明之。这一技术更详细地发展了认知博弈模型的逻辑。在标准的博弈论框架内，佩尔斯表明，在包含混合策略的某些更丰富的博弈模型中，基于消除受控策略的求解过程和基于理性化的过程会导致相同的结果。考虑断定 *WR* 和 *SR* 相应的逻辑形式，我们的猜测是：这就像在紧致的（或者说“完全的”）模型中使逻辑量词转换生效的过程。

13.5.6 其他要说的理性问题

SR 正是一种新的理性断定，它能够驱动博弈求解算法的进行。根据 13.4 的结果，可能得到它的多个变种。例如，可令初始博弈模型有纳什均衡，并假定玩家已经确定了其中的一个。于是在完整博弈模型，他们所能知道的最好内容是他们可能在这样的均衡中。在此情况下，我们可以持续不断地宣告那些比 *SR* 还要强的断定，即

$$\langle E\rangle NE \wedge \langle A\rangle NE \qquad \text{均衡宣告}$$

根据同 *SR* 相同的原因，它也是自我实现的，它的宣告极限遗弃了所有的纳什均衡和那些同时由 $\sim_E$ 及 $\sim_A$ 相关联的世界。通过前期的考察我们得出了有关可能做最大交流的一些结论（13.2.5）。一旦一般的理性陈述用完后，仍然可能有些怪异的东西可以说；如果玩家直接交流的话，这会在现实世界进一步放大。

例 11 再进一步

考虑下列含有两个不同 *SR*-环的完整博弈模型，使得断定 *SR* 在各处成立。现实世界在左顶部，表示两玩家的某个（公认不是最理想的）决策对（图 13-19）：

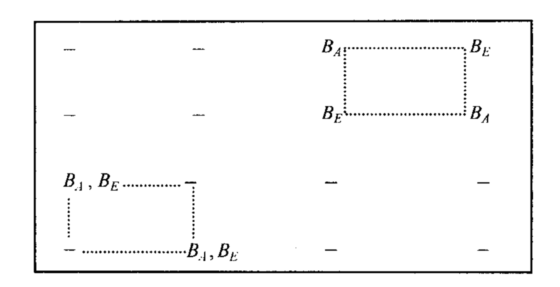


图 13-19

在现实世界，沿着第一列向下看，E 知道 $B_A \leftrightarrow B_E$，所以他能宣告它。于是可以排除第三和第四列。不过沿着第一行看，A 知道 $\neg B_E \wedge \neg B_A$，于是他能宣告它。导致的结果是左上角的 4 个世界。由此表达了公共知识$\neg B_E \wedge \neg B_A$。

例 11 中最后剩下的 4 个-世界模型和使得原子命题 B_E，B_A同时为假的 1 个-世界模型没有认知区别。因为根据定义 1，它们之间有一*互模拟关系*，把所有 4 个点与单一的点联系起来。同样，它也可告诉我们什么时候进一步的宣告是没有效果的。采用某些基本的 *SR*-环，这就可以具体并且清晰地展示出来，从 13.2.5 的角度看，它早已到达了极大交流的核心。

例 12　博弈模型的互模拟关系收缩。

考虑在例 11 中出现的两环。第一个有两个纳什均衡（图 13-20）：

B_A, B_E ····A···· $-$
E 　　　　 E
$-$ ····A···· B_A, B_E

图 13-20

显然上述模型跟下列模型具有互模拟关系（图 13-21）：

B_A, B_E ····A,E···· $-$

图 13-21

这里一切都是公共知识，不存在玩家知道为真的深层次认知断定，它可以把某个世界同另一个世界区分开来。下面请看另一个 *SR*-环（图 13-22）：

B_A ····A···· B_E
E 　　　　 E
B_E ····A···· B_A

图 13-22

显然它跟下面两个世界模型具有认知互模拟关系（图 13-23）：

$$B_A \cdots\cdots A,E \cdots\cdots B_E$$

图 13-23

于是可以得出相同的结论：我们已经到达了交流的极限①。

如果效用值是唯一的，那么上述两 *SR*-环是最典型的。即便如此，在早期阶段，我们还不能找到真正令人信服的认知断定：它们确实驱动新的博弈论求解过程。

13.5.7　安排选项

本节的最后，考虑动态认知装置在建构虚拟会话的时候具有一定的自由度，即它的安排问题。例如，例 2 中“泥孩”具有同时宣告他们状态知识的特征，但如果我们让小孩轮流发言，它的更新序列会完全不同。

例 13（续 2）“泥孩”的其他更新。

第一次更新跟以前一样：*CCC* 消失（图 13-24）：

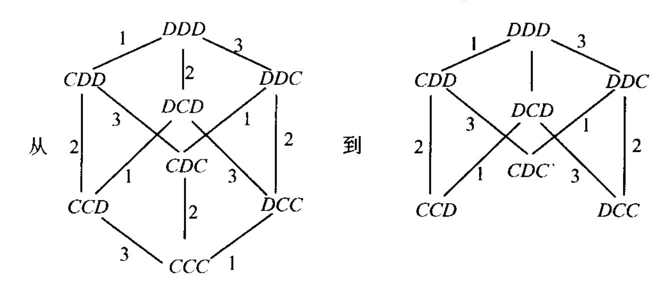


图 13-24

当第一个孩子说他不知道他的状态后，只有世界 *DCC* 消除。然后在现实世界中，第二个孩子现在知道了他的状态！也就是说这消除了除了 *DDC*，*CDC* 外的所有世界。在随后模型中，2 和 3 知道实情成了公共知识，然而 1 通过纯粹的认知断定没能找到事实。

相同的过程作用也可通过用强理性代替孩子们共同的无知而实现。不过我们将会在推论 3 中证明，*SR* 对表达顺序的敏感性要弱一些。诚然，首先说出 SR_E 然后说 SR_A 跟同时说出 $SR_E \wedge SR_A$ 有不同的效果。玩家还可能倾向于说出 $\langle E \rangle B_E \wedge$

① 最后的互模拟收缩把博弈模型看成是模拟它的有穷自动机，即“不可归约的输出类型”。看来研究自动机同博弈求解区域的联系有一定的价值。

$\langle A\rangle(B_A\wedge\langle E\rangle B_E)$，但这个更强的陈述同 $SR_E\wedge SR_A$ 具有相同的宣告极限。

即使这样，动态认知方法看起来对序列的断定具有局部的效果，其代价是它是次序-依赖的，以及出现其他譬如来自祈使句的程序设计的复杂现象。怀疑主义者可能会反对上述方法并给出辩护。但对动态主义的“粉丝”来说，它正好概括性地反映了众所周知的事实，比如在交流和社会活动中，过程对结果起着至关重要的作用。

13.6　逻辑背景：从认知动态到不动点逻辑

13.6.1　动态认知逻辑中的问题

我们的对话情景引出了许多动态认知逻辑中的一般性问题。其中的一些是关于公理化的全然标准的问题。比如，采用包括最佳回应、偏好比较、理性宣告等内容的适当的语言，有关博弈模型的标准认知逻辑可以解释本文中的大部分推理过程。其中一例是定理 7 中的完整博弈模型的 *SR*-环的存在性。正如这一节将要展示的那样，它可以在认知不动点逻辑中得以表达，于是寻求上述语言中的博弈模型的完全逻辑就很有价值了。

除了公理化，模型论的问题也需要考虑。动态认知逻辑中的一个著名的开问题是“学习问题”（[van Benthem. 2002B]）。有一些公式一旦在某个模型下被宣告后，总是导致公共知识。典型的例子是原子事实，请看下面动态认知逻辑中的有效式 $[p!]C_Gp$。另有一些公式在被宣告之后，会导致它们否定成为公共知识。摩尔-型断定“p，但你不知道它”是一个很好的例子：

$$[(p\wedge\neg K_jp)!]C_G\neg(p\wedge\neg K_jp)。$$

还有一些公式只在有穷次重复宣告后才成为公共知识。或者说它们没有统一的形式，但变真或假取决于当前的模型。

问题 1　确切地说，哪些句法形式的断定 ϕ 能够使得 $[\phi!]C_G\phi$ 有效？

显然，13.2 中提到的自我实现公式 ψ 跟此有关，因为在它们的宣告极限 $\#(\mathfrak{M},\psi)$ 中，ψ 成了公共知识。这就是说，如果一个公式是一律地自我实现的，在它的每一宣告极限成为公共知识；那么它一定在某个固定的有穷步后自我实现吗？但可能最显然的问题是来自计算复杂性。不妨在我们的语言中加上宣告极限：

$$\mathfrak{M},s\models\#(\psi)\ \text{当且仅当}\ s\ \text{属于}\ \#(\mathfrak{M},\psi)$$

问题 2 含有 # 的动态认知逻辑仍然可判定吗?

在 13.6.4 中我们将展示，对特殊情况 $\psi = SR$，上述的问题有肯定回答。同样，如果对我们目前的分析有更一般的观点，说明这一结果可以使用迭代宣告和认知不动点逻辑之间的关系。

13.6.2 均衡和不动点逻辑

为了驱动我们的下一步工作，不妨为原始 SD^{w} 引入一个稍微不同于以前的算法：它的原初模型本身并不缩小，但我们在逼近阶段（approximation stages）计算出一种新的世界的性质：从模型的整个域出发，逐渐缩小之，直到没有进一步改变发生为止。这样的自上而下的过程就像是域上某个集合算子的最大不动点的计算。其他的求解算法，如逆向归纳法，采用自下而上的逼近过程来计算最小不动点。不管采用哪一种，博弈求解和均衡都需要处理相应的不动点!

不动点算子可以加入到各种各样的逻辑语言中，比如标准的一阶逻辑([Moschovakis. 1974])。在本文的系统中，我们不妨使用模态 μ-算子([Stirling, 1999]）的一种认知版本。他的语义定义如下：

定义 11 命题变元 p 只正出现一次的公式 $\phi(p)$ 可以定义下列单调集在任何认知模型 $\mathfrak{M}$ 中的转换：

$$F_{\phi}(X) = \{s \in \mathfrak{M} \mid (\mathfrak{M}, p := X), s \models \phi\}$$

然后公式 $\mu p \cdot \phi(p)$ 可以定义上述转换中的最小不动点，把空集作为最初逼近和出发点。类似地，公式 $\nu p \cdot \phi(p)$ 可以定义 F_{ϕ} 的最大不动点，把 $\mathfrak{M}$ 的整个域作为最初逼近和出发点。根据塔斯基-纳斯塔（Tarski-Knaster）定理，易得在单调的映射中上述两类不动点都存在。

这正好可为我们 13.5 中的剧情提供帮助。具体地说，可以通过 μ-算子把 SR-极限定义成最大不动点：

定理 9 有关 SR 反复宣告的世界的稳定集可以在完整博弈模型中定义为 $\nu p \cdot (\langle E\rangle(B_E \wedge p) \wedge \langle A\rangle(B_A \wedge p))$。

证明： SR 过程中未-删除世界集具有要证的闭包性质，所以它包含于最大不动点中。反过来，最大不动点中没有世界可曾被 SR 的宣告删除。 ■

这一均衡特点如下：最大不动点公式 $\nu p \cdot (\langle E\rangle(B_E \wedge p) \wedge \langle A\rangle(B_A \wedge p))$ 定义最大集 P；两玩家都能由它看到对他们各自来说最佳的位置，这样的位置也在这个特别集 P 中。

更精确地说，任意公式 $\phi(p)$ 自上而下的逼近序列类似下面的情形——从模

型中各处为真的公式 T 出发：

T，　$\phi(T)$，　$\phi(\phi(T))$，　…　在极限序数取前面所有的交

在这些连续的阶段和博弈方阵消除回合之间存在一个清晰的对应关系。我们可以采用类似的方式分析弱理性的宣告。

13.6.3　一般的宣告极限是膨胀的不动点

有必要再次考虑迭代宣告。不妨回想 13.5 中有关宣告极限 $\#(\phi,\mathfrak{M})$ 的定义。如果继续采用下面的函数，我们可以进一步研究它的性质：

定义 12　公开宣告的集合算子。

计算 ϕ 的迭代宣告的下一步集合的函数是

$F^*_{\mathfrak{M},\phi}(X) = \{s \in X | \mathfrak{M}|X, s \models \phi\}$　$\mathfrak{M}|X$ 表示把 $\mathfrak{M}$ 的域限制在集合 X 中

一般来说，这一函数 F^* 相对于包含关系不是单调的，我们也不能用认知 μ-算子的分析方法来分析它。原因已在 13.3 中指出：当 $X \subseteq Y$，从模型 $\mathfrak{M} | X$ 到更大的模型 $\mathfrak{M} | Y$，ϕ 可能改变它的真值。同样道理，正如公式 $\nu p \cdot \phi(p)$，我们就不重新计算固定模型中的阶段了；但在那些曾经更小的模型中，需要在所有时间中（整个过程）改变 ϕ 中模态算子作用的范围。所以，F^* 用模型限制混合了普通的不动点计算。尽管更新函数本身是非单调的，迭代宣告仍然可以通过更宽的过程类型——称之为膨胀的不动点逻辑——得到具有完整概括力的定义（[Ebbinghaus & Flum. 1995]）。下列结果的证明恰好清晰地表明它了的运作过程。

定理 10　迭代宣告极限是一个膨胀的不动点。

证明： 取任意 ϕ 并把它相对化，相对于命题变元 p，得出 $(\phi)^p$。在后面的公式中，p 不一定正出现（它变成了负的，比如当相对化到正普遍方块模态的时候），所以 μ-算子类型的一个不动点算子被禁止了。一个具体的例子是 $(\Diamond\Box q)^p = \Diamond(p \wedge \Box(p \to q))$。此时我们可以应用逻辑语言的相对化引理到所有模型 $\mathfrak{M}$ 中。令 P 为命题变元 p 在 $\mathfrak{M}$ 中的指称。那么对 P 中的所有 s 有：

$$\mathfrak{M}, s \models (\phi)^p \text{ 当且仅当 } \mathfrak{M} | P, s \models \phi$$

所以，前述关于 $F^*_{\mathfrak{M},\phi}(X)$ 的定义，即 $\{s \in X | \mathfrak{M} | X, s \models \phi\}$ 等价于

$$\{s \in \mathfrak{M} | \mathfrak{M}[p := X], s \models (\phi)^p\} \cap X$$

这就计算了普遍类型的一个最大不动点。下面请看任意的一阶公式 $\phi(P)$（谓词符号 P 的出现不受句法约束），我们定义下列相关映射 $F^{\#}_{\mathfrak{M},\phi}(X)$：

$$F^{\#*}_{\mathfrak{M},\phi}(X) = \{s \in \mathfrak{M} | \mathfrak{M}[p := X], s \models \phi\} \cap X$$

此映射不一定是单调的，不过它的值总是取它的子集。由于这个特征，我们可以

把它首先应用到 $\mathfrak{M}$，然后再迭代应用，在遇到极限序数时取交集，这样就可获得所谓的最大膨胀不动点。如果函数 $F^{\#}$正好碰巧是单调的，上述过程就跟通常的不动点过程吻合。这样就容易理解宣告极限，比如对任意的 ϕ，它正好就是膨胀的不动点。 ■

所以，有关宣告极限的一般性逻辑能被定义在某个膨胀认知不动点逻辑的系统中。在对本文的最初版本的回应中，[Dawar, et al. 2004] 表明，通常情况下，我们无法在某个认知 μ-演算中定义认知宣告极限。这也是坏消息，因为含有膨胀不动点的模态逻辑是不可判定的，它相当复杂。幸运的是，认知宣告的某些特殊类型可能会有好的性质。我们可以从有关强理性的主要例子中理解这一点。

13.6.4 单调不动点

定理 10 表示有关 *SR* 的迭代宣告可以通过定义于认知 μ-算子的普通最大不动点算子而运作之。原因是前面提到的更新函数 $F_{\mathfrak{M},SR}(X)$ 对集合包含关系来说是真正单调的。这还需要考虑 *SR* 的特殊语法形式，以及它的模型保持行为：

定理 11 对存在性模态公式来说，$F_{\mathfrak{M},\phi}(X)$ 是单调的。

证明： 存在性模态公式只由下列情况构造而来：存在性模态算子、字符 (literals)、合取和析取。特别地，并没有普遍的知识模态算子出现。在这样的特殊句法下，前面提到的相对化 $(\phi)^{p}$中只有 p 的正出现，于是在某个普通的最大不动点计算下，F^{*} 是单调的。 ■

存在性宣告在别处也出现。在前面的“泥孩”例子中，它也是无知宣告的一种形式。

定理 11 有几个应用。首先是定理 9 提到的弱理性和强理性的更新序列的比较：

推论 2 对任意的认知模型 $\mathfrak{M}$，$\#(SR, \mathfrak{M}) \subseteq \#(WR, \mathfrak{M})$。

证明： 根据定义显然有，在任意的广义博弈模型的任意世界中，*SR* 蕴涵 *WR*。下一步，我们比较不动点计算中的各阶段，总是有

$F_{SR}^{*\alpha}(\mathfrak{M}) \subseteq F_{WR}^{*\alpha}(\mathfrak{M})$ 对所有逼近 α 的序数。

上述关系之所以成立是因为有

如果 $X \subseteq Y$，那么 $F_{\mathfrak{M},SR}^{*}(X) \subseteq F_{\mathfrak{M},WR}^{*}(Y)$

它也是我们断言的一种特殊形式的结果。而又有，如果 $\mathfrak{M}|X, s \models SR$ 并且 $s \in X$，那么 $s \in Y$ 并且 $\mathfrak{M}|Y, s \models SR$（根据 *SR* 的存在性定义，真值在模型扩张中保持）。于是就有 $\mathfrak{M}|Y, s \models WR$。 ■

含有非存在性模态形式的情况可能会复杂些。于是，即使在模型 $\mathfrak{M}$ 中有 ϕ

蕴涵 ψ，宣告极限 $\#(\phi, \mathfrak{M})$ 不一定包含于 $\#(\psi, \mathfrak{M})$！

例 14　较强的认知公式可能具有较小的认知极限。

首先给出一对公式：$\phi = p \wedge (\Diamond\neg p \rightarrow \Diamond q)$，$\psi = \phi \vee (\neg p \wedge \neg q)$。

请看下面的认知模型中（单一主体的可达关系是等价关系）（图 13-25）：

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \cdots\cdots & 2 & \cdots\cdots & 3 \\ p, \neg q & & \neg p, \neg q & & \neg p, q \end{array}$$

图 13-25

ϕ 的更新序列在一步后停在世界 1，而 ψ 的序列则如下：

$$\{1,2,3\},\{1,2\},\{2\}$$

接下来，我们考虑 13.5.7 中的潜在的次序依赖。下面给出为什么不在特殊情况下出现这一问题的理由。我们只考虑一种具体的顺序，不过它的证明是一般的。

推论 3　SR_E；SR_A的宣告极限与 SR 的相同。

证明：根据 13.5.7 的结果，相续的宣告 SR_E；SR_A等于说出$\langle E\rangle B_E \wedge \langle A\rangle(B_A \wedge \langle E\rangle B_E)$。而这一存在性公式蕴涵 SR；于是，根据推论 2，SR_E；SR_A的宣告极限包含于 SR 的宣告极限中。反过来，同时的两步 SR 宣告也导致产生蕴涵 SR_E；SR_A的存在性公式。于是我们得到要证的相反包含关系。■

在“泥孩难题”事例中，上述的次序无关性是不成立的。主要原因是它关于无知的驱动性断定；虽然它是存在性的，但涉及否定。所以，关于无知的序列宣告的单一认知公式获得了全称模态。于是，它的更新映射就不是单调的，接下来的有关次序无关性的论证也就无法进行。

定理 12 最终应用具有更一般的逻辑特征。

推论 4　为存在性公式 ψ 加上 $\#(\psi)$ 后的动态认知逻辑是可判定的。

证明：通过单调算子，存在性认知公式的宣告极限出现。所以它们在认知 μ-演算中是可定义的，而这是可判定的。■

13.6.5　博弈中广义的最大不动点

前面的结果表明，我们可以为博弈分析中的最大不动点引入偏好。确实，即使是自下而上的逆向归纳法也可被重新看做是自上而下的最大不动点的展示过程。比如，在有关有穷零和双人博弈的确定性的策梅罗定理中，节点涂色算法本质上是给模态不动点公式赋值。[van Benthem. 2002A] 为采用 μ-版本来研究自下而上的算法，不过这里有一个最大不动点，跟它具有同样的效果：

$$\nu p \cdot (end \,\&\, win_E) \vee (turn_E \wedge \langle E \rangle p) \vee (turn_A \wedge [A]p)$$

赋值会首先把所有的节点都涂上玩家 E 赢的颜色——然后采用全体集合作为首次逼近，逐渐地随着阶段的进展，玩家 A 的正确颜色就会出现。更加一般地说，策略看起来像是永不停止的源泉，如同医生，他们总是可以在需要的时候触发出某些内容，然后再回到他们原初的状态。这同我们前面解释的最大不动点的递归特征相符。

13.7 更丰富模型：忧虑、外部的资源和信念

我们认为博弈求解是关于合理性断定的虚拟交流的过程，最终导致认知均衡。在那些能驱动上述过程的众多可能认知陈述中，我们只研究了强的和弱的理性。但上述剧情容许有更多的变种出现，本文已在 13.1 中给出了例子。

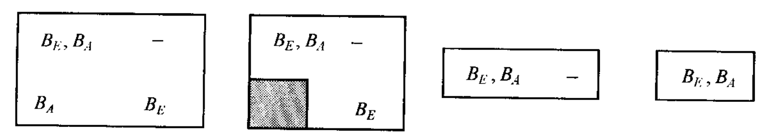
13.7.1 再回到"泥孩难题"

"泥孩难题"的最初信息模型是 3 维-向量的立方体，看起来像完整的博弈模型。不过驱动此难题的自我反驳的无知宣告提出了博弈中另外一种"自我反驳"的剧情，它不是通过宣告玩家的理性，而是通过反复宣告玩家的忧虑（非优化的输出仍然是可用的选项）到达求解地带。事实上，"泥孩"故事立足于含有动作"脏"、"干净"这样的剧情。孩子们不停地说"我的行为结果可能好，也可能很糟糕"——直到他们第一次知道事实上的情况。

"泥孩"故事还向我们展示另一种特征，即赋能行为（enabling actions）。此过程需要有一个跳跃-开始，即父亲的初始宣告。在某个外部信息打破了图表（泥孩原初模型图）的对称性之后，孩子们的内部交流只是导致他们获得有关公共知识的既定目标。这样的效果在博弈中也同样有意义。

例 15 "来自朋友们的些微帮助"

某些均衡只有在外部信息删除某些策略概况，比如破坏 13.8 中的 *SR*-环的对称性之后才到达：



初始模型是一个 *SR*-环，宣告 *SR* 不会消除任何东西。但在这一初始宣告以后，左下角的世界不再是可能的输出，于是更新可以把上述 3 维-世界的模型推

进至单一的纳什均衡。

实际上，如果能在我们的语言中定义，每一个均衡世界或者求解地带都可以用这样的方式获取。技巧在于如何找到那些能够设计驱动虚拟会话或者能在中间阶段干预它们的可接受的外部宣告。

13.7.2　改变信念和似乎合理性

13.3 中只含关系 $\sim_j$ 的认知博弈模型是素朴的。那里假定玩家早已知道他们自己的行为——而这正是他们在整个深思过程中试图发现的东西！有关玩家态度的一种更精巧的分析方法是在原来模型上至少需要增加信念。[Stalnaker. 1999] 已给出了混杂模型。幸运的是，只用我们的动态风格方法，信念就可以通过世界-消除更新过程这样的简单方式得以分析。许多标准的信念逻辑在认知模型的基础上加入了*似乎合理性序* $\leqslant_j$，它处于模型的世界之间，直观上表示主体 j 不能认知地区分那些世界。于是某个主体的信念可以表示成在他的最似真的可达世界上都成立：

$\mathfrak{M}$，$s \models B_j\phi$ 当且仅当对 $\{t \mid t \sim_j s\}$ 所有 $\leqslant_j$-最好世界：$\mathfrak{M}$，$t \models \phi$

与知识相比，这个要求低一些：当现实世界不在 $\leqslant_j$-最好世界里面，主体的信念可以是假的。似乎合理性序也支持其他的逻辑算子，比如依赖主体的*条件句*连结词：

$\mathfrak{M}$，$s \models \phi \Rightarrow_j \psi$ 当且仅当对 $\{t \mid \mathfrak{M}, t \models \phi\}$ 中所有 $\leqslant_j$-最好世界：$\mathfrak{M}$，$t \models \psi$

同时也有类似知识的动态信念还原公理。[van Benthem. 2002D] 指出，公开宣告后的信念满足

$$[A!]B_j\phi \quad \leftrightarrow \quad (A \Rightarrow_j [A!]\phi)$$

$$[A!]\phi \Rightarrow_j \psi \quad \leftrightarrow \quad ((A \wedge [A!]\phi) \Rightarrow_j [A!]\psi)$$

所以，条件句是信念更新的静态编码部分，它表示更新后主体立即相信的内容。在公开宣告这样的简单世界消除模式之外，新近的动态信念逻辑也描述在新信息进来时主体的似乎合理性关系的*改变*过程，从而可以成为对现存信念修正理论的概括（[Aucher. 2003]）。

例 16　更新似乎合理性

请再次考虑例 1：现在加入似乎合理性关系；在初始模型，对所有主体，所有世界都是相等似真的。另一类型的会话情景可能使用“软更新”，它会改变我们的预期。其中的触发者可以是合理性断定

如果 j 相信 a 是一个可能行为；并且相对于 j 认为可能的另一玩家的行为，b 总是比 a 差（根据 j 对输出的偏好）；那么 j 不会执行 b。

作为软更新，这样的句子不消除含有 b 的世界，不过它使得它们跟其他所有世界相比变得较小似乎合理性了。所以，SD^w算法中丢弃行列中的世界失去似乎合理性，对于更新后的新信念来说它们已经不相关。由此得来的似乎合理性关系序列导致的结果是，玩家相信他们在算法的求解方案集中。

这只是很多方法中的一种，把博弈求解过程的做动态认知分析，以便引入信念及其他的触发更新的机制①。

13.8　测试案例：扩展博弈中的认知过程

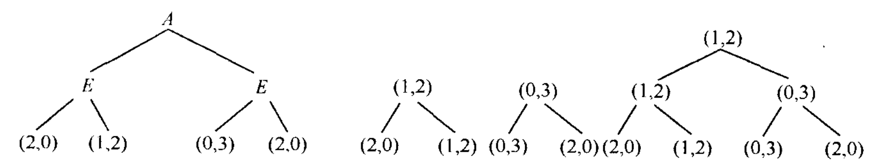
我们的认知宣告关注的是策略博弈。不过扩展博弈也同样可以处理。求解算法如逆向归纳法也可以看做是类似的认知（或信念）过程。正如 13.3 中的做法，我们首先需要确定要处理的模型。文献中的模型通常有包含完备的策略概况 ω 的世界，并加上某个博弈节点 s，不过有时它显得过度结构化了。不妨用某个标准的分支-时间语言来解释它（参阅 [van Benthem. 2002D；van Benthem，van Otterloo & Roy. 2006]），这样我们可以跟扩展博弈的博弈树离得更近一些。在这些树的节点中，玩家可看到一组持续连接目前的可能历史。进一步的信息可能会帮助他们排除上述集合中的某些分支。

13.8.1　分析逆向归纳法

首先请看此过程的一个非常简单的标准情况。

例 17　逆向归纳法。

以下是简单情况下计算节点值的持续步骤：



这是自下而上的节点值计算过程。不过我们也可把这些步骤看做是对分支消除的过程，这一过程可由类似 13.4 中的理性原则的迭代宣告完成。请看其中一个版本：

定义 13（动量理性）　*动量理性断定 MR 表示：在当前模型的某个分支的*

① 关于信念修正的一种更为复杂的动态分析请参阅 [van Benthem. 2007]。

每一阶段，轮到执行的玩家没有选择这样的移动：它的可能续集的终点总是比他以其他可能移动导致的终点要差。

宣告 *MR* 至少消除那些可以由一步逆向归纳法删除的来自于博弈树的历史。此外，由于更小束的可能将来历史可能引发新的消除，重复宣告在此也有意义。有时候，*MR* 过程可以比逆向归纳法走得更快。例如，在例 18 中，如果右终点（2，0）的值曾经是（1/2，0），那么最右分支会在宣告 *MR* 之后被直接消除。当然它们两者的最终结果是一样的：

命题 5　有穷扩展博弈树上，*MR* 的迭代宣告到达的正好是逆向归纳法的求解方案。

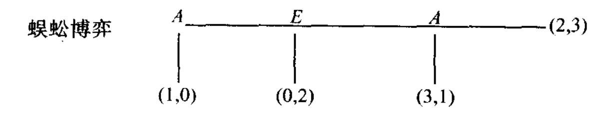
此宣告剧情也提供了另外一种求解过程。例如，某个更加合作的剧情可能涉及下述断定：

合作理性 *CR*

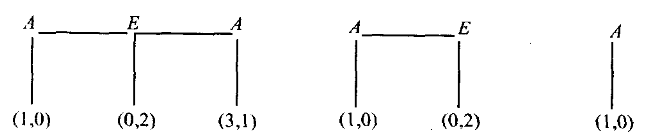
在玩家并没有选择移动 *m* 的情况下，存在不同于 *m* 的某个移动，使得它至少有一个输出并且满足：对于玩家双方来说，它比任何 *m* 之后的历史都要好。

例 18　蜈蚣博弈中的 *MR* 和 *CR* 会话。

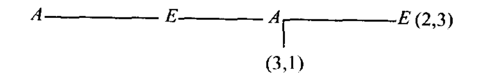
它是著名的例子，这里只考虑简单的情况：



逆向归纳法可以为初始节点计算出（1，0）值：*A* 向下博弈。于是，断定 *MR* 的迭代宣告会依次产生下列各阶段：



当然这是有争议的结果，因为玩家们看到从出发到结束他们其实可以有更好的境况，在那里 *A* 确信可得超过 1，而 *E* 则确信可得超过 0。然而上述合作宣告建议的确可以做出不同的预测。*CR* 的迭代宣告首先可排除 *A* 的第一次向下移动，然后排除 *E* 在此之后的向下移动。在这之后，留有全部的两种选择给 *A* 在最后作选择。



不同于独立的 *CR*，这里的进一步宣告甚至可以迫使产生唯一的求解方案。具有这一效果的宣告类型是"我会回报别人的关爱"，即，冒着失去某种由你保证的并且由你所代表的我们全体更好结果的风险。所以我们可以为扩展博弈选择策略博弈分析中驱动相同剧情的模型、语言和过程——甚至还有更多的选择①。

13.9 结 论

牵涉深思和交流的各类活动的动态直观体现于众多的认知逻辑和博弈论的相关主题中——不过他们通常是不明显的。在物理学中，只有我们给出了导致运动的自然力的清晰描述，均衡才是可理解的。同样也只有清晰地描述了导致认知运动的行为，认知均衡才可能被最好地理解。为此目的，我们从改变博弈模型的动态认知逻辑角度，为虚拟的交流引入了当前的各类更新剧情。这种新的做法极复合我们的直观术语"*理性*"。有时我们还讨论理性输出，它是满足效用和期望之间的某种和谐。不过更基本的概念可能是理性主体执行的*理性行为*。对于后者，我们的理性正好位于其后的过程中。

本文的主要技术贡献有：解决牵涉认知过程的博弈（认知过程本身是受人关注的）。我们提出，在这样的过程中，博弈论均衡是最大的不动点。这从动态认知逻辑的角度为博弈求解概念提供了一种一般的研究途径，以此作为对分散的认知刻画定理的替代。13.5 和 13.6 从动态认知逻辑上为它界定了一系列模型论结果，表明上述的联系是有内容的。特别的，作为技术上的额外收获，博弈论均衡同可计算的不动点逻辑建立了连接，它们本身具有的复杂理论可能也是有用的。但总体上我们希望，文中提到的那些剧情是值得大家研究和拓展的；甚至把玩它们也是件有趣的事！

最后需要指出的是，我们的分析有明显的局限。这里的模型是粗糙的，它们不能做出复杂的认知区分。此外，在整个过程中，我们还忽略了概率和混合策略所扮演的角色。在假定它们的情况下，我们显然不能得出，引入外在的认知动态是博弈论基础上已知病症（问题）的特效治疗方案。不过它确实为我们增加了看待事物的新的方式，以及有关博弈、逻辑和计算之间联系的众多实例；而这样三者的联系是前景可观的。

---

① 在这一阶段，考虑扩展博弈随着时间进化也是个诱人的问题。于是，玩家经历两种不同的过程，即含有观察移动的更新和关于博弈将来过程期望的修正。为此，我们需要更复杂的动态-认知-时间逻辑。而且，比 *MR* 或 *CR* 行为更复杂的全局假设（比如说"你是有穷自动机"）终究会把我们带回那些充分发展的世界中。[van Benthem. 2002D] 对这样的剧情作了进一步讨论，并给出了更丰富的时间架构。

致谢

作者感谢爱普特（Krzysztof Apt）、德布朗（Boudewijn de Bruin）和海兰德（Martin Hyland）及本杂志两位匿名读者，感谢他们的评论。

参考文献

Apt K. 2005. The many faces of rationalizability. Amsterdam: Centre for Mathematics and Computer Science.

Aucher G. 2003. A combined system for update logic and belief revision. Master's thesis. ILLC, University of Amsterdam.

Baltag A, Moss L, Solecki S. 1998. The logic of public announcements, common knowledge and private suspicions. // *Proceedings TARK*. Updated versions through 2004. Los Altos: Morgan Kaufmann Publishers: 43 ~ 56.

Binmore K. 1992. *Fun and Games*. Lexington (Mass.): Heath & Company.

Blackburn P, de Rijke M, Venema Y. 2001. Modal Logic. Cambridge: Cambridge University Press.

Dawar A, Grädel E, Kreutzer S. 2004. Inflationary fixed points in modal logic. *ACM Transactions on Computational Logic*, 5: 282 ~ 315.

de Bruin B. 2003. *Explaining Games - on the Logic of Game-Theoretic Explanations*. PhD thesis. ILLC, University of Amsterdam.

Ebbinghaus H-D, Flum J. 1995. *Finite Model Theory*. Berlin: Springer.

Fagin R, Halpern J, Moses Y, Vardi M. 1995. *Reasoning about Knowledge*. Cambridge (Mass.): The MIT Press.

Meyer J-J, van der Hoek W. 1995. *Epistemic Logic for AI and Computer Science*. Cambridge: Cambridge University Press.

Moschovakis Y. 1974. *Elementary Induction on Abstract Structures*. Amsterdam: North-Holland.

Osborne M, Rubinstein A. 1994. *A Course in Game Theory*. Cambridge (Mass.): The MIT Press.

Stalnaker R. 1999. Extensive and strategic form: games and models for games. *Research in Economics*, 53: 193 ~ 291.

Stirling C. 1999. Bisimulation, modal logic, and model checking games. *Logic Journal of the IGPL*, 7: 103 ~ 124.

van Benthem J. 1996. *Exploring Logical Dynamics*. Stanford: CSLI Publications.

van Benthem J. 2002A. Extensive games as process models. *Journal of Logic, Language and Information*, 11: 289 ~ 313.

van Benthem J. 2002B. 'One is a lonely number': on the logic of communication. Tech Report, PP-2002-27. ILLC, University of Amsterdam. // Final vesion, 2006. Chatzidakis Z, Koepke P, Pohlers W. eds. *Logic Colloquium'* 02, ASL & A. K. Peters, Wellesley MA: 96 ~ 129.

van Benthem J. 2002C. Rational dynamics and epistemic logic in games, Tech Report PP-2002-26. IL-

LC, University of Amsterdam. Final version, 2007. Rational dynamics, *International Game Theory Review*: 9, 13 ~ 45, 377 ~ 409.

van Benthem J. 2002D. Update and revision in games. Working paper. ILLC Amsterdam & Stanford University. Various versions through 2004.

van Benthem J. 2007. Dynamic logic for belief revision. Tech Report, PP-2006-11. ILLC, University of Amsterdam. Final version, 2007. *Journal of Applied Non-Classical Logic*, 17: 129 ~ 156.

van Benthem J, van Eijck J, Kooi B. 2004. Axioms for communication and action. ILLC, University of Amsterdam, CWI Amsterdam & Department of Philosophy, University of Groningen. Final version, 2006. Logics of communication and change. *Information and Computation*, 204: 1620 ~ 1662.

van Benthem J, van Otterloo S, Roy O. 2006. Preference logic, conditionals and solution concepts in games. // Lagerlund H, Lindström S, Sliwinski R, eds. *Modality Matters: Twenty-Five Essays in Honour of Krister Segerberg*. Uppsala Philosophical Studies, 53: 61 ~ 77.

van Ditmarsch H, van der Hoek W, Kooi B. 2007. *Dynamic Epistemic Logic*. Berlin: Springer.

van Ditmarsch H. 2002. Keeping secrets with public communication. Department of Computer Science, University of Otago, Dunedin.

附录

附录一
英-汉专业术语对照表

abstract，抽象的
accessible，可达的
action，行为
additivity，可加性
admissible，可容许的
agent，主体
  multi-，多主体
aggregation，聚合公理
algebra，代数
algebraizing，代数化
algorithm，算法
announcement，宣告
  public，公开宣告
antisymmetry，反对称性
approximation stage，逼近阶段
arrow，箭号，箭头
associativity，结合性
  for composition，复合的结合性
assignment，指派
  asymmetric，非对称的
atom，原子
atomic harmony，原子一致
axiom，公理
betweenness，中间状态
Hamblin's，哈柏林公理
  induction，归纳公理
  Segerberg's，塞格伯格公理
axiomatic system，公理系统
axiomatizable，可公理化的
axiomatization，公理化
back-and-forth，向后-向前的
back condition，往后条件，向后条件
backward induction，逆向归纳法
Barcan formula，巴坎公式
belief，信念
  merge，信念融合
  revision，信念修正
  revision policy，信念修正策略
betweenness，中间状态
bidirectional，双向的
binary，二元的
Birkhoff's Theorem，柏克霍夫定理
bisimilar，互模拟的，双仿的
bisimilarity-somewhere-else，别处互模拟，别处双仿
bisimulation，互模拟，双仿
  closed under，在互模拟下封闭，对双仿封闭
  invariant for，对互模拟不变，双仿不变
  locality and computation，局部性和计算
  n-，n-互模拟，n-双仿
  power，效力互模拟

respect for，对互模拟尊重
root-to-root，根-根互模拟
unraveling，展开互模拟
safe for，互模拟安全的
boolean，布尔
bound，界限
bounded，有界的，有限的
morphic image，有界态射像
morphism，有界态射
memory，有限记忆力
box，方块号，方块
$\Box$，
$\Box_a$，
$[a]$，
boxed atom，方块原子
branch，分杈
Bull's Theorem，布珥定理
bulldozing，压延

canonical，典范的
canonicity，典范性
Cantor's Theorem，康托尔定理
carrier，基础集
categorial，范畴的
Chagrova's Theorem，查格诺娃定理
characterization，特征化，刻画
Church's Thesis，丘奇论题
Church-Rosser property，丘奇-罗塞性
closed，（封）闭的
closure，闭包
Fischer-Ladner，费希尔-拉德纳闭包
transitive，传递闭包
under single negation，单纯否定号下的闭包
under subformula，子公式下的闭包
universal，全称闭包
cluster，聚点
coalgebra，余代数
co-finite set，余有穷集
cofinality，共尾性，共尾度
collective，集体的
communication core，交流核
compact，紧致的
Compactness Theorem，紧致性定理
completeness，完全性
strong，强完全性
weak，弱完全性
completeness-via-canonicity，利用典范性的完全性
complex algebra，复代数
complexity，复杂性
composition，复合
computable，可计算的
conditional，条件的，条件句
confluence，相汇，汇合，参见 Church-Rosser property，丘奇-罗塞性
congruence，合同
connected，连通的
coNP
consistency，协调性，一致性
contraction，收缩
contravariant funtor，反转函子
converse，逆
convexity，凸面
Coordinate，协同者
Cook-Levine Theorem，库克-莱文定理
coPSPACE
correspondence，对应
for model，模型对应
global，for frame，框架的全局对应
language，语言对应
local，for frame，框架的局部对应
theory，对应理论
counterfactual logic，反事实逻辑
Craig's Lemma，克雷格引理

false in a model，在一个模型中假
falsifiable，可假的
　filter，滤子
filtration，过滤
Filtration Theorem，过滤定理
finite，有穷
first-order logic，一阶逻辑
fixed-point，不动点
flat set of lists，列举的平铺集
formalism，形式系统
formula，公式
forcing，迫使
fork，分叉
　forking path，分叉路径
forth condition，往前条件
fragment，片段
frame，框架

game，博弈
　card，纸牌博弈
　Ehrenfencht-Fraisse，埃伦芬赫特-弗雷斯博弈
　extensive，扩展型博弈
　Information-Friendly，友好信息博弈
　Lorenzen，洛伦岑博弈
　non-determined，不确定性博弈
　Parlor，室内博弈
　sabotage，蓄意破坏的博弈
　strategic，策略型逻辑，矩阵博弈
　zero-sum，零和博弈
Geach Axiom，吉奇公理
general frame，一般框架
general ultrafilter frame，一般超滤框架
generalization，概括
generalized semantics，广义语义学
generated，生成的
Gestalt switch，格式塔转换

global，全局的
Goldblatt-Thomason Theorem，戈德布莱特-托马森定理
grid，网格
　two-dimensional，二维网格
Grzegorczyk axiom，格热高奇克公理
Grzegorczyk formula，格热高奇克公式
guarantee property，担保性
guard，安保
　guarded，安保的
　fragment，安保片段
　iteration，安保迭代
　quantification，安保量化（式）
　quantifier，安保量词
　simulation，安保模仿
guardedness，安保性
　pairwise，成对安保性

Hamblin's Axiom，哈柏林公理
height，高度
Hemaspaandra's Theorem，海玛斯庞德拉定理
Henkin model，亨金模型
Hennessy-Milner，亨尼西-米尔呢
hierarchy，层级
highly undecidable，极不可判定的
Hilbert systems，希尔伯特系统
Hintikka set，辛梯卡集
homomorphism，同态
Horn clause frame condition，霍恩子句框架条件
hybrid logic，混合逻辑
hypercylindric frame，超柱状框架

identity arrow，恒等箭号
image-finite，像有穷的
incompleteness，不完全性
inconsistent，不协调的

entries，矩阵条目
maximal consistent set，极大协调集
McKinsey formula，麦肯西公式
MCS，参见 maximal consistent set，极大协调集
measure，度量
modal，模态的
Modal Distribution，模态分配律
Modal Invariance Theorem，模态不变性定理
modal logic，模态逻辑
modality，模态词，模态
existential，存在模态词
global，全局模态词
master，总模态词
non-homogeneous，非齐次模态词
nullary，零元模态词
universal，全模态词
modally，模态上
model，模型
modus ponens，分离规则
monadic，一元的
monotone，单调的
downward，向下单调的
upward，向上单调
fixed points，单调不动点
left，左单调
cautions，谨慎单调
monotonicity，单调性
for converse，逆的单调性
for iteration，迭代的单调性
morphism，态射，参见 bounded morphism，有界态射；zigzag morphism，Z 字形态射
mosaics，马赛克
multi-dimensional modal logic，多维模态逻辑
μ-calculus，μ-演算

n-bisimulahon，n-互模拟，n-双仿
nabla，∇，劈形号
named model，带名字的模型
natural valuation，自然赋值
neighbourhood semantics，邻域语义学
necessitation，必然化，参见 generalization，概括
network，网络
NEXPTIME
node，节点
nominal，名字
non-branching，不分权的
non-finite-axiomatizability，非有穷可公理化
normal modal logic，正规模态逻辑
normality，正规性
normal form，范式
NP
NPSPACE
nullary modality，零元模态词

operation，运算
operator，算子
oracle，神谕
ordered pair，有序对，序对，有序偶，序偶
outcome，结果
output，输出

packed，捆绑的
parallel，平行的
partial function，部分函数
partial order，偏序
PDL，参见 propositional dynamic logic，命题动态逻辑
pebble game，鹅卵石博弈
permissible，可允许的
persistence，持久性
player，玩家，选手，游戏者
plausibility relation，合理性关系
pleasing principle，合意原则

Scott sentences，斯科特句子
second-order，二阶的
semantic consequence，语义后承
sequent calculus，后承演算，矢列演算
sequential，序列的
set algebra，集合代数
similarity type，相似型
simulation，模仿，单模拟
simultaneous induction，同时归纳
since operator，自从算子
since/until logic，自从/直到逻辑
situation，情境
solution，求解方案
soundness，可靠性
Speech Act Theory，言语行为理论
splitting，分裂
square，方形
resetting，复位
standard translation，标准翻译
state，状态
strategy，策略
　profile，策略概况
　strictly dominated，严格受控策略
　uniform，统一策略
Stavi connectives，斯塔维联结词
step-by-step method，逐步法
STIT logic，STIT 逻辑
Stone Representation Theorem，斯通表示定理
strict，严格的
structural rule，结构规则
subalgebra，子代数
subdirectly，次直地
subformula closed，子公式封闭的
submodel，子模型
subpath，子路径
substitution，代入，替换
　instance，代入实例
　simultaneous，联立代入
succession，连续性，延续性
successor，后继
suggestion，建议
system，系统

temporal logic，时序逻辑
tense logic，时态逻辑
term，词项，项
terminal，末端
theorem，定理
tiling，铺砖
total order，全序
tractable，易处理的
transfer，迁移，移植
transitive，传递的
translation，翻译
tree，树
triangle，△，三角号
trichotomy，三歧性
triple，三元组
　good，良三元组
Truth Lemma，真值引理
Turing machine，图灵机
2EXPTIME-complete
two-sorted，二种类的
type，类型，型

ultrafilter，超滤
Ultrafilter Theorem，超滤定理
ultrapower，超幂
ultraproduct，超积
unbounded，无界的
undecidable，不可判定的
underclass，次类
unfolding，翻开，参见 unraveling，展开
uniform，一致的，齐一的

universal，全称的，泛的，全局的，普遍的
universally true，普遍真的
universe，论域
unraveling，展开
until operator，直到算子
unwinding，松开，参见 unraveling，展开
update，更新
upgrade，升级
utility，效用

valid，有效的
validity，有效性
valuation，赋值
van Benthem Characterization Theorem，范·本特姆特征化定理
variant，变体
variety，簇
Veltman's rule，斐尔曼规则

well-founded，良基的
well-ordered，良序的
window，视窗，窗口
witness，见证

Zermelo Theorem，策梅罗定理
zigzag，Z 字形
  morphism，Z 字形态射

附录二
英-汉人名对照表

Alechina, N. 艾略施纳
Abramsky, S. 阿布拉姆斯基
Andréka, H. 安德烈卡
Apt, K. 爱普特
Auman, R. J. 奥曼

Baltag, A. 巴塔赫
Barcan Marcus, R. 巴坎·马库斯
Barwise, J. 巴威思
Beaver, D. 毕维尔
Bernheim, D. 波恩海姆
Bergstra, J. 贝格斯特拉
Beth, E. W. 贝特
Binmore, D. 宾莫
Birkhoff, G. 柏克霍夫
Brouwer, L. E. J. 布劳维尔
Bull, R. A. 布珥

Cantor, G. F. P. 康托尔
Cepparello, G. 雀普热拉
Chagrov, A. V. 查格诺夫
Chagrova, L. A. 查格诺娃
Church, A. 丘奇
Cook, S. A. 库克
Craig, W. 克雷格

De Bruin, B. 德布朗
de Jongh, D. H. J. 德漾
de Rijke, M. 德莱克
Dedekind, J. W. R. 戴德金
Diodorus, C. 第奥多鲁斯
Doets, K. 杜茨
Dziobiak, W. 卓比亚克
Došen, K. 杜森

Ehrenfeucht, A. 埃伦芬赫特
Enderton, H. 安德顿
Esakia, L. 艾萨基亚
Endriss, U. 安德烈斯

Feferman, S. 菲弗曼
Fine, K. 法因
Fischer, M. J. 费希尔
Fraïssé, R. 弗雷斯

Gabbay, D. 格拜
Garson, J. 嘎森
Ghilardi, S. 吉拉第
Gargov, G. 加戈夫
Geach, P. T. 吉奇
Gentzen, G. 根岑
Gerbrandy, J. 赫布兰第
Girard, P. 吉拉德
Goldblatt, R. 戈德布莱特

Goranko, V. 戈兰科
Grädel, E. 格瑞德
Groenendijk, J. 胡能迪克
Grzegorczyk, A. 格热高奇克

Harel, D. 哈尔
Harrenstein, P. 哈仁斯坦
Hemaspaandra, E. 海玛斯庞德拉
Hendricks, V. 汉德瑞克斯
Henkin, L. 亨金
Hennessy, M. 亨尼西
Herzig, A. 赫尔齐格
Heyting, A 海丁
Hildmann, H. 黑特曼
Hilbert, D. 希尔伯特
Hintikka, J. 辛梯卡
Hoare, C. A. R. 霍尔
Hollenberg, M. 霍伦勃
Hodges, W. 霍基斯
Horn, A. 霍恩
Humberstone, L. 哈伯斯通
Hyland, M. 海兰德

Jankov, V. A. 扬科夫
Janssen, T. 彦森
Jónsson, B. 耀森

Kamp, H. 坎普
Keisler, H. J. 凯斯乐
Keenan, E. L. 克能
Kleene, S. C. 克里尼
Knaster, B. 纳斯塔
Kooi, B. 阔宜
Kracht, M. 克拉赫特
Kripke, S. 克里普克
Kruskal, J. B. 克鲁斯克
Kurtonia, N. 库特尼亚

Ladner, R. E. 拉德纳
Lambek, J. 兰贝克
Leibniz, G. W. 莱布尼茨
Leitgeb, H. 拉吉普
Levine, V. A. 莱文
Lindenbaum, A. 林登鲍姆
Lindström, P. 林斯特龙
Lindström, S. 林斯特龙
Linnaeus, C. 林纳斯
Löb, M. H. 洛伯
Lorenzen, P. 洛伦岑
Łoś, J. Z. 沃施
Löwenheim, L. 骆文汉姆
Lyndon, R. C. 林登

Maksimova, L. 马克西莫娃
Mark, M. 马克
Marx, M. 马克斯
McKinsey, J. C. C. 麦肯西
Mikulás, Sz. 米库拉丝
Milner, R. 米尔呢
Monk, D. 蒙克
Moore, G. E. 摩尔
Moss, L. 莫斯
Montague, R. 蒙塔古
Mostowski, A. 莫斯托斯基

Nash, Jr., J. F. 纳什
Németi, I. 内梅提
Nishimura, H. 西村由纪江
Ng, J. 吴

Occam, W. 奥卡姆
Orey, S. 奥雷
Osborene 奥斯波
Pacuit, E. 帕奎特
Passy, S. 帕塞

Pauly, M. 泡利
Pearce 佩尔斯
Peirce, C. S. 皮尔士
Plaza, L. A. 普拉热
Pledger, E. 普勒杰
Pólos, L. 颇洛思
Pratt, V. 普拉特
Prior, A. N. 普莱尔

Rabin, M. O. 拉宾
Ramsey, F. P. 拉姆兹
Rieger, L. 瑞格
Renardel, G. 雷纳德
Reynolds, M. 雷诺兹
Richard, D. 理查德
Rodenburg, P. H. 罗登伯格
Rodenhäuser, B. 罗德豪斯尔
Rosen, E. 罗森
Rosser, J. B. 罗塞
Rott, H. 罗特
Rubinstein, A. 汝宾斯坦

Sadzik, T. 萨兹克
Sahlqvist, H. 萨奎斯特
Sain, I. 塞恩
Sambin, G. 撒宾
Savitch, W. J. 萨维奇
Schroeder-Heister, P. 施罗德-海斯特
Scott, D. 斯科特
Segerberg, K. 塞格伯格
Shelah, S. 谢拉
Shehtman, V. 谢特曼
Skolem, T. 斯科伦
Smets, S. 斯麦兹
Smoryński, C. 斯莫林斯基
Solecki, S. 斯莱兹克
Spohn, W. 斯彭
Stalnaker, R. 斯托内克尔
Stavi, J. 斯塔维
Stokhof, M. 斯托克霍夫
Stone, M. H. 斯通

Tarski, A. 塔斯基
ten Cate, B. 腾卡特
ter Meulen, A. 特穆棱
Thomason, R. H. 托马森
Thomason, S. K. 托马森
Tomasik, J. 托马斯克
Thompson, R. 托普森
Turing, A. M. 图灵

Urquhart, A. 厄克特

Vakarelov, D. 瓦卡若洛夫
Valencia, V. S. 瓦伦西亚
Väänänen, J. A. 外纳能
van Benthem, J. F. A. K. 范本特姆
van den Berg, M. 范登伯格
van der Does, J. 范德杜施
van der Hoek, W. 范德胡克
van Ditmarsch, H. 范迪特玛施
van Eijck, J. 范埃克
van Lambalgen, M. 范拉巴衡
Veltman, F. 斐尔曼
Venema, Y. 维尼玛
Vermeulen, K. 弗穆棱
Meyer Viol, W. 麦叶尔·维奥
Visser, A. 维施尔

Walukiewicz, I. 瓦卢凯维奇
Westertahl, D. 维斯特尔塔
White, M. G. 怀特

Zermelo, E. 策梅罗

致　谢

下面是本书所收录论文的详细出版信息，相关的出版社已经授权我们出版论文的中文翻译，在此表示衷心的感谢！

1. Modal Correspondence Theory, reprint with addenda, in D. Gabbay, and F. Guenthner eds., *Handbook of Philosophical Logic*, Vol. III., second edition, 325 ~ 408, 1999, Springer Science, Dordrecht.
2. Modal Logic in Two Gestalts, in M. de Rijke, H. Wansing & M. Zakharyashev, eds., *Advances in Modal Logic II*, 1998, 73 ~ 100, CSLI Publications, Stanford.
3. Guards, Bounds and Generalized Semantics, *Journal of Logic, Language and Information* (2005) 14: 263 ~ 279, Springer Science, Dordrecht.
4. A Note on Dynamic Arrow Logic, In J. van Eijck and A. Visser, editors, 1994, *Logic and Information Flow*, pages 15 ~ 29. MIT Press, Cambridge MA.
5. Modal Foundations for Predicate Logic, *Logic Journal of the IGPL* (1997) 5 (2): 259 ~ 286, College Publications, London.
6. Program Constructions that are Safe for Bisimulation, *Studia Logica* (1998) 60: 311 ~ 330, Springer Science, Dordrecht.
7. One is a Lonely Number: on the Logic of Communication. In Z. Chatzidakis, P. Koepke & W. Pohlers, eds., 2006, *Logic Colloquium* '02, 96 ~ 129, ASL & A. K. Peters, Wellesley MA.
8. Dynamic Logic for Belief Revision, *Journal of Applied Non-Classical Logics* (2007), 17(2), 129 ~ 156, Lavoisier, Paris.
9. Dynamic Logic of Preference Upgrade, *Journal of Applied Non-Classical Logics* (2007), 17(2), 157 ~ 182, Lavoisier, Paris.
10. Games in Dynamic-Epistemic Logic, *Bulletin of Economic Research* (2000) 53 (4), 219 ~ 248, Blackwell, Oxford.
11. Extensive Games as Process Models, *Journal of Logic, Language and Information* (2002) 11, 289 ~ 313, Springer Science, Dordrecht.
12. Logic Games are Complete for Game Logics, *Studia Logica* (2003) 75, 183 ~ 203,

Springer Science, Dordrecht.

13. Rational Dynamics and Epistemic Logic in Games, in S. Vannucci, ed., *Logic, Game Theory and Social Choice III*, University of Siena, Department of Political Economy, 19 ~ 23. Final version *in International Game Theory Review* 9: 1, 2007, 13 ~ 45, World Scientific Publishers, Singapore.